Inhaltsverzeichnis

1 Versuchsbeschreibung und Physikalische Grundlagen

Im zu bearbeitenden Experiment sollen der Innenwiderstand eines Volt-, sowie eines Amperemeters bestimmt werden. Dazu werden im ersten Teil des Versuchs verschiedene Widerstände in Reihe zum Voltmeter geschaltet, bei konstanter Betriebsspannung U_B die am Innenwiderstand abfallende Spannung U_V gemessen und aus der Beziehung der Größen per Regression der Innenwiderstand ermittelt. Der zweite Teil des Versuches besteht aus der Parallelschaltung der variablen Widerstände zum Messgerät. In Abhängigkeit dieser Widerstände wird dann der am Innenwiderstand R_A des Amperemeters herrschende Strom I_A gemessen. Wiederum wird dann durch eine Regression der Innenwiderstand ermittelt.
Eine detaillierte Versuchsbeschreibung findet sich in [1], S.6-8.

2 Ermittlung der Innenwiderstände und Betriebsgrößen

2.1 Innenwiderstand des Voltmeters und Betriebsspannung

2.1.1 Messunsicherheiten

Der Ablesefehler des Voltmeters beträgt $e_{z,U} = 0.2\,\mathrm{V}$. Nach Angaben des Herstellers ist jeder Wert zusätzlich mit einem systematischen Fehler von 2.5% des Messbereichs behaftet. Da der Messbereich stets bei $U_\mathrm{max} = 25\mathrm{V}$ lag, ist der systematische Fehler $e_{z,U} = 0.6\mathrm{V}$. Die Messunsicherheit der Spannung beträgt damit

$$\begin{aligned} u_U &= \sqrt{e_{z,U}^2 + e_{s,U}^2} \\ &= 0.7\,\mathrm{V}. \end{aligned}$$

Die verwendeten Widerstände sind nach [2], S.19 mit einer Unsicherheit von

$$u_R = 0.02\,\Omega + 0.0003 \cdot R.$$

behaftet. Der relative Fehler besitzt demnach eine Größe von

$$\frac{u_R}{R} = \left(\frac{2\,\Omega}{R} + 0.03\right)\%.$$

Da die Widerstände im Bereich von $0.5\,\mathrm{k\Omega} < R < 50\,\mathrm{k\Omega}$ varriieren, sind die relativen Unsicherheiten stets $\leq 0.04\%$ und damit vernachlässigbar.

2.1.2 Messwertaufnahme und Regression

Nun wurden in Abhängigkeit der zugeschalteten Widerstände R_x die am Voltmeter abfallende Spannung U_V gemessen. Die am Spannungserzeuger angezeigte Betriebsspannung betrug

$$U_\mathrm{B} = (19.6 \pm 0.1)\,\mathrm{V}.$$

Für die Schaltung in [1], S.8, Abb.2a ist der Strom am Innenwiderstand R_V gleich groß mit dem Gesamstrom. Es gilt

$$\begin{aligned} I_\mathrm{V} &= I_0 \\ \frac{U_\mathrm{V}}{R_\mathrm{V}} &= \frac{U_\mathrm{B}}{R_\mathrm{V} + R_\mathrm{x}} \\ \frac{1}{U_\mathrm{V}} &= \frac{1}{U_\mathrm{B}} \frac{R_\mathrm{x}}{R_\mathrm{V}} + \frac{1}{U_\mathrm{B}}. \end{aligned}$$

Die gemessenen Spannungswerte müssen also reziprok betrachtet werden. Mit Gauß'scher Fehlerfortpflanzung erfolgt die Umrechnung als

$$U_\mathrm{V}^{-1} = \frac{1}{U_\mathrm{V}}$$
$$u_{1/U_\mathrm{V}} = \left| \frac{\partial U_\mathrm{V}^-1}{\partial U_\mathrm{V}} \cdot u_{U_\mathrm{V}} \right| = \frac{u_{U_\mathrm{V}}}{U_\mathrm{V}^2}. \tag{1}$$

Die Messwerte und umgerechneten Größen sind in Tabelle 1 ersichtlich.

