Erzwungene Schwingungen

Wir hatten als Bewegungsgleichung der gedämpften freien Schwingung:

$$m\ddot{x} + r_k \dot{x} + Dx = 0$$

Wir nehmen an, dass unser Oszillator (z.B. Feder oder Pendel) der Eigenfrequenz ω_0 durch eine harmonische Kraft mit der Frequenz ω_E angeregt wird:

$$F_E = F_0 \cos \omega_E t$$

Die Kräftegleichung ändert sich daher zu

$$m\ddot{x} + r_k \dot{x} + Dx = F_0 \cos \omega_E t$$

Diese Gleichung hat eine spezielle Lösung der Form

$$x = x_A \cos(\omega_E t - \alpha)$$

Durch Einsetzen findet man die Amplitude x_A des Oszillators und den Phasenwinkel α:

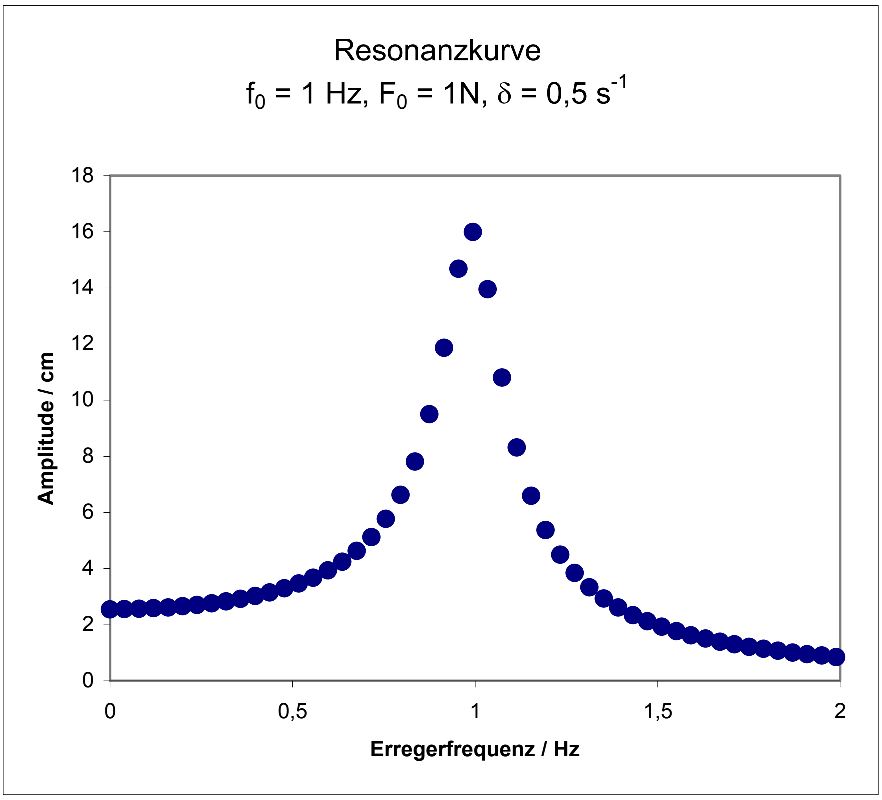
$$x_A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + r_k^2 \omega_E^2}}$$

$$\alpha = \arctan \frac{r\omega_E}{m(\omega_0^2 - \omega_E^2)}$$

Wir betrachten die Amplitude x_A in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz ω_E. Mit $\frac{r_k}{m} = 2\delta$ und $F_0 = ma_0$ gilt für x_A:

$$x_A = \frac{a_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + 4\delta^2\omega_E^2}}$$

In der folgenden Darstellung ist die Amplitude der Schwingung (nach dem Einschwingvorgang) in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz an einem speziellen Beispiel dargestellt:



