Lösung der Bewegungsgleichung für erzwungene, gedämpfte Schwingungen

Wir hatten die Gleichung

$$m\ddot{x} + r_k\dot{x} + Dx = F_0 \cos\omega_E t$$

Mit den Abkürzungen

$$\frac{r_k}{m} = 2\delta \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m} \quad \text{und} \quad \frac{F_0}{m} = a_0$$

erhalten wir

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos\omega_E t$$

Hierin bedeuten ω_0 die Eigen(kreis)frequenz des Oszillators, ω_E die Erreger(kreis)frequenz, δ das logarithmische Dekrement, welches die Stärke der Dämpfung beschreibt) und a_0 die Beschleunigung des Oszillators durch die angreifende periodische Kraft. Um die Gleichung lösen zu können, ersetzen wir die Kraft $F_0 \cos\omega_E t$ durch den komplexen Ausdruck $F_0 \exp i\omega_E t = F_0(\cos\omega_E t + i\sin\omega_E t))$:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \exp i\omega_E t$$

Dies ermöglicht den ebenfalls komplexen Lösungsansatz

$$x = x_A \exp i(\omega_E t - \alpha) = x_A(\cos(\omega_E t - \alpha) + i\sin(\omega_E t - \alpha))$$

Da die angreifende Kraft eine reelle Größe ist, interessiert als Lösung auch nur der Realteil des Ansatzes $x = x_A \cos(\omega_E t - \alpha)$. Der komplexe Ansatz ermöglicht jedoch das Lösen der Differentialgleichung.

Mit

$$x = x_A \exp i(\omega_E t - \alpha)$$

erhalten wir

$$\dot{x} = i x_A \omega_E \exp i(\omega_E t - \alpha)$$

und

$$\ddot{x} = -x_A \omega_E^2 \exp i(\omega_E t - \alpha)$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung und Division durch $\exp i\omega_E t$ liefert:

$$(-x_A \omega_E^2 + i2\delta x_A \omega_E + x_A \omega_0^2) \exp - i\alpha = a_0$$

bzw.

$$(-x_A \omega_E^2 + i2\delta x_A \omega_E + x_A \omega_0^2) = a_0 (\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

Diese Beziehung wird aufgeteilt in eine Gleichung für den Realteil und eine Gleichung für den Imaginärteil:

$$(-x_A \omega_E^2 + x_A \omega_0^2) = a_0 (\cos\alpha)$$

$$(2\delta x_A \omega_E) = a_0 (\sin\alpha)$$

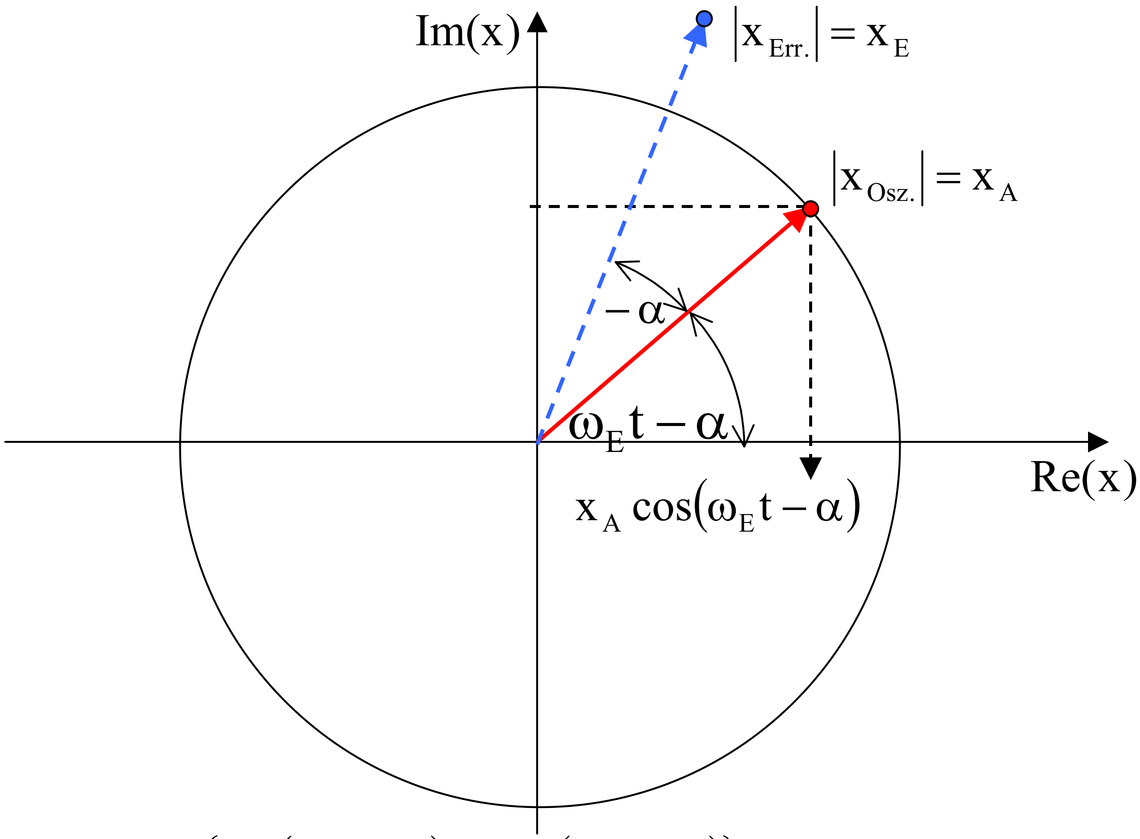
Aus diesem Gleichungssystem können die Amplitude x_A und der Phasenwinkel α in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz bestimmt werden. Unter Ausnutzung von $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ folgt für die Amplitude:

$$x_A = \frac{a_0}{\sqrt{\left[(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \omega_E^2\right]}}$$

Division beider Gleichungen ergibt den Phasenwinkel

$$\alpha = \arctan \frac{2\delta\omega_E}{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)}$$

Darstellung der Lösung in der komplexen Ebene



- $x_{Oszillator} = x_A \{\cos(\omega_E t - \alpha) + i \sin(\omega_E t - \alpha)\}$
- $x_{Erreger} = x_E \{\cos(\omega_E t) + i \sin(\omega_E t)\}$

Die komplexe Exponentialfunktion $x = x_A \exp i(\omega_E t - \alpha)$ kann als Zeiger in einem Polardiagramm (Zeigerdiagramm) dargestellt werden, der den Betrag x_A und den Phasenwinkel $\omega_E t - \alpha$ hat.

- Die Elongation des Oszillators ergibt sich aus dem Realteil von x (Re(x)).
- Die Phase des Oszillators erhält man aus dem Verhältnis von Imaginär- zu Realteil.