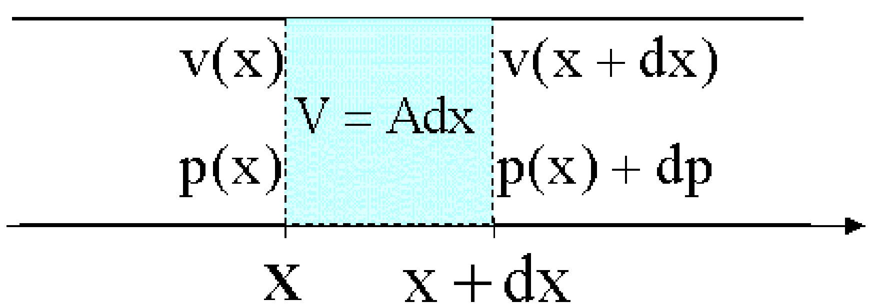
Stehende elastische Wellen in Flüssigkeiten und Gasen

Wir beginnen mit der Untersuchung der Ausbreitung einer *fortschreitenden* eindimensionalen *harmonischen Druckwelle* in einem isotropen elastischen Medium. Dazu betrachten wir eine Flüssigkeits- oder Gassäule, die sich in einem Rohr vom Querschnitt A befindet:



Wir interessieren uns für die räumliche- und zeitliche Änderung des Druckes im Rohr, um daraus die Wellengleichung herzuleiten.

a) <u>Räumliche Änderung des Druckes</u>

Auf das Volumenelement V der Breite Δx im Rohr wirkt die resultierende Kraft dF:

$$dF = p(x)A - p(x+dx)A$$

Für kleine Änderungen dx sind auch die Druckänderungen klein und es folgt mit

$$p(x+dx) = p(x) + dp = p(x) + \frac{\partial p}{\partial x}dx = p(x) + p'dx$$

und damit auch

$$dF = -p'dxA = -p'V$$

Für die Beschleunigung der Gas- bzw. Flüssigkeitsmenge dm im Volumen V erhält man mittels der Newton'schen Bewegungsgleichung eine Beziehung zwischen räumlicher Druckänderung und Beschleunigung zu:

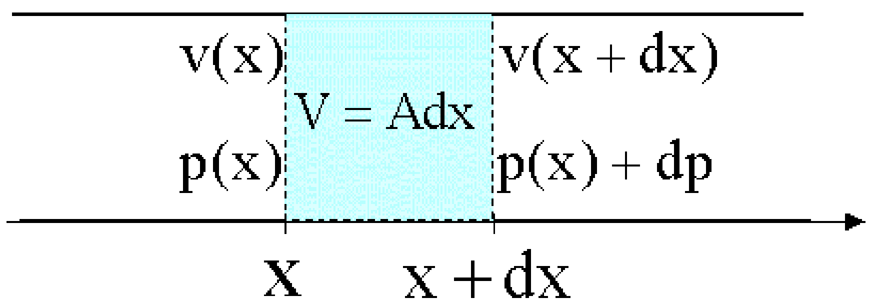
$$\dot{v} = \frac{dF}{dm} = \frac{-p'V}{\rho V} = -\frac{p'}{\rho}$$

bzw.

$$p' = -\rho\dot{v}$$

Ein Druckgradient im Medium ist mit einer Beschleunigung verbunden.

b) <u>Zeitliche Änderung des Druckes</u>



Das eingezeichnete Volumenelement V ändert sich mit der Zeit zu

$$\frac{dV}{dt} = A\frac{d}{dt}dx = Adv$$

Mit dv = v'dx folgt damit wegen $dV = Advdt = Av'dxdt = v'Vdt$:

$$\frac{dV}{V} = v'dt$$

Unter Verwendung der Definition der *Kompressibilität*

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}$$

erhält man schließlich

$$\dot{p} = -\frac{v'}{\kappa}$$

Eine zeitliche Änderung des Druckes im Medium ist verbunden mit einem Geschwindigkeitsgradienten.

c) <u>Die Wellengleichung</u>

Unter Verwendung von

$$p' = -\rho\dot{v} \qquad \text{und} \qquad \dot{p} = -\frac{v'}{\kappa}$$

erhält man durch Ableitung nach dem Ort bzw. der Zeit:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial^2 t^2} = -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$$

