<u>Der Energiesatz der Mechanik</u>

Wir gehen davon aus, dass sich ein Kraftfeld durch ein Potential ausdrücken lässt. Dies ist dann der Fall, wenn das Potential nur vom Ort abhängt und nicht von dem Weg, auf dem ein Massenpunkt dorthin gebracht wird. Solche Kraftfelder, z.B. das Gravitationsfeld, nennt man konservativ (wie wir sehen werden, weil sie die mechanische Energie erhalten). Es muss also gelten:

$$\oint F_K d\vec{s} = 0$$

Mittels der allgemein geltenden Vektoridentitäten

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = \int_A \mathrm{rot}\vec{F}\, d\vec{A} \quad (\mathrm{Stokes'scherSatz})$$

und

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}V = 0$$

folgt sofort auch formal mathematisch, dass die Kraft aus einem Potential abgeleitet werden kann, wenn das geschlossene Wegintegral über der Kraft gleich Null ist:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}V$$

Für die Reibungskraft gilt dagegen:

$$\oint \vec{F}_R d\vec{s} \neq 0$$

Es ist sofort einzusehen, dass die Reibungsarbeit nicht verschwindet, wenn man auf einem geschlossenen Kreis fährt. Hier wird ***mechanische Energie*** in Wärme verwandelt, ist also keine Erhaltungsgröße (Dies ist keine Aussage über die allgemeine Energieerhaltung).

Mit

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}V$$

und

$$\mathrm{grad}V * d\vec{r} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) =$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = dV$$

gilt auch

$$\vec{F}\vec{v} = -\mathrm{grad}V \cdot \vec{v} = -\frac{dV}{dt}$$

Außerdem gilt

$$\vec{F}\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}E_{kin}$$

Durch Vergleich erhält man:

$$\frac{d}{dt}E_{kin} = -\frac{d}{dt}V$$

bzw.

$$\frac{d}{dt}\left(E_{kin} + V\right) = 0$$

Wenn die totale zeitliche Ableitung einer Größe Null ist, so ist sie eine Erhaltungsgröße. Die letzte Gleichung drückt somit die Erhaltung der mechanischen Energie aus, sofern die wirkenden Kräfte konservativ sind.