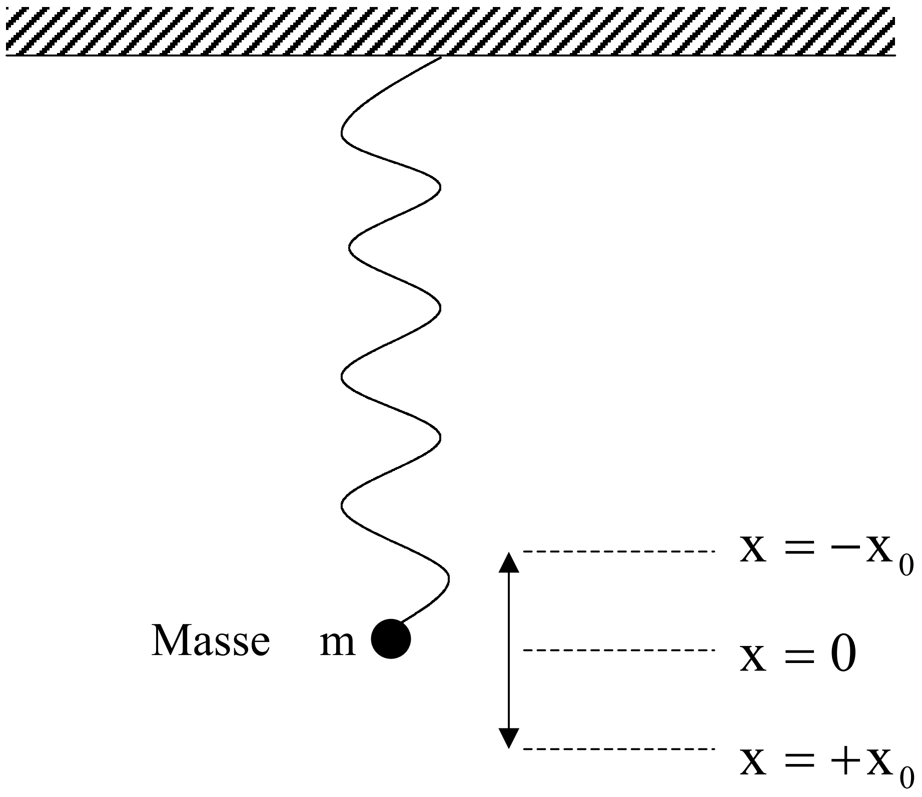
<u>Freie, ungedämpfte, harmonische Schwingungen</u>



Im Falle des Federschwingers führt die Masse m eine ***zeitlich periodische Bewegung*** um die Ruhelage x = a aus, wenn sie zuvor um den Betrag x_0 (***Amplitude***) aus der Ruhelage ausgelenkt wurde. Die ***Periodendauer*** T (reziproke ***Frequenz***) ist bestimmt durch das Gleichgewicht aus Trägheitskraft und Rückstellkraft der Feder und hängt damit von der Masse und der Rückstellkraft der Feder ab. Aus der Bewegungsgleichung