Eliminieren von $\partial^2 v / \partial x \partial t$ führt zur Wellengleichung

$$\ddot{p} = c^2 p'' = \frac{1}{\kappa\rho}p''$$

mit der Phasengeschwindigkeit der Welle c

$$c = \sqrt{\frac{1}{\kappa\rho}}$$

Analog führt das Eliminieren des Druckes aus beiden Gleichungen zu einer Beziehung für die Geschwindigkeit der im Medium oszillierenden Teilchen (Die lokale Geschwindigkeit v(x,t) darf nicht verwechselt werden mit der Phasengeschwindigkeit c der Welle):

$$\ddot{v} = \frac{1}{\kappa\rho} v''$$

Spezielle harmonische Lösungen der obigen Wellengleichungen sind also:

$$\Delta p = \Delta p_0 \sin(\omega t + kx + \alpha)$$

und

$$v = v_0 \sin(\omega t + kx + \alpha)$$

Die Auslenkung der oszillierenden Teilchen Δx mit der Amplitude Δx_0 erhält man durch Integration der letzten Gleichung zu

$$\Delta x = -\Delta x_0 \cos(\omega t + kx + \alpha)$$

Dabei gelten folgende Beziehungen zwischen den Größen Δp_0 (Druckamplitude), v_0 (Schallschnelle) und Δx_0:

$$v_0 = \omega \Delta x_0$$

$$\Delta p_0 = \rho v_0 c = v_0 \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}}$$

Zwischen der Druckamplitude Δp_0 und der longitudinalen Schwingungsamplitude Δx_0 besteht eine Phasenverschiebung von 90°, d.h. Schwingungsknoten entsprechen Druckbäuchen und den Schwingungsbäuchen entsprechen Druckknoten. Dies bedeutet, dass an Stellen minimaler Auslenkung (relativer Ruhe der Teilchen) maximaler Druck herrscht.

d) Eigenfrequenzen - Randwertprobleme

Fortschreitende Wellen können sich nur in sehr langen Stäben oder Röhren ausbreiten. Wird eine Röhre, die ein elastisches Medium enthält, abgeschlossen, so treten bei der Wellenausbreitung Reflexionen auf. Reflexionen können nur vermieden werden, wenn die Energie am Rohrende völlig „aufgebraucht", d.h. absorbiert wird. In diesem Fall kann man auch in kurzen Wellenleitern fortschreitende Wellen beobachten (d.h. es gibt nur einlaufende Wellen). Ist dies nicht der Fall, so hat man auch rücklaufende Wellen, die mit den einlaufenden Wellen *interferieren,* was zur Ausbildung von stehenden Wellen führt:

$$\Delta x_S = 2\Delta x_A \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right)\sin(\omega t)$$

Findet an beiden Rohrenden, die bei $x_{01} = 0$ und $x_{02} = L$ liegen sollen, eine Reflexion am harten Ende statt, so gelten folgende Randbedingungen:

$$\Delta x_s(x=0)=0 \quad \text{und} \quad \Delta x_s(x=L)=0$$

Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn der ortsabhängige Term der Gleichung $\Delta x_S = 2\Delta x_A \cos\left(kx+\frac{\varphi}{2}\right)\sin(\omega t)$ verschwindet.

Aus $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)=0$ folgt

$$\varphi = \pi$$

und aus $\cos\left(kL+\frac{\varphi}{2}\right)=0$ folgt mit $\left(kL+\frac{\varphi}{2}\right)=\left(\frac{2m+1}{2}\right)\pi$ die Bedingung

$$kL = m\pi$$

$$m = 1,2,\ldots.,n,n+1,\ldots.$$

bzw.

$$\lambda_m = \frac{2L}{m} \quad ; \quad f_m = m\frac{c}{2L}$$

Es können sich also nur bestimmte Wellen ausbreiten, die der Bedingung $kL = m\pi$ genügen. Für m = 1 erhält man die sogenannte Grundwelle, deren halbe Wellenlänge gleich der Stab- bzw. Rohrlänge ist. Die Frequenz, mit der man diese Welle anregen kann, folgt mittels der Phasengeschwindigkeit. Ganzzahlige Vielfache dieser Frequenz heißen ***Oberwellen***.

Erfolgt eine Reflexion am offenen Ende, gilt folgende Randbedingung:

$$\Delta x_s(x=0)=0 \quad \text{und} \quad \Delta x_s(x=L)=\Delta x_{max}$$

Aus der Bedingung für die Reflexion am festen Ende folgt wiederum

$$\varphi=\pi$$

Wir haben am offenen Ende einen Schwingungsbauch, für den gilt:

$$\cos\left(kL+\frac{\varphi}{2}\right)=\pm 1$$

Daraus folgt

$$kL=\frac{2m-1}{2}\pi=\frac{2\pi}{\lambda}L$$

Damit erhalten wir:

$$\lambda_m=\frac{4L}{2m+1}$$

bzw. für die Eigenfrequenzen

$$f_m=\frac{2m+1}{4}\frac{c}{L}$$

Ein einseitig fest eingespannter Stab der Länge L entspricht somit einem Viertel der Grundwellenlänge ($L=\lambda/4$). Am losen Ende befindet sich ein Schwingungsbauch. Bei einem beidseitig eingespannten Stab befindet sich der Schwingungsbauch dagegen in der Mitte ($L=\lambda/2$).