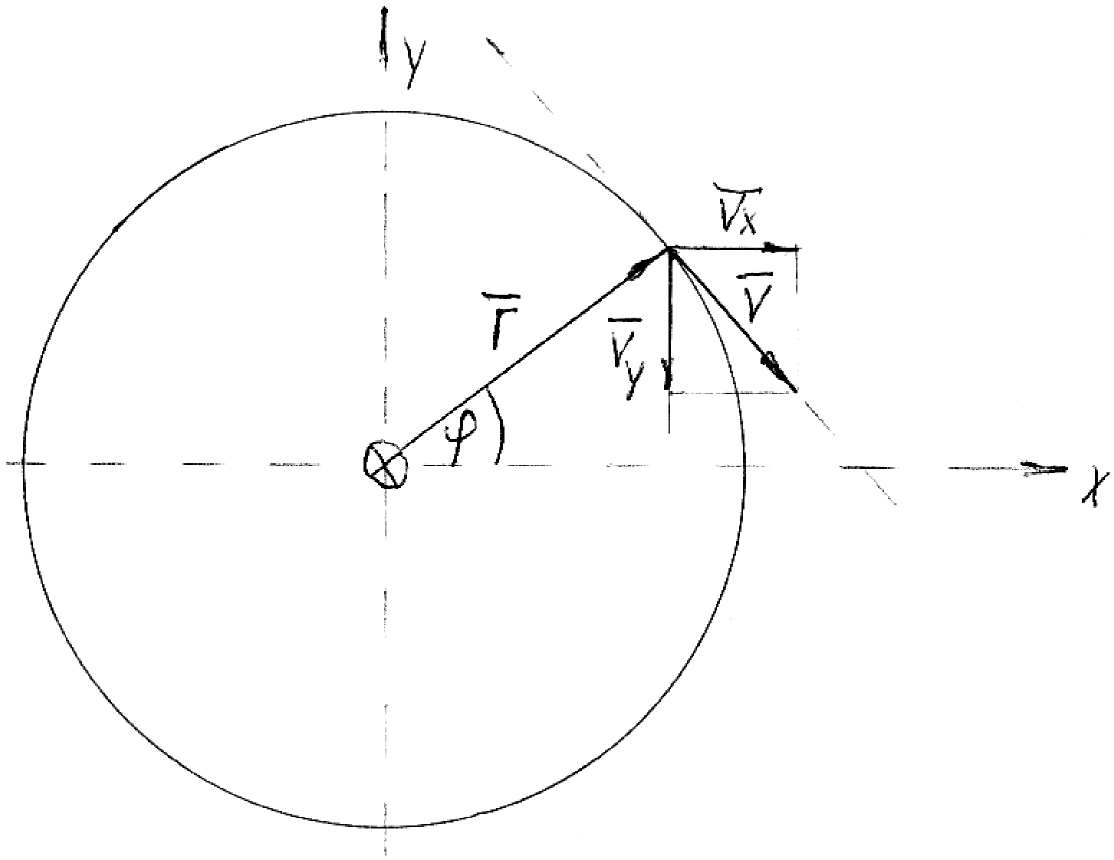
Kreisbewegung



Bahnkurve

Kartesische Koordinaten		$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$
Polarkoordinaten	Radius	$r(\varphi) = R = const.$
	Bahnlänge	$s = R\varphi$
		$x = R\cos\varphi \quad y = R\sin\varphi$

