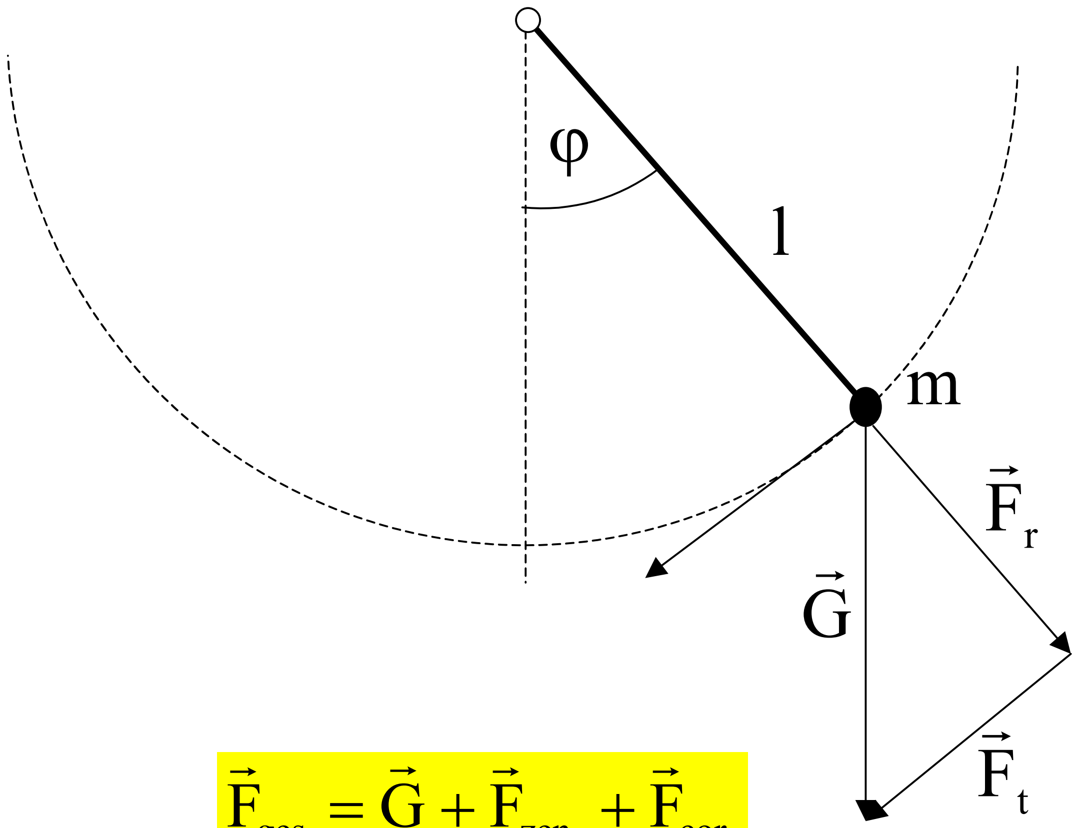
Das Mathematische Pendel



$$\vec{F}_{ges} = \vec{G} + \vec{F}_{zen.} + \vec{F}_{cor.}$$

$$\vec{G} = \vec{F}_t + \vec{F}_r = mg\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi + mg\cos\varphi\,\vec{e}_r$$

$$\vec{F}_{zen.} = m\omega^2 l\,\vec{e}_r$$

$$\vec{F}_{cor.} \perp \vec{e}_\varphi \qquad \vec{F}_{cor.} \perp \vec{e}_r$$

Tangentialkomponente $\vec{F}_t$

Die Anwendung der Newton'schen Bewegungsgleichung liefert

$$mg\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi + ma_\varphi\vec{e}_\varphi = 0$$

Die Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_\varphi = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ hängt mit der Winkelbeschleunigung über den Kreisradius l (Pendellänge) zusammen:

$$a_\varphi = l\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Damit erhalten wir eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die gesuchte Funktion $\varphi(t)$:

$$g\sin\varphi + l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

Die Sinusfunktion kann in eine Taylorreihe entwickelt werden:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Für kleine Winkel $\varphi < 5°$ ist es meistens mit hinreichender Genauigkeit möglich, die Reihenentwicklung nach dem ersten Glied abzubrechen und den $\sin\varphi$ durch φ zu ersetzen, so dass gilt:

$$g\varphi + l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

Dies ist die bekannte Schwingungsgleichung für ein mathematisches Pendel. Wir lösen diese Gleichung mit dem Ansatz

$$\varphi = \varphi_0 \sin\omega_0 t$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

bzw. die Schwingungsdauer

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Für $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ ist der Lösungsansatz $\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t$ eine Lösung der Schwingungsgleichung $\ddot{\varphi} + (l/g)\varphi = 0$. In der allgemeinen Form

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0}$$

ist diese Differentialgleichung auf verschiedene Vorgänge anwendbar, denen eine ungedämpfte, freie Schwingung entspricht.
In Anwendung auf das mathematische Pendel hat die Tangentialkraft $\vec{F}_t$ die bekannte Pendelbewegung mit der Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ zur Folge.

