Harmonische Wellen

Wir haben Schwingungen als zeitlich periodische Vorgänge behandelt, bei denen eine periodische Umwandlung von potentieller- in kinetische Energie erfolgt. Koppelt man Oszillatoren, so ist eine Ausbreitung von Energie auch im Raum möglich. Eine Erregung, die Energie durch den Raum transportiert, bezeichnet man als Welle. Im engeren Sinne sind Wellen zeitlich und räumlich periodische Vorgänge. Ist der periodische Vorgang auch noch harmonisch, so gelangt man zu folgender Darstellung einer Welle (Wellenfunktion):

$$y = y_0 \sin\left(\omega t + \vec{k}\vec{r} + \alpha\right)$$

Die Bedeutung der einzelnen Größen ist in folgender Tabelle aufgeführt:

$y(t)$	Elongation
y_0	Amplitude
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
f	Frequenz
$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$	Wellenzahl
c	Phasengeschwindigkeit
$\vec{k}$	Wellenzahlvektor || Ausbreitungsrichtung
λ	Wellenlänge
α	Phasenwinkel
$\left(\omega t + \vec{k}\vec{r} + \alpha\right)$	Phase

Im allgemeinen ergibt sich die Wellenfunktion als Lösung der Wellengleichung, der sogenannten d'Alembert-Gleichung, die im eindimensionalen Fall folgendes Aussehen hat:

$$\ddot{y} = c^2 y''$$

Durch Einsetzen des Ausdruckes y(t) für eine harmonische Welle überprüft man mittels

$$\ddot{y} = -\omega^2 y_0 \sin\left(\omega t + \vec{k}\vec{r} + \alpha\right)$$

$$y'' = -k^2 y_0 \sin\left(\omega t + \vec{k}\vec{r} + \alpha\right)$$

dass harmonische Wellen unter der Bedingung

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{bzw.} \quad c = \lambda f$$

eine spezielle Lösung der Wellengleichung sind.

Wir betrachten eine harmonische Welle, die sich in x-Richtung mit der Anfangsphasenlage $\alpha = 0°$ ausbreitet:

$$y = y_0 \sin\left(\omega t + kx\right) = y_0 \sin k\left(x + ct\right)$$

Als *Wellenfront* bezeichnet man eine Fläche gleicher Phase. Sie steht senkrecht auf dem Wellenvektor, d.h. also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Ist diese Fläche eine Ebene, wie in letzter Gleichung beschrieben, so bezeichnet man die Welle als *ebene Welle*.

Ist diese Fläche eine Kugel, so spricht man von *Kugelwelle*, gegebenenfalls auch von einer *Elementarwelle*.
Die folgende Wellenfunktion beschreibt z.B. eine Kugelwelle:

$$p = p_0 \frac{R}{r} \sin(kr + \omega t)$$

Es könnte sich um eine harmonische Druckwelle handeln, deren Druckamplitude radial vom maximalen Wert p_0 invers zum Abstand von einer punktförmigen Quelle (Erregungszentrum bei r = 0) abnimmt. Der momentane Druck ist bei einer gegebenen Phasenlage $(kr + \omega t)$ auf einer Kugelfläche um r = 0 überall gleich groß.

Harmonische Wellen sind *monochromatisch*, d.h. es existiert nur eine einzige Schwingungsfrequenz. Sind die Wellen periodisch, aber nicht harmonisch, so kann ihre Amplitude dargestellt werden als Überlagerung aus harmonischen Wellen verschiedener diskreter Frequenzen. Im allgemeinen muss eine Welle auch nicht periodisch sein. Eine derartige Erregung lässt sich in ein kontinuierliches Spektrum aus harmonischen Wellen mit verschiedener Amplitude zerlegen (Fourierzerlegung):

- Harmonische Wellen sind ***monochromatisch***
  - Harmonische Schallwellen transportieren ***Töne***
- Periodische Wellen besitzen ein ***diskretes Frequenzspektrum***
  - Periodische Schallwellen transportieren ***Klänge***
- Nichtperiodische Wellen besitzen ein ***kontinuierliches Frequenzspektrum***
  - Anharmonische Schallwellen transportieren ***Geräusche***