Bahn(Tangential)geschwindigkeit

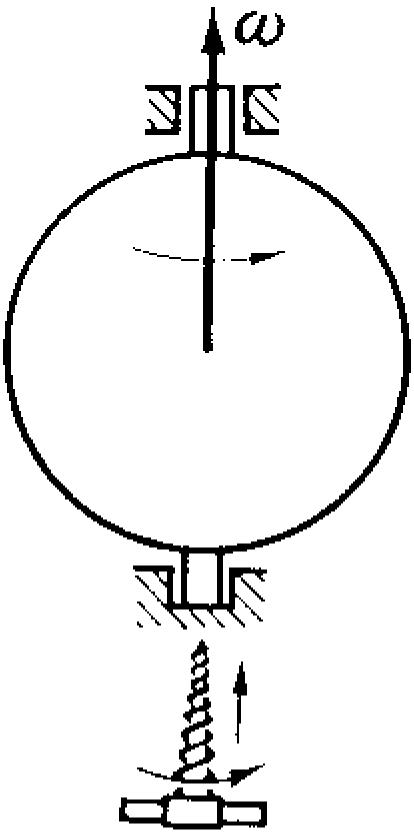
Kartesische Koordinaten	$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$
Polarkoordinaten	$v = \frac{d\varphi}{dt} R = \omega R$
	$\dot{x} = -\dot{\varphi} R \sin\varphi \quad \dot{y} = \dot{\varphi} R \cos\varphi$

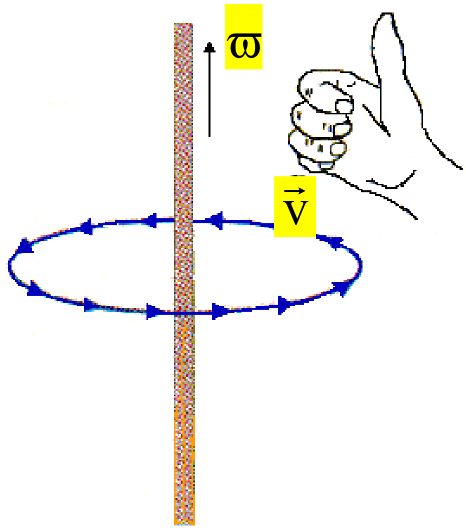
Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \dot{\varphi}$$

Maßeinheit: $rad \cdot s^{-1}$

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist parallel zur Rotationsachse (axialer Vektor) und senkrecht zur Bahnebene gerichtet. Er steht damit senkrecht auf dem Radiusvektor und senkrecht zum Vektor der Tangentialgeschwindigkeit. Anschaulich kann seine Richtung durch die Bewegungsrichtung einer Schraube mit Rechtsgewinde beschrieben werden. Die rechte Daumen-Regel gilt analog.





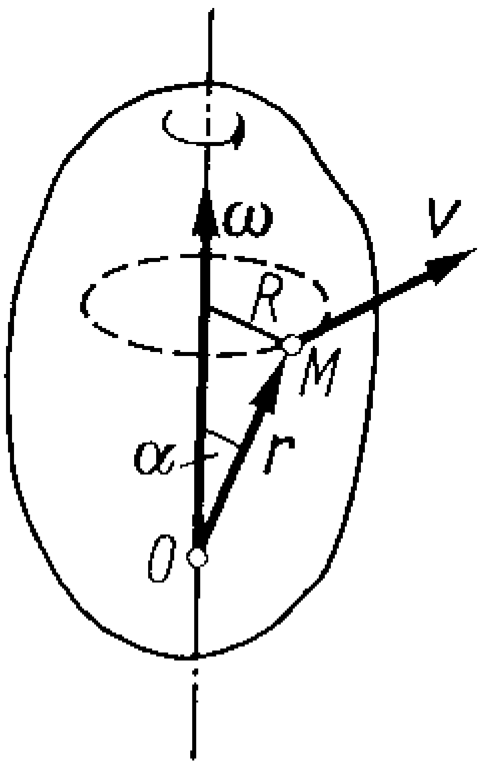
Die Winkelgeschwindigkeit ω (Winkeldifferenz pro Zeiteinheit) heißt auch Kreisfrequenz. Sie kann aus der Frequenz f (Umdrehungen pro Zeiteinheit) mittels $\omega = 2\pi f$ berechnet werden.

