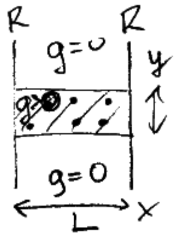
RL mit WG-Moden

[WG: Wave Guide]



Nur Streuer im Streifen. Zu lösen, $k(y) = \begin{cases} k_i & \text{in Streifen} \\ k_s & \text{aussen.} \end{cases}$

$$\left[\partial_x^2 + \nabla_y^2 + k^2(y)\right] E(x,y) = -\sigma E(x,y)\,\delta(x-x_n)\,\delta(y-y_m). \quad (1)$$

Ohne Reflexionen an Streifenrand bzw. Spiegel gilt im Streifen (2')

$$(2)\quad E(\vec r_n) = \sigma \sum_m G_d(\vec r_n, \vec r_m) E_m \,;\; G_d \text{ Kugelwelle};\quad (\nabla_d^2 + k^2)\, G_d(\vec r, \vec r_m) = -\delta(\vec r - \vec r_m).$$

WG-Moden: $\left[\nabla_y^2 + k^2(y)\right]\phi_\nu(y) = \beta_\nu^2 \phi_\nu(y)$; $\int dy\, \phi_\nu(y)\phi_\mu(y) = \delta_{\nu\mu}$ (3)

Vollständigkeit: $\sum_\nu \phi_\nu(y)\phi_\nu(y') = \delta(y-y')$. (4)

Modendarstellung GF: $G_d(\vec r_n, \vec r_m) = \sum_\nu G_1(\beta_\nu, x_{nm})\,\phi_\nu(y_n)\phi_\nu(y_m)$ (5)

Beweis leicht durch Einsetzen in (2'), Ausnutzen v. (3), (4).

Beachte: n, m indiziert Streuer, $\nu, \mu, \ldots$ WG-Moden.

Mit Spiegeln bei x_s; $s = +, -$:

Spiegelmodell: Kontinuum von Streuern gleicher Streustärke σ_s auf Linie ($d=2$) bzw. Fläche ($d=3$) $x = x_s$. Dann reflektiertes Feld

$$E_s^{refl}(\vec r_n) = \sigma_s \int dy_s\, G_d(\vec r_n, \vec r_s) E^{in}(\vec r_s) \overset{(5)}{=} \sigma_s \sum_\nu G_1(\beta_\nu, x_{ns})\,\phi_\nu(y_n) \underbrace{\int dy_s\, \phi_\nu(y_s) E_s^{in}(y_s)}_{E_{s\nu}}$$

$$= \frac{\sigma_s i}{2k} \sum_\nu \frac{k}{\beta_\nu} e^{i\beta_\nu x_{ns}} \phi_\nu(y_n) \int dy_s\, \phi_\nu(y_s) E^{in}(\vec r_s)$$

1D; Nur 1 Transversalmode $\phi_1 = 1$, $\beta_1 = k \Rightarrow E^{refl}(x_s) = \frac{\sigma_s i}{2k} E^{in}(x_s) \overset{!}{=} -\sqrt{R}\, E_{in}$

$\sigma_s = 2ik\sqrt{R}$.

$d>1$: Wenn nur Moden besetzt sind, wo $k/\beta_\nu \approx 1$, dann

$$E^{refl}(\vec r_s{}') = \frac{\sigma_s i}{2k} \int dy_s \underbrace{\sum_\nu \phi_\nu(y_s')\phi_\nu(y_s)}_{\delta(y_s - y_s')\ (4)} E^{in}(\vec r_s) = \frac{\sigma_s i}{2k} E^{refl}(\vec r_s{}').$$

D.h. wie 1D $\sigma_s = 2ik\sqrt{R}$. Also für alle d

$$E_s^{refl}(\vec r_n) = -\sqrt{R} \sum_\nu e^{i\beta_\nu x_{ns}} \phi_\nu(y_n) E_{s\nu} \,;\quad E_{s\nu} = \int dy_s\, \phi_\nu(y_s) E_s^{in}(y_s). \quad (6)$$

Das muss zu (2) hinzuaddiert werden.

$$E(\vec{r}_n) = \sigma \sum_m G_d(\vec{r}_n,\vec{r}_m) E_m - \sqrt{R} \sum_{\nu,s} e^{i\beta_\nu x_{ns}} \phi_\nu(y_n) E_{s\nu}. \tag{7}$$

