<u>Die Bernoulli-Gleichung</u>

Bei Reibungsfreiheit gilt der Satz von der Erhaltung der *mechanischen* Energie:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} + E_{elast.} = \frac{m}{2} v^2 + mgh + E_0$$

Indem wir die Energie auf die Volumeneinheit beziehen, gehen wir zu Energiedichte bzw. zu Drücken über:

$$\left[\frac{\text{Energie}}{\text{Volumeneinheit}}\right] = \frac{J}{m^3} = \frac{N}{m^2} = [\text{Druck}]$$

Die Energiebilanz geht dann über in die **<u>Bernoulligleichung</u>**

$$p_{ges} = \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g h + p_{St}$$

Der Gesamtdruck ergibt sich als Summe von **Staudruck** $\frac{\rho}{2} v^2$, **Schweredruck** $\rho g h$ und **statischem Druck** p_{St}.

Ist die Dichte eine Funktion des Druckes, so gilt allgemeiner

$$\frac{v^2}{2} + gh + \int \frac{dp}{\rho(p)} = \text{const.}$$

Für ein ideales Gas wird der Zusammenhang zwischen Druck und Dichte im isothermen Fall durch das Boyle'sche Gesetz beschrieben:

Das Boyle'sche Gesetz

$$pV = \text{const.} = p_0 V_0$$

Mit dem Molvolumen V_M und der molaren Masse μ erhält man

$$pV = V_{M0} \frac{m}{\mu} p_0$$

bzw.

$$p = \rho \frac{V_{M0}}{\mu} p_0 = \rho \frac{p_0}{\rho_0}$$

Unter Normalbedingungen (nicht Standardbedingungen) gilt:

T_0	V_{M0}	p_0	ρ_0(Luft)
0 °C = 273,15 K	22,4 l	1 bar	1,29 kg / m^3

Für ein ideales Gas gilt: Bei gegebener Temperatur ist die Dichte eines Gases seinem Druck proportional.

Im folgenden interessieren wir uns für den Druck in einer nichtströmenden Flüssigkeits- bzw. Gassäule, d.h. mit $v = 0$ gilt:

$$gh + \int \frac{dp}{\rho(p)} = \text{const.}$$

Für eine inkompressible Flüssigkeit mit $p_{ges}(h=0) = p_0$ gilt dann für den statischen Druck:

$$p_{St} = p_0 - \rho g h$$

Der statische Druck einer Flüssigkeitssäule nimmt mit steigende Höhe ab.
Im Falle eines Gases gilt (in Näherung eines idealen Gases) bei konstanter Temperatur (isotherme Schichtung):

$$\rho(p) = \rho_0 \frac{p}{p_0}$$

Die Berechnung des Integrals in der Bernoulli-Gleichung ergibt:

$$\int \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{p_0}{\rho_0} \int \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln p - C = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_c}$$

In der Höhe h = 0 sei der Druck $p_{ges} = p_{St} = p_0$ und die Dichte ρ_0. Daraus folgt für die Integrationskonstante $p_c = p_0/e$. Für die Höhenabhängigkeit des statischen Drucks ergibt sich die barometrische Höhenformel:

$$p_{St} = p_0 \exp - \frac{g\rho_0 h}{p_0}$$