Der Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit, Bahngeschwindigkeit und Radiusvektor wird durch die Eulergleichung beschrieben:

Eulergleichung

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$v = \omega r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega r \sin \alpha$$



Diskussion der Eulergleichung

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Die Beschleunigung erhält man aus der ersten Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit:

$$\vec{a} = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

Einsetzen der Eulerbeziehung für $\dot{\vec{r}}$ ergibt für die Gesamt- oder Linearbeschleunigung:

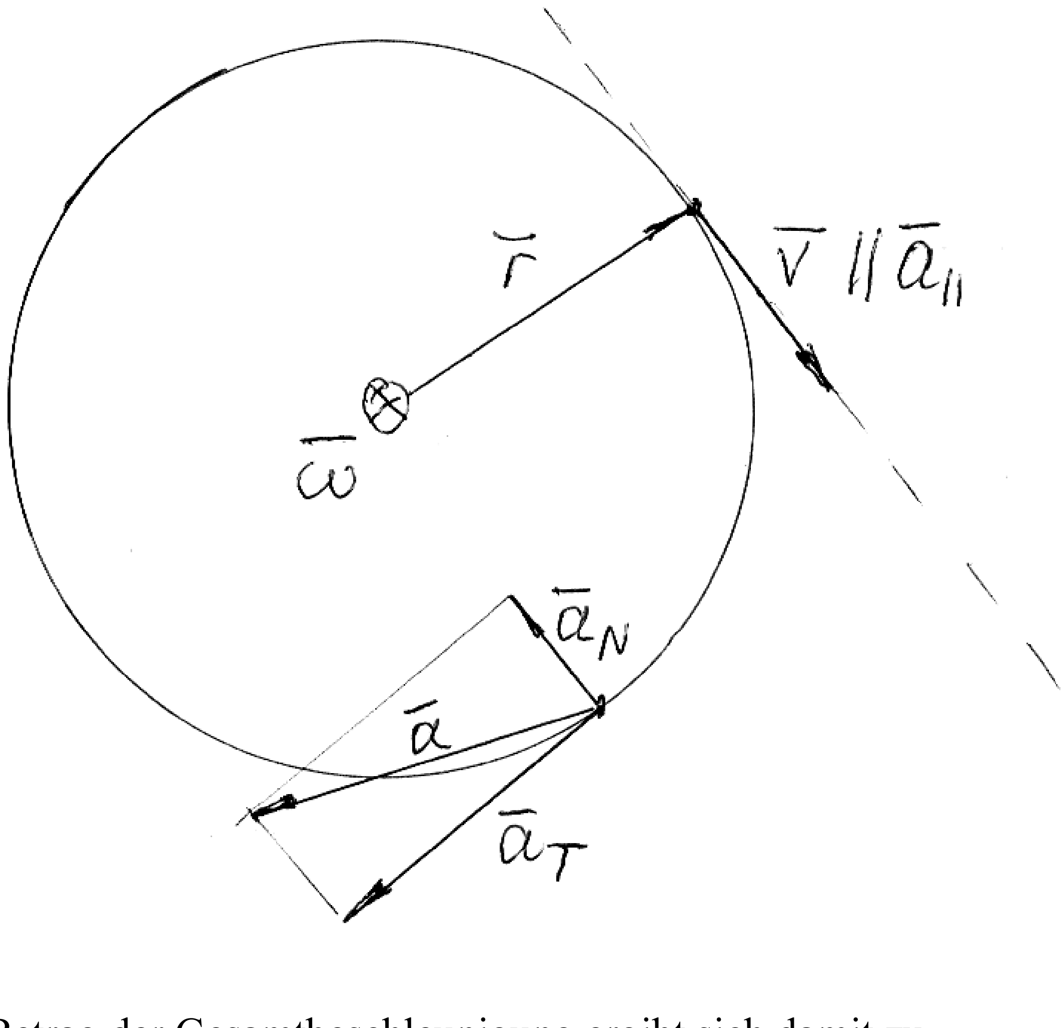
$$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

Die einzelnen Größen haben folgende Bedeutung:

Winkelbeschleunigung	$\dot{\vec{\omega}} = \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Tangential- oder Azimutalbeschleunigung	$\vec{a}_T = \vec{a}_{\|} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$
Normal-, Radial- oder Zentripetalbeschleunigung	$\vec{a}_N = \vec{a}_{\perp} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
Gesamtbeschleunigung	$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2}$

Die oberen Gleichungen gelten unter der Voraussetzung, dass ein Massenpunkt im rotierenden Bezugssystem ruht.