Nun brauchen wir noch Gleichung für $E_{s\nu}$. Offensichtlich

$$E_s^{in}(y_s) = \sigma \sum_m G_d(\vec{r}_s,\vec{r}_m) E_m - \sqrt{R} \sum_\mu e^{i\beta_\mu L} \phi_\mu(y_s) E_{-s\mu}$$

anderer Spiegel

$\cdot\, \phi_\nu(y_s)$, über y_s integrieren $\rightarrow$

$$E_{s\nu} = \sigma \sum_{\nu m}' G_1(\beta_\nu, x_{sm}) \phi_\nu(y_m) E_m - \sqrt{R}\, e^{i\beta_\nu L} E_{-s\nu}. \tag{8}$$

Gl. (7) u. (8) sind homogenes System aus $N_m + 2N_\nu$ Gleichungen für ebenso viele Unbekannte. Gleichung f. Lasermoden: Sysdet = 0.

(8) läßt sich leicht nach $E_{s\nu}$ auflösen:

$$E_{s\nu} = \sigma \sum_{\nu m} G_1(\beta_\nu, x_{sm}) \phi_\nu(y_m) E_m - \sqrt{R} e^{i\beta_\nu L}\left(\sigma \sum_{\nu m} G_1(\beta_\nu, x_{-sm}) \phi_\nu(y_m) E_m - \sqrt{R} e^{i\beta_\nu L} E_{s\nu}\right)$$

Term mit $E_{s\nu}$ nach links, Div durch Vorfaktor

$$E_{s\nu} = \sigma \sum_m \frac{\left[G_1(\beta_\nu, x_{sm}) - \sqrt{R}\, e^{i\beta_\nu L} G_1(\beta_\nu, x_{-sm})\right]}{1 - R e^{2i\beta_\nu L}} \phi_\nu(y_m) E_m \tag{9}$$

Damit können die $E_{s\nu}$ in (7) eliminiert werden. Es bleiben N_m Gleichungen für die N_m Unbekannten E_m. Wie (2), nur mit anderen Koeffizienten. Damit bleibt auch die Gleichung f. d. volle Lasermoden wie gehabt, mit

$$S_{nm} = \delta_{nm} - \sigma(1-\delta_{nm}) G_d(r_{nm}) - \sqrt{R}\,\sigma \sum_{\nu,s}' e^{i\beta_\nu x_{ns}} \frac{\phi_\nu(y_n)\phi_\nu(y_m)}{1 - R e^{2i\beta_\nu L}} \times \left[G_1(\beta_\nu, x_{sm}) - \sqrt{R}\, e^{i\beta_\nu L} G_1(\beta_\nu, x_{-sm})\right] \tag{10}$$

Beachte: der neue 3. Term hat auch Diagonalelemente $n=m$.

Diskussion: von (10)

- Term 2 = direkte Streuung $n \leftrightarrow m$, Term 3 = Streuung über Spiegel.
- Term 2 kann mit der ursprünglichen Kugelwellenformel für σ_d berechnet werden. D.h. direkte Streuung exakt bis auf die vernachlässigte Reflexion an den Rändern des Gainstreifens. Letztere ist bei den realen kontinuierlichen Gainprofilen ohnehin winzig.
- Der Fall $R=0$: Term 3 fällt einfach weg. RL ohne Resonator wie (2). Insofern ist (10) Verallgemeinerung von (2).
- Der Fall $\sigma=0$ (Kein Streuer): $S_{nm}=\delta_{nm} \Rightarrow$ keine Lasermoden. Falsch, Grund: (9) lautet eigentlich

$$\left(1-Re^{2i\beta_\nu L}\right)E_{s\nu}=\sigma\sum_m \left[G_1(\beta_\nu,x_{sm})-\sqrt{R}\,e^{i\beta_\nu L}G_1(\beta_\nu,x_{-sm})\right]\phi_\nu(y_m)E_m \quad (9')$$

$$\sigma=0 \rightarrow E_{s\nu}=0 \text{ oder } \beta_\nu=\beta_{th}^{(N)}=N\frac{\pi}{L}+\frac{i}{2L}\ln R. \quad (11)$$

(11) ist die FP-Schwellenbedingung für WG-Mode ν. Lasermoden sind in diesem Falle also die FP-„Kämme" aller WG-Moden. (11) statt (10) ist im Falle ohne Streuer anzuwenden.