Diskussion der Schwingungsamplitude

Mit $\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t$ erhält man für die Winkelgeschwindigkeit des Pendels

$$\omega = \dot{\varphi} = \varphi_0 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

Wegen $v = \dot{\varphi} l$ (Eulergleichung) erhält man für die Tangentialgeschwindigkeit

$$v = \varphi_0 \omega_0 l \cos \omega_0 t$$

Im tiefsten Punkt hat das Pendel die maximale Geschwindigkeit

$$v_{max} = \varphi_0 \omega_0 l = \varphi_0 \sqrt{gl}$$

Andererseits gilt wegen der Erhaltung der mechanischen Energie mit

$$E_{ges} = \frac{m}{2} v_{max}^2 = mgh$$

auch

$$v_{max} = \sqrt{2gh}$$

Durch Vergleich beider Beziehungen folgt also für die maximale Auslenkung

$$\varphi_0 = \sqrt{2h/l} = \sqrt{2E_{ges}/mgl}$$

wenn h die Höhe ist, auf die das Pendel zu Beginn des Schwingungsvorganges angehoben wurde.

Radialkomponente $\vec{F}_r$

Die Radialkomponente bestimmt die Belastung der Pendelaufhängung. Mit

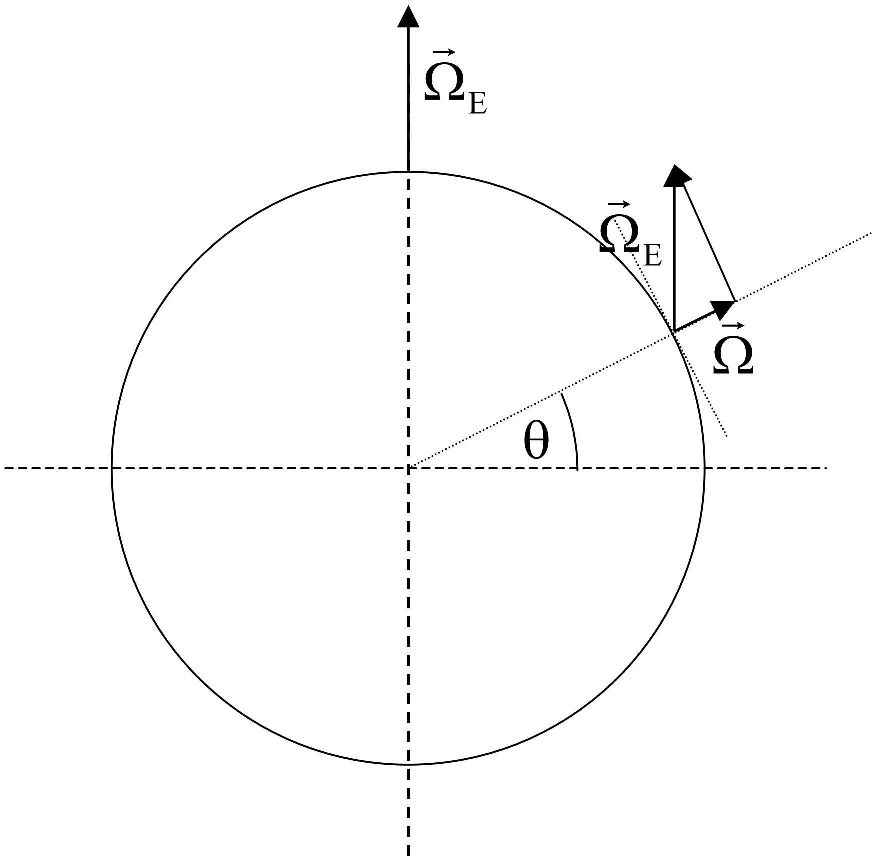
$$\vec{F}_r = mg\cos\varphi\,\vec{e}_r + m\dot{\varphi}l\vec{e}_r$$

setzt sich die Radialkraft aus einer Schwerkraftkomponente und einer Fliehkraftkomponente zusammen. Beschränkt man sich auf kleine Winkel ($\cos\varphi \approx 1$) erhält man mit $\omega = \dot{\varphi} = \varphi_0 \omega_0 \cos\omega_0 t$ eine Radialkraft

$$F_r = mg + m\varphi_0^2 g\cos^2\omega_0 t$$

Drehung der Pendelebene (Foucault – Pendel) $\vec{F}_{cor.}$

Aufgrund seiner Trägheit behält ein Pendel die Lage seiner Schwingungsebene bezüglich eines Inertialsystems (Fixsternhimmel) bei, während die Erde rotiert. Dies führt zu einer Drehung der Pendelebene bezüglich der Erdoberfläche. Am Nordpol dreht sich die Pendelebene genau einmal pro Tag bezüglich der Erdoberfläche. An einem beliebigen Breitengrad muss man den Vektor der Winkelgeschwindigkeit der Erde zerlegen:



$$\Omega = \Omega_E \sin\theta$$

Nordpol	$\Omega = \Omega_E$
Äquator	$\Omega = 0$
Südpol	$\Omega = -\Omega_E$