Zugeschalteter Widerstand R_x [kΩ]	Spannungsabfall U_V [V]	Zugehörige Unsicherheit u_{U_V} [V]	Reziproker Spannungsabfall U_V^{-1} [1/V]	Zugehörige Unsicherheit u_{1/U_V} [1/V]
0.5	19.3	0.7	0.052	0.002
2.0	18.2	0.7	0.055	0.002
9.0	15.0	0.7	0.067	0.003
15.0	12.5	0.7	0.080	0.004
21.0	11.0	0.7	0.091	0.006
27.0	9.8	0.7	0.102	0.007
33.0	8.9	0.7	0.112	0.009
39.0	8.0	0.7	0.13	0.01
45.0	7.3	0.7	0.14	0.02
50.0	7.0	0.7	0.14	0.02

Tabelle 1: Werteaufnahme für Voltmeterschaltung

Wenn man $\frac{1}{U_\mathrm{V}}$ als Ordinaten- und R_x als Abszissenwerte betrachtet, kann mit den Parametern

$$b_\mathrm{V} = \frac{1}{U_\mathrm{B}}$$
$$a_\mathrm{V} = \frac{1}{U_\mathrm{B} R_\mathrm{V}}$$

eine lineare Regression der Form

$$U_\mathrm{V}^{-1}(R_\mathrm{x}) = a_\mathrm{V} \cdot R_\mathrm{x} + b_\mathrm{V}$$

durchgeführt werden. Die mit dem Programm „QtiPlot“ vollzogene Regression sowie aufgetragene Messwerte finden sich in Abb. 1. Das Regressionsprogramm liefert die Werte

$$a_\mathrm{V} = (1.88 \pm 0.02) \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}^2} \qquad \text{und} \tag{2}$$
$$b_\mathrm{V} = (5.09 \pm 0.03) \cdot 10^{-2}\ \frac{1}{\mathrm{V}}. \tag{3}$$

Weitere Werte, die zur Bewertung der Güte der Regression von Bedeutung sind, lauten

Bestimmtheitsmaß $R^2 = 0.999$,

Chi-Quadrat (QtiPlot) $\chi^2/\mathrm{d.o.F.} = 0.04$,

Chi-Quadrat (nach [3]) $\chi^2/\mathrm{d.o.F.} = 395/8 = 50$.

Diese Größen werden später diskutiert.

