

## Energie und Impuls einer Welle

Es sei die Wellenfunktion einer harmonischen Welle gegeben zu

$$y(t) = y_0 \sin(\vec{k}\vec{r} + \omega t)$$

Die Elongation  $y(t)$  bezeichnet die momentane Auslenkung eines Oszillators des Wellenfeldes am Ort  $\vec{r}$ . Die erste Ableitung nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit des einzelnen Oszillators (nicht die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle) am Ort  $\vec{r}$  zum Zeitpunkt  $t$  zu

$$\dot{y}(t) = v(t) = \omega y_0 \cos(\vec{k}\vec{r} + \omega t)$$

mit der Geschwindigkeitsamplitude

$$v_0 = \omega y_0$$

und einer Phasenverschiebung von  $90^\circ$  zwischen Auslenkungs- und Geschwindigkeitsamplitude.

Analog erhält man die Beschleunigungsamplitude zu

$$a_0 = \omega^2 y_0$$

**Energiedichte – [J/m<sup>3</sup>] oder [N/m<sup>2</sup>]**

Für die Energie eines Oszillators der Masse  $m$  erhält man  $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{kin-max}}$ :

$$E = \frac{m}{2} v_0^2$$

Bezeichnet man mit  $w$  die Energiedichte entsprechend

$$w = \frac{dE}{dV}$$

so erhält man

$$w = \frac{\rho}{2} v_0^2 = \frac{\rho}{2} \omega^2 y_0^2 = p_{\text{str}}$$

Da die Energiedichte einem Druck äquivalent ist, spricht man auch vom Strahlungsdruck  $p_{\text{str}}$ .

Punkte gleicher Phasenlage breiten sich mit der Phasengeschwindigkeit  $c$  im Raum aus. Interessiert man sich für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Energie, gelangt man zum Begriff der

### **Intensität oder Energiestromdichte [J/(m<sup>2</sup>s)]**

Unter momentaner Intensität versteht man die Energiemenge, die sich je Zeiteinheit durch ein Flächenelement bewegt:

$$I = \frac{dE}{dt dA}$$

Daraus folgt mittels der Energiedichte  $w$ :

$$I = \frac{dE}{dt dA} = w \frac{dV}{dt dA} = w \frac{dl dA}{dt dA} = w \frac{dl}{dt} = w v_{\text{Gr}}, \text{ also}$$

$$I = w v_{\text{Gr}}$$

Die Größe  $v_{\text{Gr}}$  bezeichnet man allgemein als Gruppengeschwindigkeit – es ist die Geschwindigkeit, mit der sich eine bestimmte Energiemenge der Welle im Raum ausbreitet. (Ist eine Welle nichtharmonisch, so ist sie auch nicht monochromatisch. Die Welle lässt sich dann als Superposition von harmonischen Wellen darstellen, die man als Wellengruppe oder auch Wellenpaket bezeichnet.) Man erhält die Gruppengeschwindigkeit (Geschwindigkeit der Ausbreitung des Schwerpunktes des Wellenpaketes) mittels der Relation

$$v_{\text{Gr}} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Im Falle harmonischer Wellen wird sich die Energie mit derselben Geschwindigkeit im Raum ausbreiten, wie die Geschwindigkeitsamplitude. Der Geschwindigkeitsamplitude entspricht in unserem Fall die Phasenlage  $\pi/2$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet. Für die Intensität erhält man dann:

$$I = w c = p_{\text{Str}} c$$

Man überzeugt sich leicht, dass wegen  $c = \omega/k$  die Gruppengeschwindigkeit einer harmonischen Welle mit der Phasengeschwindigkeit übereinstimmt. Da der Momentanwert der Intensität einer harmonischen Welle zeitabhängig ist, definiert man die Intensität auch als Mittelwert der sich durch einen Flächenquerschnitt je Periode bewegendes Energiemenge, also

$$\hat{I} = \frac{c}{T} \int_0^T w(t) dt$$

Während die Intensität einer Energiestromdichte entspricht, kann der Strahlungsdruck auch als Impulsstromdichte geschrieben werden.

### Strahlungsdruck oder Impulsstromdichte

Die Größe

$$p_{\text{Str}} = \frac{I}{c}$$

hat die Dimension Kraft je Flächeneinheit. Die Kraft selbst ist nichts anderes, als ein Impulsstrom ( Impuls je Zeiteinheit). Damit ist der Strahlungsdruck eine Größe mit der Dimension Impuls je Flächen- und Zeiteinheit.

Will man die Kraftwirkung einer Welle auf eine Fläche A bestimmen, so gilt

$$F = \frac{I}{c} A = p_{\text{Str}} A$$

bei vollständiger Absorption der Wellenenergie (unelastischer Stoß: z.B. Absorption einer Lichtwelle durch schwarze Fläche) bzw.

$$F = 2 \frac{I}{c} A = 2 p_{\text{Str}} A$$

im Falle der elastischen Reflexion der Welle (vergleichbar etwa mit Reflexion eines Balles von einer harten Wand oder der Reflexion einer Lichtwelle von einer weißen Fläche).