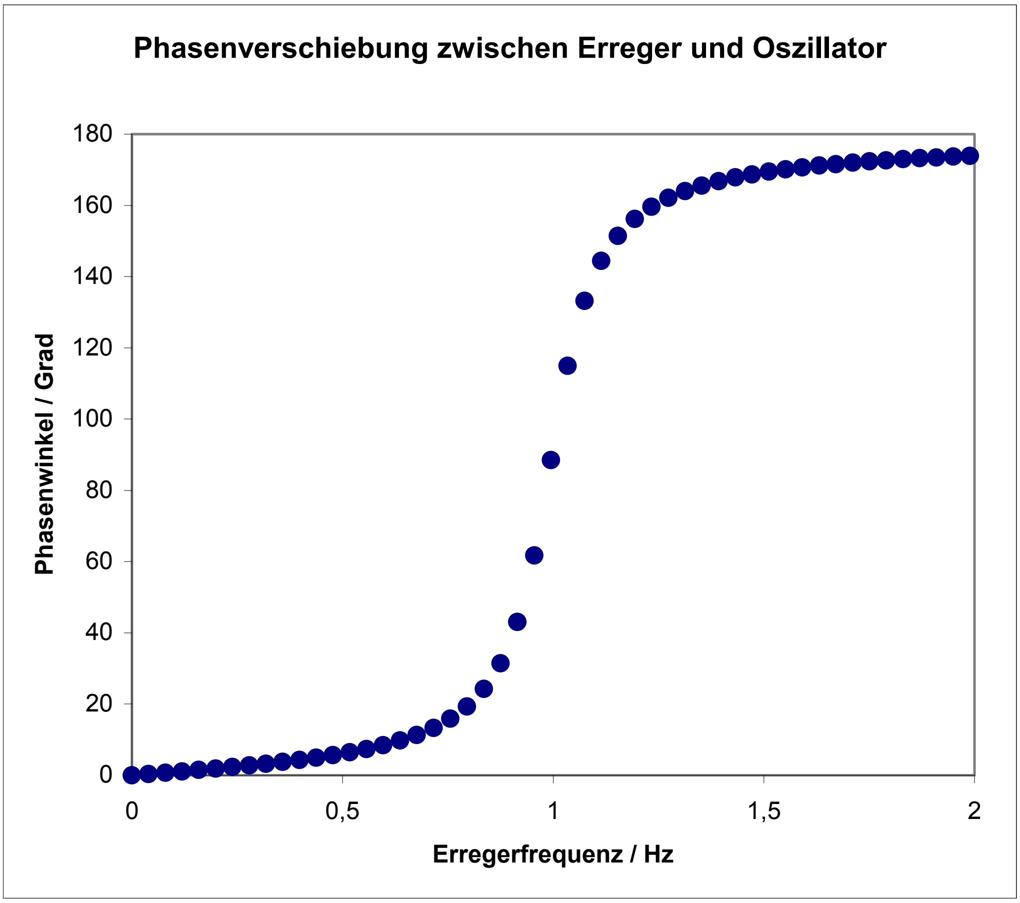
Aus der Grafik geht hervor, dass die Amplitude der Schwingung ein Maximum hat, wenn die Erregerfrequenz gleich der Frequenz der freien Schwingung ist. Die oben abgebildete Kurve heißt Resonanzkurve, die Bedingung

$\omega_0 = \omega_E$ heißt Resonanzbedingung

Im folgenden diskutieren wir noch den Phasenwinkel α in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz. Der Phasenwinkel α entspricht der Phasenverschiebung zwischen Erreger- und Oszillatoramplitude.

$$\alpha = \arctan \frac{2\delta\omega_E}{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)}$$

Für denselben Parametersatz, wie im Falle der Resonanzkurve, erhält man:



$f_E << f_0$	$\alpha = 0°$	Erreger in Phase mit Oszillator
$f_E = f_0$	$\alpha = 90°$	Resonanz
$f_E >> f_0$	$\alpha = 180°$	Gegenphasige Schwingung

Gespeicherte Energie im Resonanzfall

Wird ein Oszillator zu erzwungenen Schwingungen angeregt, so wird Energie vom Erreger auf den Oszillator übertragen. Diese Übertragung ist besonders effektiv im Resonanzfall. Welche Energie auf den Oszillator übertragen wird, hängt dabei insbesondere von der Dämpfung ab. Da die Reibungskraft mit der Geschwindigkeit wächst, ist die maximale Geschwindigkeit des Oszillators und damit seine kinetische Energie durch die Dämpfung begrenzt. Ist die Reibungskraft $-rv$ gleich der angreifenden Kraft $F_0 = ma_0$, so erhält man für v:

$$v = \frac{F_0}{r} = \frac{a_0}{2\delta}$$

Wir vergleichen dieses Ergebnis mit der maximalen Geschwindigkeit des Pendels im Resonanzfall. Mit

$$\dot{x} = -x_A \omega_E \sin(\omega_E t - \alpha)$$

erhält man $\quad v_{max} = x_A \omega_E$

Mit $\quad x_A(\omega_E = \omega_0) = \frac{a_0}{2\delta\omega_E}$

ergibt sich schließlich das oben bereits überlegte Ergebnis:

$$\boxed{v_{max} = \frac{a_0}{2\delta}}$$

Damit erhält man aus der Beziehung für die kinetische Energie einen Ausdruck für die im Oszillator im Resonanzfall gespeicherte mechanische Energie:

$$\boxed{E = \frac{m}{8}\frac{a_0^2}{\delta^2}}$$