Im folgenden werden sogenannte ***quasimonochromatische Wellen*** diskutiert, die ein ***schmales Frequenzspektrum*** aufweisen

Quasimonochromatische Wellen

Es sei eine ebene Welle

$$y(t,x) = y_0 \cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

gegeben, die nur für ein Zeitintervall Δt gesendet werde (z.B. eine kurze Lichtwelle). Damit besitzt der *Wellenzug* nur eine endliche Länge. Führt man eine Fourieranalyse durch, so gelangt man zu dem Resultat, dass auch eine derartige Welle nicht mehr vollständig monochromatisch ist. Man bezeichnet eine derartige Welle auch als quasimonochromatisch.

Die Breite des Frequenzspektrums einer quasimonochromatischen Welle kann durch folgende Beziehung ausgedrückt werden:

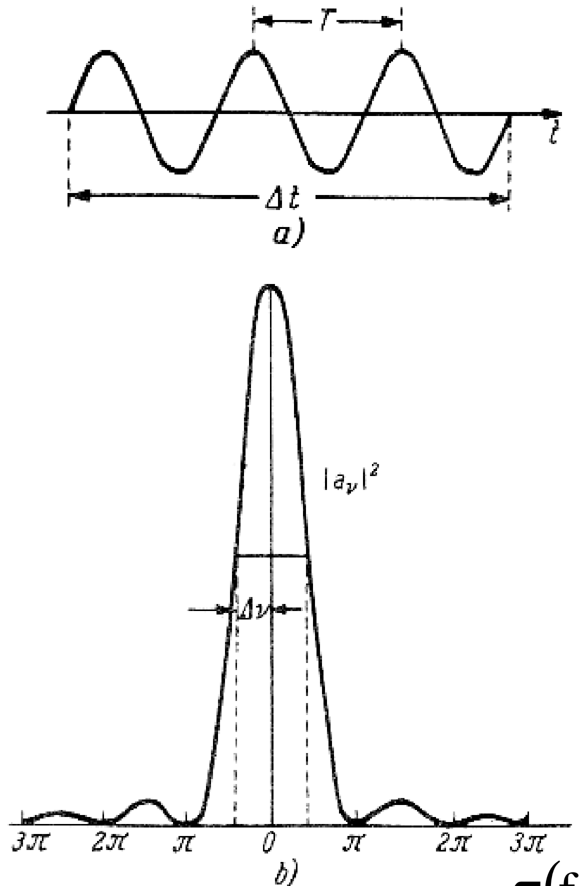
$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 2\pi$$

Analog gilt für einen Wellenzug der Länge Δx:

$$\Delta k \cdot \Delta x \geq 2\pi$$

(Hinweis: In der Quantenmechanik können auch Teilchen als Wellen behandelt werden. Multipliziert man die oberen Gleichungen mit $\hbar = h/(2\pi)$ (h = Planck'sches Wirkungsquantum) und verwendet die in der Quantenmechanik übliche Bezeichnung für den Impuls eines Teilchens $p = \hbar k$ bzw. die Energie $E = \hbar\omega$, so gehen die Gleichungen über in $\Delta E \cdot \Delta t \geq h$ bzw. $\Delta p \cdot \Delta x \geq h$. Diese Relationen sind unter dem Begriff ***Unschärferelation*** bekannt. Sie drücken die Tatsache aus, dass ein Wellenzug ein Energiespektrum (Energieunschärfe) in Abhängigkeit von seiner Lebensdauer bzw. eine Impulsunschärfe in Abhängigkeit von seiner Ausdehnung besitzt.)

Eine grafische Darstellung eines Wellenzuges und seines Frequenzspektrums sieht folgendermaßen aus:



$$\pi(f - f_0)\Delta t$$

Beispielsweise ist ein Laserstrahl quasiharmonisch. Hat ein Laserimpuls die Lebensdauer τ, so ist seine Frequenz- und Energiebreite gegeben durch

$$\Delta f \geq \frac{1}{\tau} \quad \text{bzw.} \quad \Delta E \geq \frac{h}{\tau}$$