# Feld und Potential einer homogen geladenen Kugel

Es gilt der Gauß'sche Satz:

$$q = \varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{A}$$

Die Größe q ist dabei die innerhalb der geschlossenen Fläche A befindliche Ladung.

- Außenraum der geladenen Kugel

Wir legen um die Gesamtladung q = Q eine geschlossene Kugelfläche der Oberfläche

$$A = 4\pi r^2$$

Aus Symmetriegründen kann das elektrische Feld nur noch von r abhängen, während dA auch eine Funktion der Winkel $\varphi$ und $\vartheta$ ist:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E}(r) d\vec{A}(\varphi, \theta) = \vec{E}(r) \oint d\vec{A}$$

$$E_a(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Führt man die Volumenladungsdichte

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

ein, so erhält man mittels

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

auch

$$E_a = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

- <u>Innenraum der homogen geladenen Kugel</u>

Tritt man in das Innere der Kugel ein, so ergibt sich die innerhalb der Integrationsfläche befindliche Ladung bei konstanter Ladungsdichte zu

$$q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

mit $r < R$.
Das elektrische Feld im Kugelinneren ergibt sich damit zu

$$E_i = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

bzw.

$$E_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

- <u>Das Potential der geladenen Kugel</u>

Das Potential bzw. die potentielle Energie $\varphi$ der Kugel berechnet man mittels

$$\varphi(r) = -\int \vec{E}(r) d\vec{r}$$

- $r > R$

$$\varphi_a = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r^2} = c + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} = c + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Mit $\varphi(r \to \infty) = 0$ erhält man $c = 0$.

- $r < R$

$$\varphi_i = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r\,dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + c_2$$

Wegen der Stetigkeit des Potentials an der Kugeloberfläche

$$\varphi_i(R) = \varphi_a(R)$$

erhält man für die Integrationskonstante $c_2$:

$$c_2 = \frac{R^2\rho}{2\varepsilon_0}$$

Damit ist das Potential im Innenraum:

$$\varphi_i = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{r^2}{3R^2}\right] = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[1 - \frac{r^2}{3R^2}\right]$$

Mit

$$E_{max} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R \quad \text{und} \quad V_O = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R^2 = E_{max} R$$

erhält man folgende Übersicht:

| | r <= R | r >= R |
|---|---|---|
| E | $E_i = E_{max} \frac{r}{R}$ | $E_a = E_{max} \frac{R^2}{r^2}$ |
| φ | $\varphi_i = \frac{V_O}{2}\left[3 - \frac{r^2}{R^2}\right]$ | $\varphi_a = V_O \frac{R}{r}$ |