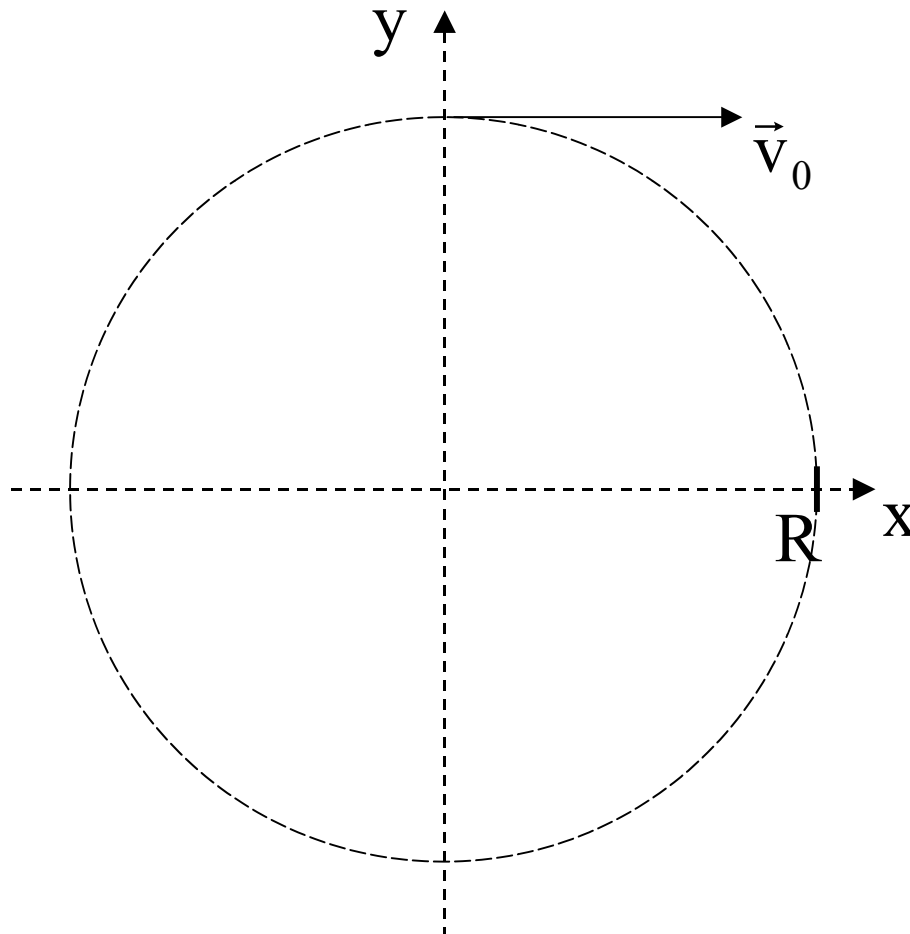


Freier Fall um die Erde



Erdradius: $R = 6378 \text{ km}$; $g(R) = 9,81 \text{ m/s}^2$

Wir werfen einen Körper nahe der Erdoberfläche mit einer solchen Geschwindigkeit, dass der Krümmungsradius in jedem Punkt der Bahn gleich dem Erdradius ist. Für den waagerechten Wurf gilt:

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

Mit der Beziehung für den Krümmungsradius

$$R_k = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

folgt unter Ausnutzung von

$$y' = -\frac{g}{v_0^2} x \quad y'' = -\frac{g}{v_0^2}$$

an der Stelle $x = 0$ der Krümmungsradius

$$R_k = -\frac{v_0^2}{g}$$

bzw. die nötige Geschwindigkeit für $R_k = -R$ zu

$$v_0 = \sqrt{gR}$$

Da man diese Betrachtung für jeden folgenden Teil der Bahn wiederholen kann, bewegt sich ein Körper auf einer Kreisbahn mit

$$v_0 = \sqrt{gR} = 7,91 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

nahe der Erdoberfläche.

Eine einfachere Berechnungsmethode für diese erste kosmische Geschwindigkeit basiert auf der Kinematik der Kreisbewegung:

Aus der Gleichheit von Gravitationsbeschleunigung g und Zentripetalbeschleunigung v^2/R erhält man ebenfalls:

$$g = \frac{v_0^2}{R} \quad \text{bzw.} \quad v_0 = \sqrt{gR}$$

Wir vergleichen diese Geschwindigkeit mit der thermischen Geschwindigkeit eines Gasmoleküls. Die kinetische Gastheorie liefert aus der Gleichheit von kinetischer Energie und thermischer Translationsenergie:

$$\frac{m}{2} v^2 = \frac{3}{2} kT$$

die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{3 \frac{kT}{m}}$$

Boltzmannkonstante $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$

Für ein Stickstoffmolekül mit $m = 28 m_H$; $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ erhält man bei der Temperatur 300 K eine mittlere Geschwindigkeit von 515 m/s. Leichtere Gase sind etwas schneller, ein Wasserstoffmolekül bringt es auf fast 2 km/s. Diese Geschwindigkeiten sind viel kleiner, als die erste kosmische Geschwindigkeit und erst recht kleiner, als die zweite kosmische Geschwindigkeit (Entweichgeschwindigkeit von der Erde).

Für den Mond ($g = 1,67 \text{ m/s}^2$; $R = 1738 \text{ km}$) erhalten wir dagegen eine Kreisbahngeschwindigkeit von nur 1,7 km/s. Der Mond ist also kaum in der Lage, eine Atmosphäre über längere Zeit zu halten. Da die angegebenen Gasgeschwindigkeiten nur mittlere Geschwindigkeiten sind, finden sich immer einige Moleküle mit hinreichender Geschwindigkeit, die in der Lage sind, sich von der Oberfläche zu entfernen.