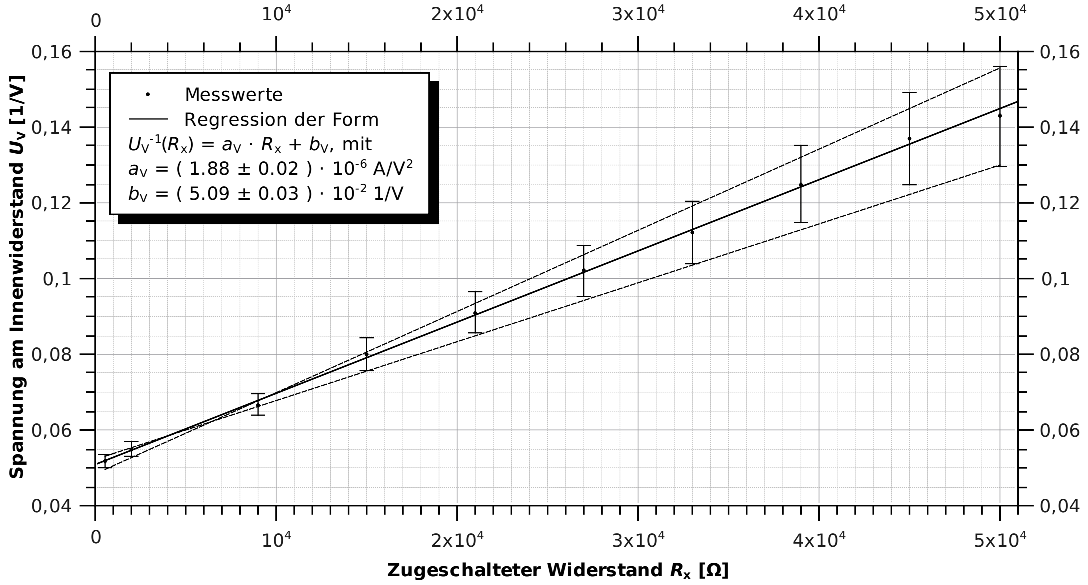

Abbildung 1: Regression für Voltmeterschaltung

2.1.3 Grafische Überprüfung des Regressionsanstiegs a_V

Die in Abb. 1 gestrichelt dargestellten Strecken entsprechen dem Verlauf von Regressionsgeraden maximalen, bzw. minimalen Anstiegs im Bereich $0.5\,\mathrm{k\Omega} < R_x < 50\,\mathrm{k\Omega}$. Entnimmt man der Grafik die Koordinaten der Endpunkte, lassen sich mithilfe eines Steigungsdreiecks diese Anstiege nun leicht ermitteln:

$$\Delta R_{\mathrm{V,max}} = 50\,\mathrm{k\Omega} - 0.5\,\mathrm{k\Omega} = 49.5\,\mathrm{k\Omega}$$
$$\Delta U_{\mathrm{V,max}}^{-1} = 1.56 \cdot 10^{-1} - 4.96 \cdot 10^{-2} = 1.06 \cdot 10^{-1}\ \frac{1}{\mathrm{V}}$$
$$a_{\mathrm{V,max}} = \frac{\Delta R_{\mathrm{V,max}}}{\Delta U_{\mathrm{V,max}}^{-1}} = 2.14 \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}^2}$$

$$\Delta R_{\mathrm{V,min}} = 50\,\mathrm{k\Omega} - 0.5\,\mathrm{k\Omega} = 49.5\,\mathrm{k\Omega}$$
$$\Delta U_{\mathrm{V,min}}^{-1} = 1.30 \cdot 10^{-1} - 5.30 \cdot 10^{-2} = 7.70 \cdot 10^{-2}\ \frac{1}{\mathrm{V}}$$
$$a_{\mathrm{V,min}} = \frac{\Delta R_{\mathrm{V,min}}}{\Delta U_{\mathrm{V,min}}^{-1}} = 1.55 \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}^2}$$

$$\overline{a_{\mathrm{V}}} = (a_{\mathrm{V,max}} + a_{\mathrm{V,min}})/2 = 1.8 \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}^2}$$
$$u_{\overline{a_{\mathrm{V}}}} = (a_{\mathrm{V,max}} - a_{\mathrm{V,min}})/2 = 0.3 \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}^2}$$

$$a_{\mathrm{V,grafisch}} = (1.8 \pm 0.3) \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}^2}.$$

Das Ergebnis ist mit dem Ergebnis der Regression konsistent.

2.1.4 Berechnung der gesuchten Werte

Aus den oben genannten Beziehungen 2 und 3 folgen die Formeln

$$\begin{aligned} U_\mathrm{B} &= \frac{1}{b_\mathrm{V}} \\ R_\mathrm{V} &= \frac{b_\mathrm{V}}{a_\mathrm{V}}, \end{aligned}$$

deren Unsicherheiten ergeben sich aus dem Gauß'schem Fehlerfortpflanzungsgesetz, wobei für R_V ein Korrelationsterm hinzukommt, da die Regressionsparameter a_V und b_V mit dem Korrelationskoeffizienten $R = 1$ voneinander abhängen:

$$\begin{aligned} u_{U_\mathrm{B}} &= \left| \frac{\partial b_\mathrm{V}^{-}1}{\partial b_\mathrm{V}} \cdot u_{U_\mathrm{B}} \right| = \frac{u_{b_\mathrm{V}}}{b_\mathrm{V}^2} \\ u_{R_\mathrm{V}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial R_\mathrm{V}}{\partial a_\mathrm{V}} \cdot u_{a_\mathrm{V}}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_\mathrm{V}}{\partial b_\mathrm{V}} \cdot u_{b_\mathrm{V}}\right)^2 + 2 \cdot u_{a_\mathrm{V}} u_{a_\mathrm{V}} \frac{\partial R_\mathrm{V}}{\partial b_\mathrm{V}} \frac{\partial R_\mathrm{V}}{\partial a_\mathrm{V}}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{u_{b_\mathrm{V}}}{a_\mathrm{V}}\right)^2 + \left(\frac{b \cdot u_{a_\mathrm{V}}}{a_\mathrm{V}^2}\right)^2 - 2 \cdot u_{a_\mathrm{V}} u_{b_\mathrm{V}} \frac{b_\mathrm{V}}{a_\mathrm{V}^3}}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich für Betriebsspannung und Innenwiderstand

$$\begin{aligned} U_\mathrm{B} &= (19.7 \pm 0.1)\ \mathrm{V}, \\ R_\mathrm{V} &= (27.0 \pm 0.2)\ \mathrm{k\Omega}. \end{aligned}$$

2.2 Innenwiderstand des Amperemeters und Stromstärke im Schaltkreis

2.2.1 Messunsicherheiten

Die Unsicherheit des Widerstandes R_x ist wie im ersten Teil des Experimentes und wiederum vernachlässigbar. Die Stromstärke besitzt einen zufälligen Fehler von $e_{z,I} = 2\ \mu\mathrm{A}$, die systematische Unsicherheit ist gegeben als $e_{s,I} = 1.5\% \cdot \text{Messbereich}$, wobei der Messbereich den ganzen Versuch über als $I_\mathrm{max} = 100\ \mu\mathrm{A}$ gegeben war, der Fehler also stets $e_{s,I} = 1.5\ \mu\mathrm{A}$ betrug. Damit beträgt die Messunsicherheit jeglicher Strommessung

$$\begin{aligned} u_I &= \sqrt{e_{z,I}^2 + e_{s,I}^2} \\ &= 3\ \mu\mathrm{A}. \end{aligned}$$

2.2.2 Messwertaufnahme und Regression

Zu Beginn wurde ohne zugeschalteten Widerstand R_x gemessen, sodass der gemessene Strom im Stromkreis I_0 entspricht. Die Messung ergab

$$I_0 = (76 \pm 3)\ \mu\mathrm{A}.$$

Für die in [1], S.8, Abb.2b aufgebaute Schaltung ist die Spannung am parallel geschalteten Widerstand gleich der Spannung am Strommessgerät, woraus sich eine regressionsfähige Beziehung mit den Messwerten R_x und I_A ergibt

$$\begin{aligned} U_\mathrm{A} &= U_\mathrm{x} \\ I_\mathrm{A} R_\mathrm{A} &= I_\mathrm{x} R_\mathrm{x}, \qquad \text{mit} \qquad I_0 = I_\mathrm{x} + I_\mathrm{A} \qquad \text{folgt} \\ \frac{1}{I_\mathrm{A}} &= \frac{1}{I_0} \frac{R_\mathrm{A}}{R_\mathrm{x}} + \frac{1}{I_0}. \end{aligned}$$

