Zur Newton'schen Bewegungsgleichung

Im (statischen wie dynamischen) Gleichgewicht gilt:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

Spezialfall zweier Kräfte:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Im statischen Fall besteht z.B. Gleichgewicht zwischen dem Gewicht eines Körpers G = mg (Aktionskraft) und der elastischen Gegenkraft der Unterlage (Reaktionskraft).
Im dynamischen Fall steht die Aktionskraft (z.B. beschleunigende Gravitationskraft) im Gleichgewicht mit der Reaktionskraft

$$\vec{F} = -m\frac{d^2r(t)}{dt^2}$$

Man kann die Kraft F als Trägheitskraft auffassen, die ein Körper einer Änderung seines Bewegungszustandes entgegensetzt.

Beispiel Federschwinger

Die Trägheitskraft steht im Gleichgewicht mit
a) der Gewichtskraft mg
b) der rücktreibenden elastischen Federkraft -Dx

Im eindimensionalen Fall $\vec{F} \parallel \vec{i}$ erhalten wir

$$-Dx + mg - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Wir versuchen diese Bewegungsgleichung (eine Differentialgleichung zweiter Ordnung)zu lösen. Gesucht ist der Zusammenhang x(t).

I - Eine spezielle Lösung (statischer Fall)

Im statischen Fall ist v = 0. Damit vereinfacht sich die Beziehung zu:

$$0 = -Dx + mg$$

Wir erhalten daraus die spezielle Lösung $x = x_1$:

$$x_1 = mg/D$$

Diese Lösung gibt die Ausdehnung der Feder für eine Belastung mit einem bestimmten Gewicht an. Die Dehnung hängt von der Schwere-beschleunigung g ab.

II - Eine Lösung für den dynamischen Fall

Wir lösen die (homogene) Differentialgleichung für den Fall $g = 0$, d.h. weitab von irgendeinem Schwerefeld:

$$m\,[\,d^2x(t)/dt^2\,] = -Dx$$

Mit dem Lösungsansatz

$$x = x_o = x_A \sin(\omega t)$$

erhält man nach dem Einsetzen in die Ausgangsgleichung:

$$-m\omega^2 x_A \sin\omega t + D x_A \sin\omega t = 0$$

Nachdem die letzte Gleichung vereinfacht und nach ω umgestellt ist:

$$\omega^2 = D/m$$

Die Lösung lautet somit

$$x_0 = x_A \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t\right)$$

Die letzte Gleichung beschreibt eine schwingende Feder mit der Amplitude x_A und der Frequenz

$$f = \frac{\sqrt{D/m}}{2\pi}$$

Die Feder schwingt also auch abseits von Schwerefeldern aufgrund der Wirkung der rücktreibenden Kraft –Dx.

III - Allgemeine Lösung

Die Theorie der linearen Differentialgleichungen sagt aus, dass sich die allgemeine Lösung aus der Summe der Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung ergibt, also:

$$x(t) = x_o + x_1$$

Damit haben wir

$$\boxed{x(t) = x_A \sin\left[\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\right)t\right] + \frac{mg}{D}}$$

Die Gültigkeit dieser Lösung kann leicht durch Einsetzen in die Differentialgleichung verifiziert werden.
Die Feder schwingt also um die (statische) Ruhelage $x_1 = mg/D$ mit der Kreisfrequenz $\omega^2 = D/m$ und der Amplitude x_A.
Die Amplitude x_A ergibt sich aus der in der Feder gespeicherten Energie (hierzu später mehr).