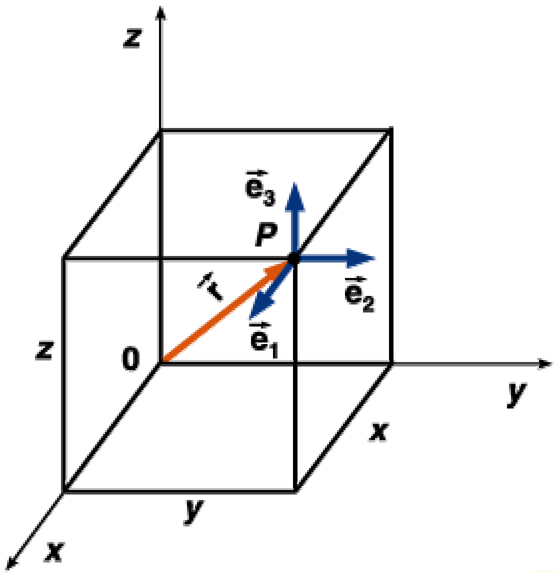
Koordinatensysteme

Kartesische Koordinaten

$$P = (x, y, z)$$



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Betrag des Ortsvektors:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Abstand zwischen zwei Punkten (x_2,y_2,z_2) und (x_1,y_1,z_1):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

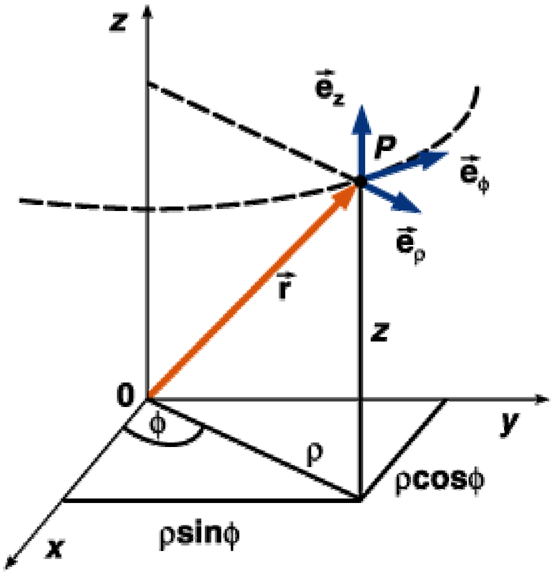
Volumenelement:

$$dV = dxdydz$$

<u>Zylinderkoordinaten</u>

$$P = (\rho, \phi, z)$$

(in der Ebene Polarkoordinaten)



$$\vec{r} = \rho\cos\phi\,\vec{i} + \rho\sin\phi\,\vec{j} + z\vec{k}$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Abstand zwischen zwei Punkten (ρ_2,ϕ_2,z_2) und (ρ_1,ϕ_1,z_1):

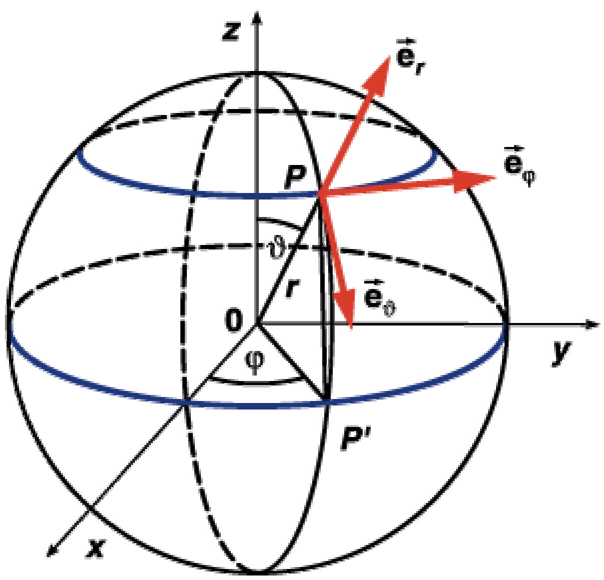
$$d = \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\phi_2 - \phi_1)}$$

Volumenelement:

$$dV = d\rho \cdot \rho d\phi \cdot dz$$

<u>Kugelkoordinaten</u>

$$P = (\varphi, \vartheta, r)$$



$$\vec{r} = r \sin\vartheta \cos\varphi\, \vec{i} + r \sin\vartheta \sin\varphi\, \vec{j} + r \cos\vartheta\, \vec{k}$$

$$\left|\vec{r}\right| = r$$

Zylinderkoordinaten können folgendermaßen in Kugelkoordinaten umgerechnet werden:

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right) \qquad r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \qquad \varphi = \phi$$

Volumenelement:

$$dV = dr \cdot r d\vartheta \cdot r \sin\vartheta d\varphi$$

Koordinatentransformationen

Es seien (x,y,z) die Koordinaten eines beliebigen Punktes bezüglich eines Koordinatensystems A. Wir interessieren uns für die Koordinaten (x',y',z') dieses Punktes, nachdem er um einen Vektor $\vec{r}_T$ verschoben bzw./und um eine vorgegebene Achse gedreht wurde.