Zugeschalteter Widerstand R_x [kΩ]	Reziproker Widerstand $1/R_x$ [1/ kΩ]	Stromstärke I_A [µA]	Zugehörige Unsicherheit u_{I_A} [µA]	Reziproke Stromstärke $1/I_A$ [1/ µA]	Zugehörige Unsicherheit u_{1/I_A} [1/ µA]
0.5	2.00	24	3	0.042	0.005
0.6	1.67	28	3	0.036	0.003
0.7	1.43	30	3	0.033	0.003
0.8	1.25	32	3	0.031	0.003
0.9	1.11	35	3	0.029	0.002
1.2	0.83	40	3	0.025	0.002
1.6	0.63	45	3	0.022	0.001
2.5	0.40	53	3	0.019	0.001
5.0	0.20	62	3	0.016	0.001
10.0	0.10	69	3	0.014	0.001
50.0	0.02	75	3	0.013	0.001

Tabelle 2: Werteaufnahme für Amperemeterschaltung

Von Strom- und Widerstandswerten müssen folglich die Kehrwerte gebildet werden. Die Unsicherheit des Stromes pflanzt sich analog zu (1) fort. Die gemessenen und umgerechneten Werte finden sich in Tabelle 2.

Mit I_A^{-1} als Ordinaten-, R_x^{-1} als Abszissenwerte und den Parametern

$$a_A = \frac{1}{I_0},$$
$$b_A = \frac{R_A}{I_0}$$

ergibt sich als Regressionsfunktion

$$I_A^{-1}(R_x^{-1}) = a_A \cdot R_x^{-1} + b_A.$$

Eine mit „QtiPlot“ durchgeführte Regression liefert Abb. 2 und die Werte

$$a_A = (14.2 \pm 0.4) \cdot 10^6 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}^2} \qquad \text{und} \tag{4}$$
$$b_A = (1.30 \pm 0.07) \cdot 10^4 \frac{1}{\mathrm{A}}. \tag{5}$$

Weitere Werte von Bedeutung sind

Bestimmtheitsmaß $R^2 = 0.999$,

Chi-Quadrat (QtiPlot) $\chi^2/\text{d.o.F.} = 0.44$,

Chi-Quadrat (nach [3]) $\chi^2/\text{d.o.F.} = 0.63/9 = 0.07$.

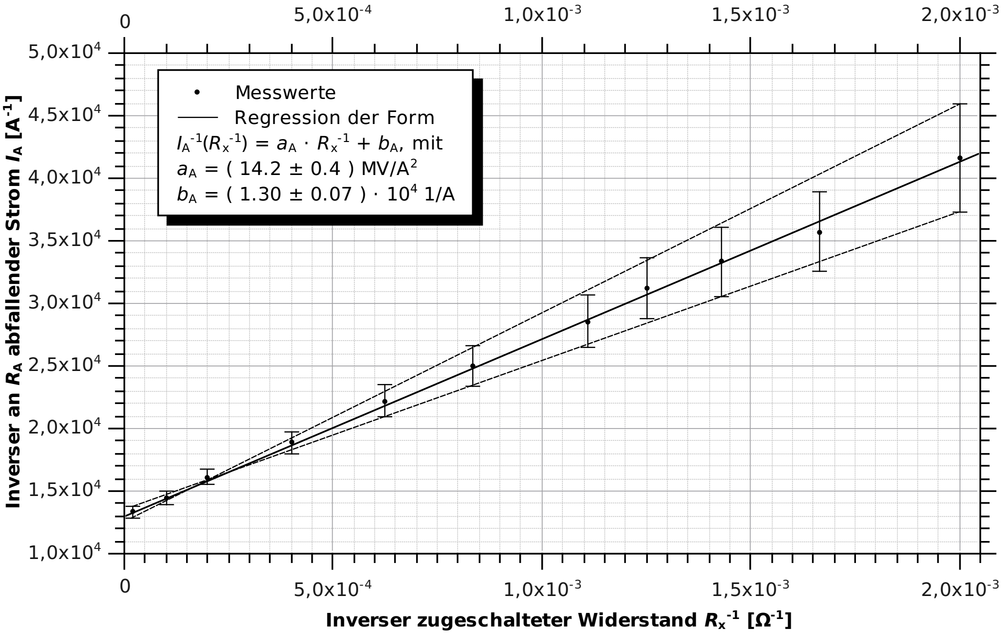

Abbildung 2: Regression für Amperemeterschaltung

2.2.3 Grafische Überprüfung des Regressionsanstiegs $a_\mathbf{A}$

Die Überprüfung läuft analog zu Abschnitt 2.1.3.