In der folgenden Grafik sind die einzelnen Komponenten der Beschleunigung dargestellt:



Der Betrag der Gesamtbeschleunigung ergibt sich damit zu

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2}$$

Gleichförmige Kreisbewegung

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt$$

Wegen $\omega(t) = \omega = \text{const.}$ folgt:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega t - \omega t_0$$

Für einen vollen Umlauf gilt: $\Delta\varphi = 2\pi \qquad \Delta t = T$

und damit

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

bzw. mit der Frequenz

$$f = \frac{1}{T}$$

auch

$$\omega = 2\pi f$$

Die Kreisbewegung mit konstanter Bahngeschwindigkeit $v = \omega R$ ist eine beschleunigte Bewegung. Um die Kreisbewegung aufrecht zu erhalten, muss eine zum Zentrum hin gerichtete Kraft aufgewandt werden – die Zentripetalkraft. Für den Betrag der Zentripetalkraft gilt (siehe oben):

$$F_N = m\omega^2 R = m\frac{v^2}{R}$$

Da sich die Richtung der Kraft laufend ändert, ist die Kreisbewegung eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Die gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung

Spricht man von der gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung, so ist damit eine Kreisbewegung mit konstanter Winkelbeschleunigung gemeint. Wie oben bereits diskutiert wurde, ist bereits die gleichförmige Kreisbewegung ungleichmäßig beschleunigt.

Aus

$$\dot{\omega} = \varepsilon = \text{const.}$$

folgt mit

$$\omega = \int \varepsilon \, dt$$

die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \varepsilon t + \omega_0$$

Weiterhin erhält man mit

$$\varphi = \int \omega(t) dt = \int (\varepsilon t + \omega_0) dt$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

Die Radialgeschwindigkeit ist gleich Null, die Radialbeschleunigung ist gleich der Zentripetalbeschleunigung.

Beispiel Hammerwerfer

Eine Masse von $m = 7{,}2$ kg werde auf einem Radius von $R = 2$m gleichmäßig beschleunigt und unter dem Winkel $\varphi = 45°$ (maximale Reichweite) zur Vertikalen losgelassen. Die maximale Rotationsfrequenz von $f_{max} = 2s^{-1}$ wird nach $n = 3$ Umdrehungen erreicht.

- Bahngeschwindigkeit und Wurfweite

  Die maximale momentane Bahngeschwindigkeit wird nach 3 Umdrehungen am Ende der Beschleunigungsphase erreicht:

$$v_{max} = \omega_{max} R = 2\pi f_{max} R = 25{,}1\ \mathrm{m/s}$$

  Die erreichbare Wurfweite beträgt somit

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g} = 64{,}4\ \mathrm{m}$$

- Normalbeschleunigung und Zentripetalkraft

  Die maximale Radialbeschleunigung folgt aus

$$a_N = \omega^2 R = 4\pi^2 f^2 R = 315{,}8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

  Die maximal aufzuwendende Normalkraftkomponente, um die Masse auf der Kreisbahn zu halten, beträgt damit

$$F_N = m a_N = 2463{,}4\mathrm{N}$$

- <u>Winkel-, Bahn- und Gesamtbeschleunigung</u>

Voraussetzung: $\dot{\omega} = \varepsilon = \text{const.} \quad \Rightarrow$

$$\omega = \varepsilon t \quad \omega_0 = 0$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{2} t^2 \quad \varphi_0 = 0$$

Eliminiert man aus den beiden letzten Gleichungen t, so folgt:

$$\varepsilon = \frac{\omega(t)^2}{2\varphi(t)}$$

Am Ende der Beschleunigungsphase erhält man mit

$$\omega_{max} = 2\pi f_{max} = 4\pi \text{ s}^{-1} \qquad \varphi_{max} = 2\pi n = 6\pi$$

eine Winkelbeschleunigung von

$$\varepsilon = 4{,}18 \text{ s}^{-2}$$

Daraus folgt eine Tangentialbeschleunigung von

$$a_T = \varepsilon R = 8{,}36 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Damit folgt eine Gesamtbeschleunigung von

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 316 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$