Drehimpulserhaltung

Drehimpulserhaltung im Zentralfeld

Im Fall des Gravitationspotentials (Planetenbewegung) oder des Coulombpotentials (Rutherfordstreuung) bewegt sich eine Masse m unter dem Einfluss einer Zentralkraft

$$\vec{F}(r) = F(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$$

$$F(r)_{grav} = \gamma \frac{mM}{r^2} \qquad F(r)_{coul} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^2}$$

Im Falle einer Zentralkraft (z.B. Gravitationskraft, Coulombkraft) hängt der Betrag der Kraft nur vom Abstand r zum Kraftzentrum ab. Der Zusammenhang zwischen Kraft und Potential kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}V(r) = \frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}$$

Mit

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = m\left[\left(\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}\right)+\left(\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}\right)\right]$$

gilt unter Beachtung der Tatsache, dass das Kreuzprodukt paralleler Vektoren verschwindet:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} = 0$$

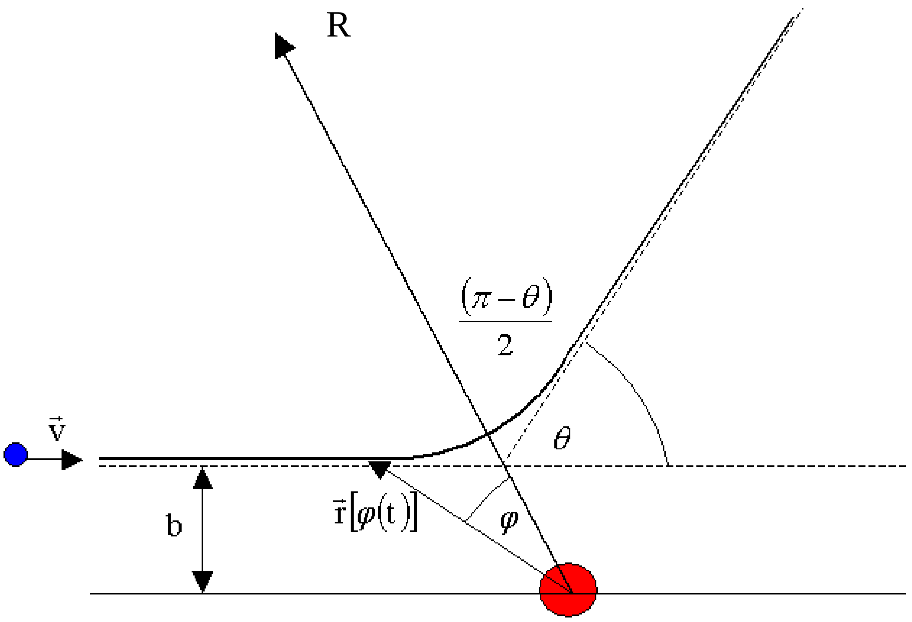
Der Drehimpuls des Projektils bleibt erhalten, da kein äußeres Drehmoment auf das Projektil einwirkt. Da die Richtung einer Zentralkraft parallel zum Ortsvektor $\vec{r}$ wirkt, ist das Kreuzprodukt und damit das Drehmoment gleich Null, d.h. der Drehimpuls ist eine (Bewegungs)konstante.
Aus der Drehimpulserhaltung folgt sofort der Flächensatz (2. Kepler'sches Gesetz) für Kegelschnittbahnen (1. Keplergesetz):

$$dA = rds = rvdt = \frac{L}{m}dt$$

Drehimpulserhaltung bei der Rutherfordstreuung

Im Fall der Rutherfordstreuung bewegt sich das Projektil unter dem Einfluss einer Zentralkraft

$$\vec{F}(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$



Der Drehimpuls des Projektils (Punktmasse m) kann mittels folgender Gleichungen ausgedrückt werden:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{\omega} \cdot r^2 = m \frac{d\varphi(t)}{dt} r^2(t)$$

Der Anfangsdrehimpuls ist gegeben durch (b – Stoßparameter)

$$\boxed{L = b \cdot m \cdot v}$$

Unter Verwendung der ersten Gleichung erhalten wir über

$$L = b \cdot m \cdot v = m \frac{d\varphi(t)}{dt} r^2(t)$$

die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{b \cdot v}{r^2}$$

Für die (Linear)Impulskomponente des Projektils in Richtung der Achse R (in großer Entfernung vom Targetatom) gilt $p_r = \mp mv \sin\frac{\theta}{2}$. Damit erhält man für die Impulsänderung (gleich dem Kraftstoß):

$$\Delta\vec{p}_R = 2mv\sin\frac{\theta}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_R \, dt$$

Der in radialer Richtung wirkenden Kraft entspricht hier die Coulombkraft $\vec{F} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$. Wir betrachten hier die Kraftkomponente in Richtung R, d.h. $F_R = F \cdot \cos\varphi$. Somit folgt für die Impulsänderung:

$$\Delta\vec{p}_R = 2mv\sin\frac{\theta}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos\varphi \, dt$$

Wir substituieren dt durch dφ mittels $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{b \cdot v}{r^2}$:

$$\Delta\vec{p}_R = 2mv\sin\frac{\theta}{2} = \int_{-(\pi-\theta)/2}^{(\pi-\theta)/2} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 bv} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 bv} 2\cos\frac{\theta}{2}$$

und somit für den Ablenkwinkel θ:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 bmv^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{bE_0}$$