$$\Delta R^{-1}_{\text{x,max}} = 2.00\,\text{k}\Omega^{-1} - 0.02\,\text{k}\Omega^{-1} = 1.98\,\text{k}\Omega^{-1}$$
$$\Delta I^{-1}_{\text{A,max}} = 4.59 \cdot 10^4 - 1.28 \cdot 10^4 = 3.31 \cdot 10^4\ \frac{1}{\text{A}}$$
$$a_{\text{A,max}} = \frac{\Delta R^{-1}_{\text{x,max}}}{\Delta I^{-1}_{\text{A,max}}} = 1.67 \cdot 10^7\ \frac{\text{V}}{\text{A}^2}$$

$$\Delta R^{-1}_{\text{x,min}} = 2.00\,\text{k}\Omega^{-1} - 0.02\,\text{k}\Omega^{-1} = 1.98\,\text{k}\Omega^{-1}$$
$$\Delta I^{-1}_{\text{A,min}} = 3.74 \cdot 10^4 - 1.38 \cdot 10^4 = 2.36 \cdot 10^4\ \frac{1}{\text{A}}$$
$$a_{\text{A,min}} = \frac{\Delta R^{-1}_{\text{x,min}}}{\Delta I^{-1}_{\text{A,min}}} = 1.19 \cdot 10^7\ \frac{\text{V}}{\text{A}^2}$$

$$\overline{a_\text{A}} = (a_{\text{A,max}} + a_{\text{A,min}})/2 = 1.4 \cdot 10^7\ \frac{\text{V}}{\text{A}^2}$$
$$u_{\overline{a_\text{A}}} = (a_{\text{A,max}} - a_{\text{A,min}})/2 = 2.4 \cdot 10^6\ \frac{\text{V}}{\text{A}^2}$$

$$a_{\text{V,grafisch}} = (14 \pm 3) \cdot 10^6\ \frac{\text{V}}{\text{A}^2}.$$

Das Ergebnis ist mit dem Ergebnis der Regression konsistent.

2.2.4 Berechnung der gesuchten Werte

Aus (4) und (5) folgen die Berechnungsformeln

$$I_0 = \frac{1}{b_\mathrm{V}}$$
$$R_\mathrm{A} = \frac{a_\mathrm{A}}{b_\mathrm{A}},$$

deren Unsicherheiten ergeben sich aus dem Gauß'schem Fehlerfortpflanzungsgesetz. Wiederum muss für R_A ein Korrelationsterm beachtet werden, da die Regressionsparameter a_V und b_V mit dem Korrelationskoeffizienten $R = 1$ voneinander abhängen:

$$u_{I_0} = \left| \frac{\partial b_\mathrm{A}^{-1}}{\partial b_\mathrm{A}} \cdot u_{I_0} \right| = \frac{u_{b_\mathrm{A}}}{b_\mathrm{A}^2}$$
$$u_{R_\mathrm{A}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_\mathrm{A}}{\partial b_\mathrm{A}} \cdot u_{b_\mathrm{A}}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_\mathrm{A}}{\partial a_\mathrm{A}} \cdot u_{a_\mathrm{A}}\right)^2 + 2 \cdot u_{b_\mathrm{A}} u_{b_\mathrm{A}} \frac{\partial R_\mathrm{A}}{\partial a_\mathrm{A}} \frac{\partial R_\mathrm{A}}{\partial b_\mathrm{A}}}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{u_{a_\mathrm{A}}}{b_\mathrm{A}}\right)^2 + \left(\frac{b \cdot u_{b_\mathrm{A}}}{b_\mathrm{A}^2}\right)^2 - 2 \cdot u_{b_\mathrm{A}} u_{a_\mathrm{A}} \frac{a_\mathrm{A}}{b_\mathrm{A}^3}}.$$