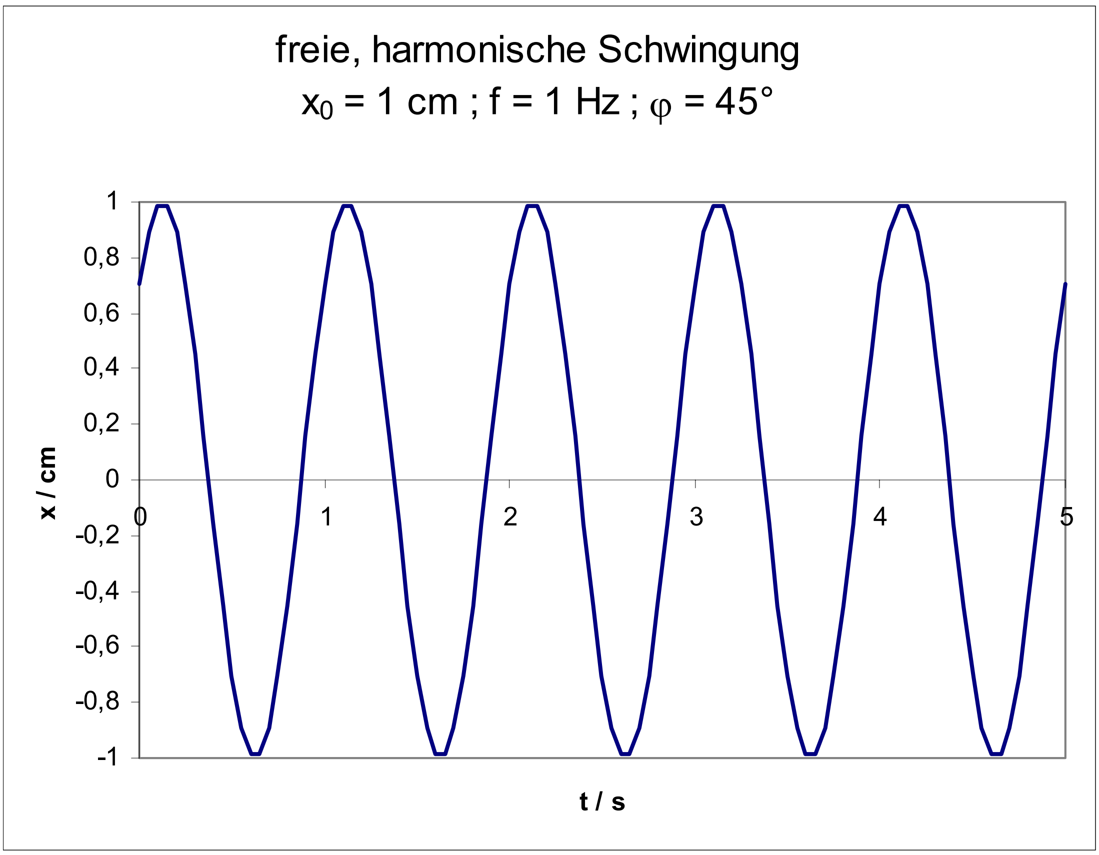
$$m\ddot{x} + Dx = 0$$

erhält man die Auslenkung (***Elongation***) x mit $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ zu

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Eine solche Lösung erhält man generell, wenn die Kraft linear von x bzw. das Potential der Kraft quadratisch von x abhängt. Ein vom Ort quadratisch abhängendes Potential nennt man auch harmonisch, da es die Ursache für harmonische (sinusförmige) Schwingungen ist.

harmonisches Potential	$V \propto x^2$
harmonische Schwingung	$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$
Elongation	$x(t)$
Amplitude	x_0
Kreisfrequenz ; Frequenz	$\omega_0 = 2\pi f \quad ; \quad f$
Phasenwinkel	φ
Phase	$(\omega_0 t + \varphi)$
Gesamtenergie	$E_{ges} = \frac{m}{2} x_0^2 \omega_0^2$



Im Falle einer ungedämpften Schwingung gilt der Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie. Im oben angeführten Beispiel kann die Schwingungsgleichung direkt aus der Energieerhaltung abgeleitet werden:

$$E_{ges} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{D}{2}x^2 = \text{const.}$$

Durch Differenzieren nach der Zeit erhält man:

$$\frac{d}{dt}E_{ges} = 0 = m\dot{x}\ddot{x} + Dx\dot{x}$$

bzw.

$$m\ddot{x} + Dx = 0$$

oder

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Im Falle einer ungedämpften harmonischen Schwingung ist die mechanische Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße. Es findet eine periodische Umwandlung von kinetischer in potentielle Energie statt. Mit