- $\sigma \to 0$: $\det S_{nm}=0$ nur möglich, wenn $1-Re^{2i\beta_\nu L}\to 0$ für einen der Resonanznenner in (10). Nur dieser eine ν-Summand bleibt dann vom Term (3). Außer in diesem Resonanznenner kann ich dann überall $\beta_\nu=\beta_{th}^{(N)}$ setzen

Das gibt $(1-Re^{2i\beta_\nu L}) = \sigma\lambda$; wobei λ eine Lösung von

$$0 = \det\left[Q^\nu_{nm}(\beta^{(N)}_{th}) - \lambda\delta_{nm}\right] \qquad (12)$$

$$Q^\nu_{nm}(\beta) = \sqrt{R}\,\phi_\nu(y_n)\phi_\nu(y_m)\sum_s e^{i\beta x_{ns}}\left[G_1(\beta, x_{sm}) - \sqrt{R}e^{i\beta L}G_1(\beta, x_{-sm})\right]. \qquad (13)$$

(12) ist Eigenwertgleichung für die Q-Matrix. Es gibt N_m Eigenwerte $\lambda_{\nu Nj}$ $(j=1,\dots,N_m)$. D.h. aus jeder FP-Mode $\beta_\nu=\beta^{(N)}_{th}$ werden N_m Moden mit Streuern. Wichtig als Startwerte für σ hochdrehen!

Bis zu welchem σ gilt das? Der herausgesuchte Resonanznenner muss klein sein gegen alle anderen, d.h.

$$\sigma|\lambda_{\nu Nj}| \ll \min_{\mu\neq\nu} \left|1-Re^{2i\beta_\mu(\omega_{\nu Nj})L}\right| . \qquad (14)$$

Hier $\omega_{\nu Nj}$ die Lösung von $(1-Re^{2i\beta_\nu(\omega)L}) = \sigma\lambda_{\nu Nj}$.

Beachtet man $1\approx Re^{2i\beta_\nu(\omega_{\nu Nj})L}$ und nimmt an, dass $\beta_\nu-\beta_\mu$ wenig (nicht) von ω abhängt, bleibt

$$\sigma|\lambda_{\nu Nj}| \ll \min_{\mu\neq\nu}\left|1-e^{2i(\beta_\mu-\beta_\nu)L}\right|. \qquad (1$$

bzw.

$$\boxed{\sigma \ll \frac{\min_{\mu\neq\nu}\left|1-e^{2i(\beta_\mu-\beta_\nu)L}\right|}{\max_{\nu,N,j}|\lambda_{\nu Nj}|}} . \qquad (1$$

Ausserdem: $\sigma|\lambda_{\nu Nj}\, G_d(r_{nm})| \ll |Q^\nu_{nm}(\beta^N_{th})| \quad \forall n\neq m \qquad (15)$

- Lösung von $\det S_{nm} = 0$ im allg. Fall:
  Man suche solche g im Streifen, welche $\det S_{nm} = 0$ mit reellem ω lösen. Lasermoden also $(\omega_{\nu Nj}, g_{\nu Nj})$.
  Bei jedem Iterationsschritt muss man also die WG-Gleichung (3) erneut lösen. Fürchterlich aufwändig. Näherungen erforderlich.

<u>Näherungen</u> Sei $\theta(y) = \begin{cases} 1 & \text{im Streifen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Referenz-k: $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\bar{n}$; $g_0(y) = g_{th}\,\theta(y)$; $g_{th} = \frac{1}{L}\ln\frac{1}{R}$

$$G_d(k,r) \approx G_d(k_0,r)\,e^{i\delta r} \quad ; \quad \delta = k - k_0$$

$$k(\omega,y) \approx k(\omega_0,y) + \frac{\delta\omega}{v_g(y)} \quad ; \quad \delta\omega = \omega - \omega_0 \quad \text{(reell!)}$$

$$\approx k(\omega_0,y) + \frac{\delta\omega}{v_g} = k_0 - \frac{i}{2} g\,\theta(y) + \frac{\delta\omega}{v_g}$$

$$k^2(\omega,y) \approx k_0^2 - i k_0 g\,\theta(y) + k_0 \frac{\delta\omega}{v_g}$$

WG-Näherung: $\left[\nabla_y^2 - i k_0 g_{th}\theta(y)\right]\phi_\nu(y) = (\beta_{0\nu}^2 - k_0^2)\phi_\nu(y)$

$$\beta_\nu^2 = \beta_{0\nu}^2 - i k_0 \delta g\, \Gamma_\nu\, 2k_0 \frac{\delta\omega}{v_g}$$

