

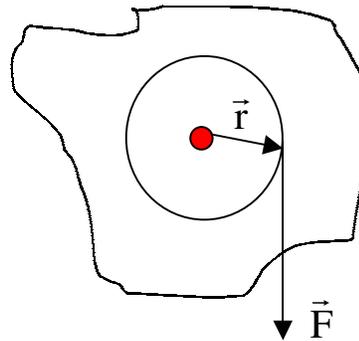
Bewegungsgleichung starrer Körper

Ein um eine Achse drehbar gelagerter Körper mit dem Trägheitsmoment I soll auf die Frequenz ω beschleunigt werden. Dazu muss die Arbeit

$$W = E_{\text{rot}} = \frac{I}{2} \omega^2$$

verrichtet werden. Wird der Körper im Abstand \vec{r} durch eine Kraft \vec{F} beschleunigt, entspricht dies einer Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = I\vec{\omega}\dot{\vec{\omega}} = \vec{F}\dot{\vec{r}}$$



Mit $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ gilt somit

$$I\vec{\omega}\dot{\vec{\omega}} = \vec{F}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Vektoren im gemischten Produkt (Spatprodukt) können zyklisch vertauscht werden, ohne dass sich das Vorzeichen ändert:

$$I\vec{\omega}\dot{\vec{\omega}} = \vec{F}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{r}(\vec{F} \times \vec{\omega}) = \vec{\omega}(\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{\omega}\vec{D}$$

Die endgültige Beziehung, die Bewegungsgleichung für den rotierenden starren Körper, lautet somit nach Multiplikation mit $\vec{\omega}^{-1}$:

$$\vec{D} = I\dot{\vec{\omega}}$$