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{und} \quad \dot{x}(t) = x_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

erhält man durch Einsetzen in $E_{ges} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{D}{2}x^2$ für die Gesamtenergie:

$$E_{ges} = \frac{m}{2}x_0^2\omega_0^2$$

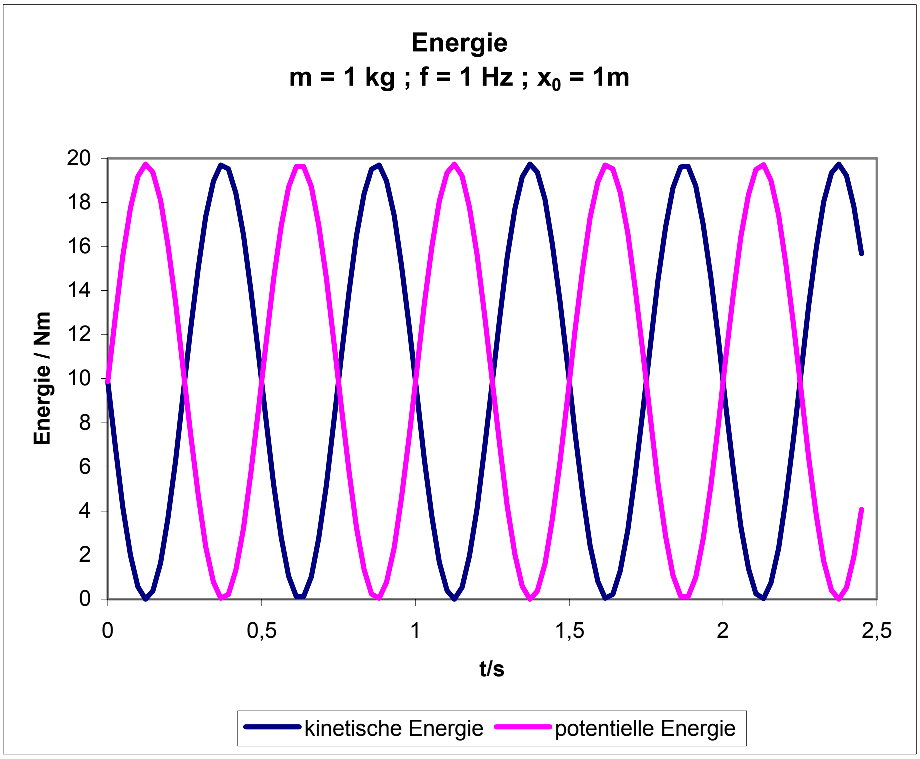
d.h. für den Federschwinger mit $\omega_0 = \sqrt{D/m}$:

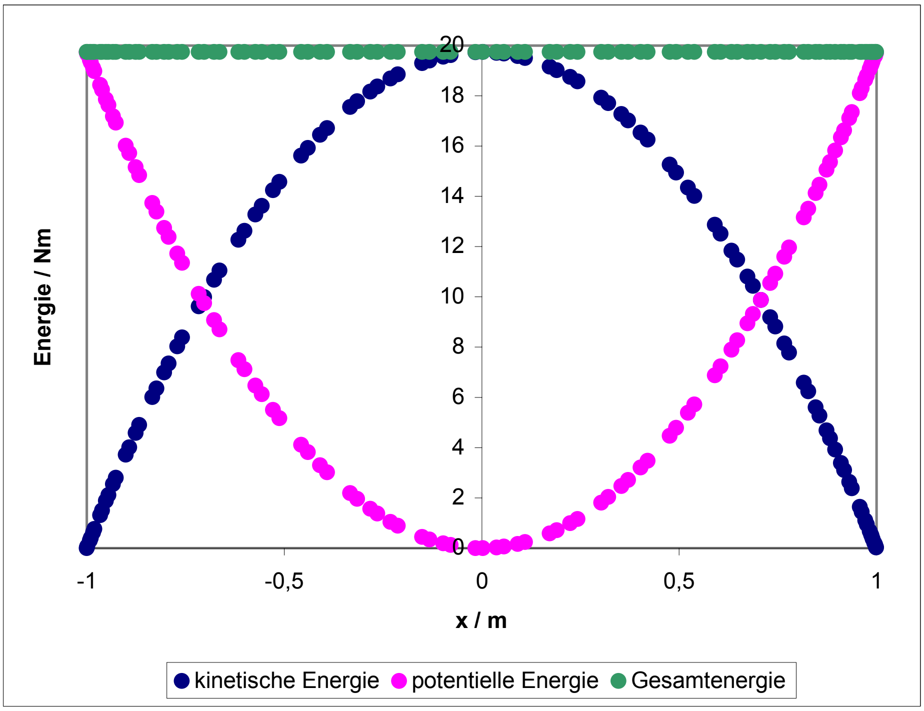
$$E_{ges} = \frac{D}{2}x_0^2$$

und für das mathematische Pendel mit $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ und $x_0 = l\varphi_0$:

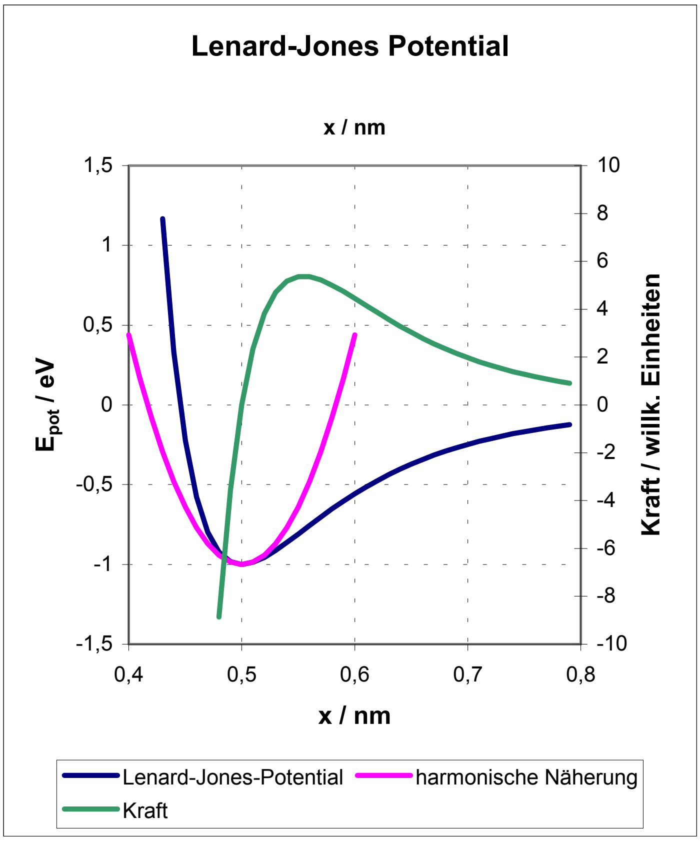
$$E_{ges} = \frac{mgl}{2}\varphi_0^2$$

In den folgenden beiden grafischen Darstellungen ist für die Parameter m = 1 kg, f = 1 Hz (bzw. ω_0 = 6,28.. s^{-1}), x_0 = 1m die kinetische und potentielle Energie in Abhängigkeit von der Zeit sowie von der Auslenkung x dargestellt:





Viele Potentiale, die einen Schwingungsvorgang verursachen, sind nicht harmonisch. In der Nähe eines Potentialminimums kann ein nichtharmonisches Potential jedoch meistens durch eine Parabel angenähert werden. Für kleine Abweichungen aus der Ruhelage ist dann ein solcher Schwingungsvorgang harmonisch – siehe z.B. das Lenard-Jones-Potential:



$$E_{pot} \cong E_0 \left\{ 36 \frac{(x-a)^2}{a^2} - 1 \right\}$$

Das LJP ist quadratisch in den Koordinaten und führt auf eine oszillierende Bewegung um die Gleichgewichtslage x = a mit der Frequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\mu}} = \sqrt{\frac{72E_0}{a^2\mu}}$$

wobei μ die reduzierte Masse der beiden wechselwirkenden Massenpunkte darstellt (siehe später – Rotation starrer Körper).