$\Gamma_\nu = \int dy\, \theta(y)\phi_\nu^2(y)$ i. allg. komplex!

$$\beta_\nu = k_0 + \delta_\nu \ , \quad \beta_{0\nu} = k_0 + \delta_{0\nu}$$

$$\delta_\nu = \delta_{0\nu} - i\Gamma_\nu \frac{\delta g}{2} + \frac{\delta\omega}{v_g}$$

bzw. in (10): $\beta_\nu(\omega_0 + \Omega) = k_0 + \delta_{0\nu} - \frac{i}{2}\Gamma_\nu \delta g + \frac{\delta\omega}{v_g}$

$\left[\nabla_y^2 - i k_0 g_0(y)\right]\phi_\nu(y) = 2k_0\,\delta_{0\nu}\,\phi_\nu(y)$ muss nur 1× gelöst werd.

Mit $\Omega = \delta\omega - \frac{i}{2} v_g \delta g$: $\beta_\nu = k_0 + \delta_{0\nu} + \frac{\mathrm{Re}\,\Omega + i\Gamma_\nu \,\mathrm{Im}\,\Omega}{v_g}$

Jetzt muss $\mathrm{Re}\,\Omega$, $\mathrm{Im}\,\Omega$ als reelle Var. gehandelt werden. D.h. S_{uu} keine analytische Fkt. von Ω mehr.

Bei den gut geführt. Mod. ist $\Gamma_\nu \approx 1$. Setze das zunächst einfach f. alle.

Mit diesen Näherungen

$$S_{nm}(\Omega) = \delta_{nm} - \sigma(1-\delta_{nm})\, G_d\left(k_0 + \frac{\Omega}{v_g}, r_{nm}\right) - \sigma \sum_\nu \frac{Q_\nu^{nm}\left(\beta_\nu + \frac{\Omega}{v_g}\right)}{1 - R e^{2(\beta_\nu + \frac{\Omega}{v_g})L}}$$

$$Q_\nu^{nm}(\beta) = \frac{i\sqrt{R}}{2k_0}\, \phi_\nu(y_n)\phi_\nu(y_m) \sum_s \left[e^{i\beta(x_{sn} + x_{+sm})} - \sqrt{R}\, e^{i\beta(L + x_{-sm} + x_{sm})} \right]$$

NR:

$$x_{-sm} = L - x_{sm}$$

$$Q_\nu^{nm}(\beta) = \frac{i\sqrt{R}}{2k_0}\, \phi_\nu(y_n)\phi_\nu(y_m) \sum_{s=\pm} \left[e^{i\beta(x_{sn} + x_{sm})} - \sqrt{R}\, e^{2i\beta L} e^{+i\beta(x_{sn} - x_{sm})} \right]$$

Interessant: Viele Streuer bei gleichen y; Konfigurationsmitteln von Q $\to$ Terme mit zufälligen Phasen canceln sich

$$\to \langle Q_\nu^{nm}(\beta) \rangle \approx -\frac{iRe^{2i\beta L}}{2k_0} \phi_\nu^2(y)\, \delta_{nm}$$

$$\to S_{nm} \approx \delta_{nm} \cdot \left(1 + \frac{i\sigma R}{2k_0} e^{2i\beta L} \phi_\nu^2(y) \Big/ \left(1 - Re^{2i\beta L}\right)\right)$$

$$\to \det S_{nn} = (\ldots)^{N_m} \approx 1 + i\frac{N_m \sigma R}{2k_0} e^{2i\beta L} \phi_\nu^2 \Big/ (1 - \ldots) \cancel{+ \ldots}$$

$$\sim \frac{1}{R} e^{-2i\beta L} - 1 + i\frac{N_m \sigma}{2k_0} \phi_\nu^2$$

$$\to \beta = N\frac{\pi}{L} - \frac{i}{2L} \ln\frac{1}{R} + \frac{i}{2L} \ln\left(1 - i\frac{N_m \sigma \phi_\nu^2}{2k_0}\right)$$

$$\simeq N\frac{\pi}{L} - \frac{i}{2L}\ln\frac{1}{R} + \frac{N_m \sigma \phi_\nu^2(y)}{4k_0 L} \mathrel{\hat{=}} \text{Foldy!}$$

[Beachte: $\phi_\nu^2 \approx \frac{1}{W}$]