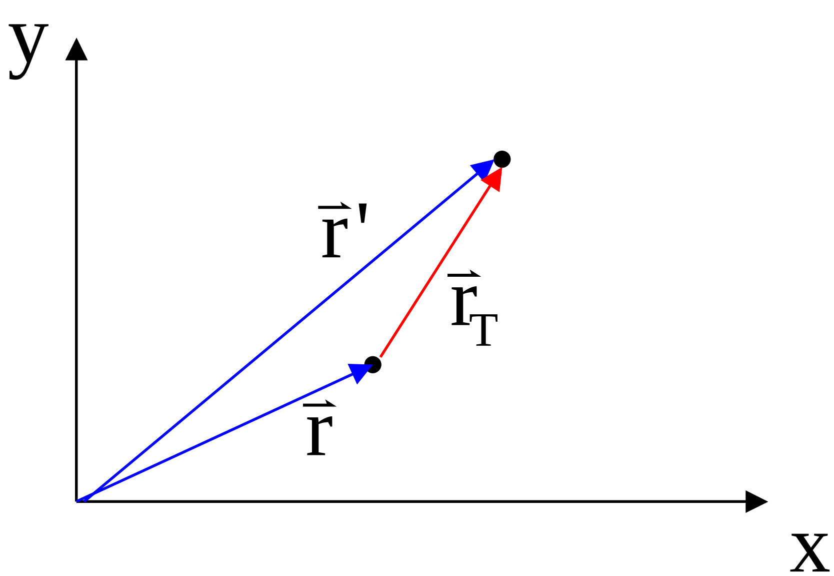
Translation

Der Punkt (x,y,z) werde um den Vektor $\vec{r}_T = (a, b, c)$ von der Position P auf die Position P' verschoben. Dann gilt für die neuen Koordinaten (x',y',z') des Punktes an der Position P':

$$\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{r}_T}$$

Im einzelnen haben wir dann:

$$x' = x + a \qquad y' = y + b \qquad z' = z + c$$



Rotation

Der Punkt P soll um den Winkel ϕ_D verdreht werden. Wir wählen als Rotationsachse die z-Achse. Allgemein können die Koordinaten eines Punktes bezüglich der gegeneinander verdrehten Systeme durch eine Gleichung der Form

$$\boxed{\vec{r}\,' = \hat{D} * \vec{r}}$$

ineinander überführt werden. Hier ist $\hat{D}$ die Transformationsmatrix, welche die Koordinaten eines Punktes $\vec{r}$ bezüglich des ruhenden Systems A vor der Drehung in die Koordinaten $\vec{r}\,'$ nach der Drehung transformiert. Für die Berechnung der neuen Koordinaten $\vec{r}\,'$ aus den alten $\vec{r}$ gilt:

$$\boxed{\hat{D} = \begin{pmatrix} \cos\phi_D & -\sin\phi_D & 0 \\ \sin\phi_D & \cos\phi_D & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ausmultipliziert erhalten wir:

$$x' = x\cos\Phi_D - y\sin\Phi_D \qquad y' = x\sin\Phi_D + y\cos\Phi_D \qquad z' = z$$

In Zylinderkoordinaten gilt einfacher:

$$\Phi' = \Phi + \Phi_D \quad ; \quad \rho' = \rho \quad ; \quad z' = z$$

Umgekehrt kann man natürlich auch den Übergang von $\vec{r}\,'$ nach $\vec{r}$ berechnen, wenn die Koordinaten bezüglich des verdrehten Systems B bekannt sind:

$$\boxed{\vec{r} = \hat{D}' * \vec{r}\,'}$$

Für D’ gilt dann:

$$\hat{D}' = \begin{pmatrix} \cos\phi_D & \sin\phi_D & 0 \\ -\sin\phi_D & \cos\phi_D & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = x'\cos\Phi_D + y'\sin\Phi_D \qquad y = -x'\sin\Phi_D + y'\cos\Phi_D \qquad z = z'$$

Zusammengesetzte Transformationen

Im allgemeinen Fall kann eine Transformation in eine Translation und eine Drehung zerlegt werden.

Aufeinanderfolgende Koordinatentransformationen sind i.a. in der Reihenfolge durchzuführen, wie sie stattgefunden haben. Insbesondere dürfen mehrere Drehungen nicht in ihrer Reihenfolge vertauscht werden.

Wird ein Punkt zuerst um die z-Achse verdreht und dann verschoben, so erhält man:

$$\vec{r}_B{}' = \hat{D} * \vec{r}_A + \vec{r}_T$$

Wird der Punkt P zuerst verschoben und danach um die z-Achse gedreht, so gilt:

$$\vec{r}\,'_B = \hat{D} * (\vec{r}_A + \vec{r}_T)$$

Wenn sich ein Punkt P bewegt, ändern sich die Größen ϕ_D und $\vec{r}_T$ mit der Zeit.