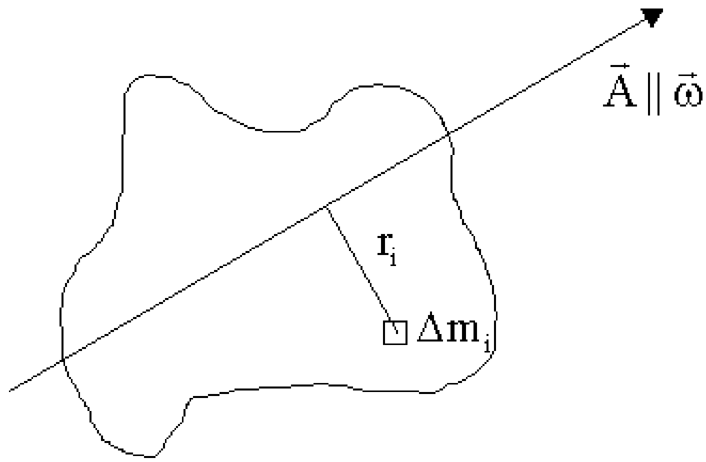
Das Trägheitsmoment

Ein Körper rotiert um eine Achse A. Welche Bewegungsenergie hat er gespeichert?



Wir zerlegen den Körper in Massenelemente Δm_i . Jedes Massenelement, das im Abstand r_i um die Achse A mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, hat die Energie

$$E_{kin,i} = \frac{\Delta m_i}{2} v_i^2 = \frac{\Delta m_i}{2} r_i^2 \omega^2$$

Aufsummation aller Beiträge ergibt die Rotationsenergie

$$E_{rot} = \sum_i E_{kin,i} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i r_i^2 \Delta m_i$$

Im Falle kontinuierlicher Massenverteilungen geht man von der Summe zum Integral über:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \int_M r^2 dm$$

Das Integral

$$I = \int_M r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV$$

bezeichnet man als Massenträgheitsmoment eines Körpers bezüglich seiner Rotationsachse A. Damit kann die Rotationsenergie ausgedrückt werden als

$$E_{rot} = I \frac{\omega^2}{2}$$

Die Berechnung eines beliebigen Trägheitsmomentes kann mit Hilfe des Steiner'schen Satzes auf die Berechnung des Trägheitsmomentes bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt zurückgeführt werden:

Das Trägheitsmoment eines Körpers bei Rotation um eine beliebige Achse B ist gleich dem Trägheitsmoment des Körpers bei Rotation um eine zu B parallele Achse, die durch den Schwerpunkt verläuft, zuzüglich des Trägheitsmomentes der im Schwerpunkt vereinigten Masse bei Rotation um B.

Es sei $I_{SP} = \int_M r^2 dm$ das Trägheitsmoment bei Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt. Weiterhin sei a der Abstand zwischen der Achse B und der Achse durch den Schwerpunkt und $R = r_B = r+a$. Dann gilt:

$$I_B = \int_M R^2 dm = \int_M (r+a)^2 dm = \int_M r^2 dm + \int_M a^2 dm + \int_M (2ra)\, dm$$

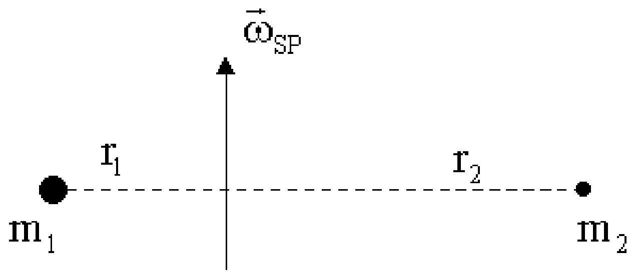
Wegen $2a \int_M r dm = 2ar_s = 0$ (r_s – Schwerpunktkoordinate) gilt:

$$I_B = \int_M r^2 dm + \int_M a^2 dm + 2a \int_M r dm = I_{SP} + \int_M a^2 dm = I_{SP} + a^2 M$$

Für diskrete Massenverteilungen (insbesondere Punktmassenverteilungen) muss summiert werden:

$$I = \sum_{i=1}^{N} r_i^2 m_i$$

Beispiel: Trägheitsmoment eines zweiatomigen Moleküls bei Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt



$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

Durch Erweitern mit dem Faktor ($m_1 + m_2$) formt man den Ausdruck um in

$$I = \mu R^2 = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (r_1 + r_2)^2$$

Hierin bedeuten μ die reduzierte Masse und $R = r_1 + r_2$ den Abstand der Atome im Molekül.