Damit ergeben sich für Betriebsspannung und Innenwiderstand

$$I_0 = (77 \pm 4)\ \mu\mathrm{A},$$
$$\underline{\underline{R_\mathrm{A} = (1.09 \pm 0.03)\ \mathrm{k}\Omega.}}$$

3 Fehler- und Ergebnisdiskussion

3.1 Güte der Regressionen

Der Vergleich zwischen den χ^2 aus QtiPlot und errechnet nach einer im EDV-Kurs erlernten Formel für das χ^2 einer linearen Regression [3] zeigt, dass erhebliche Unterschiede vorliegen. De facto ist nicht bekannt, was das von QtiPlot errechnete χ^2/d.o.F anzeigt. Doch auch die mit [3] berechneten Werte stimmen nicht mit dem Erlernten überein, das besagt, dass eine gute Regression einen χ^2/d.o.F-Wert nahe 1 besitzt. Dementsprechend kann nur das Bestimmtheitsmaß zur Prüfung der Regression verwendet werden. Nach [2], S.45 und [4] hat eine Regression eine niedrige Irrtumswahrscheinlichkeit, je höher das Bestimmtheitsmaß ist. Da die für dieses Experiment entwickelten Regressionen Bestimmtheitsmaße von $R^2 = 0.999$ besitzen, kann mit hoher Sicherheit angenommen werden, dass das Experiment mit dem Modell einer linearen Abhängigkeit übereinstimmt.

3.2 Ergebnisse

Die Ergebnisse der Betriebsgrößen sind untereinander konsistent. Dies lässt vermuten, dass keine systematischen Fehler vorlagen, die das Experiment beeinträchtigten. Auch die ermittelten Innenwiderstände scheinen realistisch, da $\frac{R_\mathrm{A}}{R_\mathrm{V}} = 4\%$, der Innenwiderstand des Voltmeters gegenüber dem des Amperemeters also viel größer ist. Allerdings scheint der Innenwiderstand des Amperemeters trotzdem sehr hoch, der des Voltmeters gering im Vergleich zum Experiment E8 ($R_\mathrm{V} \approx 7.3\,\mathrm{M}\Omega$). Dies lässt vermuten, dass für den Lehrbetrieb extra Widerstände zugeschaltet bzw. entfernt wurden, um im Rahmen des Praktikums angemessene Ergebnisse zu erhalten.

3.3 Fehler

Die Unsicherheiten der Endwerte sind nur abhängig von der Regression und möglicherweise zu minimieren durch genauere Messgeräte, die den systematischen sowie zufälligen Fehler durch eine feinere

Messskala geringer halten. Die Widerstände von hinzugeschalteten Kabeln wurden vernachlässigt, wobei diese nur bei wenigen Ω liegen und somit tatsächlich vernachlässigbar sind. Alles in allem halte ich dieses Experiment jedoch für eine wirkungsvolle Methode, den Innenwiderstand von Messgeräten zu bestimmen.

4 Literatur

[1] Skript: „Physikalisches Grundpraktikum - Elektrodynamik und Optik“ von Dr. Uwe Müller, Berlin 2005

[2] Skript: „Physikalisches Grundpraktikum - Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik“ von Dr. Uwe Müller, Berlin 2007

[3] „Chi-Quadrat“ – http://www-com.physik.hu-berlin.de/b̃unk/kurs/matlab/uebungen.pdf, Prof. Bunk, Humboldt-Universität zu Berlin, Stand: 6.1.2009

[4] „Bestimmtheitsmaß“ – http://de.wikipedia.org/wiki/Bestimmtheitsma%C3%9F, Wikipedia Foundation, Stand: 6.1.2009

A Datenaufnahme während des Versuchs