

Können Punktstreuer die Streuung an kreisförmigen Objekten in 2D modellieren?

Natürlich sollte das möglich sein, wenn der Durchmesser $d=2R$ hinreichend klein ist. Um die Grenzen zu finden, betrachte ich erst das Punktstreumodell und setze dann Mie-Streuung an Kreisen dazu in Beziehung.

1. Punktstreumodell

$$E = E_i + E_s; \quad E_i = E_0 e^{ikz}; \quad E_s = \sigma G_2(k, r) E_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{8\pi k r}} e^{i(kr + \frac{\pi}{4})} E_0. \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Streuquerschnitt} \quad s &= \frac{|\sigma|^2}{4k} \\ \text{Absorptionsquerschnitt} \quad a &= \frac{1}{k} \left[\frac{|\sigma|^2}{4} - \text{Im} \sigma \right] \\ \text{Extinktionsquerschnitt} \quad e &= s + a = \frac{1}{k} \text{Im} \sigma. \end{aligned} \right\} (2)$$

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen dem formalen Parameter σ und den (im Prinzip) messbaren Größen k_s , k_a , k_e genauer betrachten.

Parameterisierung von σ , Absorptionsquerschnitt(-länge) a als Scherparameter

$$\text{Beh: } \sigma = 2 \left(\sqrt{1 - ka} e^{i\varphi} + i \right); \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (3)$$

Bew:

$$\begin{aligned} a &\stackrel{!}{=} \frac{1}{k} \left(\text{Im} \sigma - \frac{|\sigma|^2}{4} \right) = \frac{1}{k} \left(2 \sqrt{1 - ka} \sin \varphi + 2 - \left[(1 - ka) - 2 \sqrt{1 - ka} \sin \varphi + 1 \right] \right) \\ &= a \quad \checkmark \end{aligned}$$

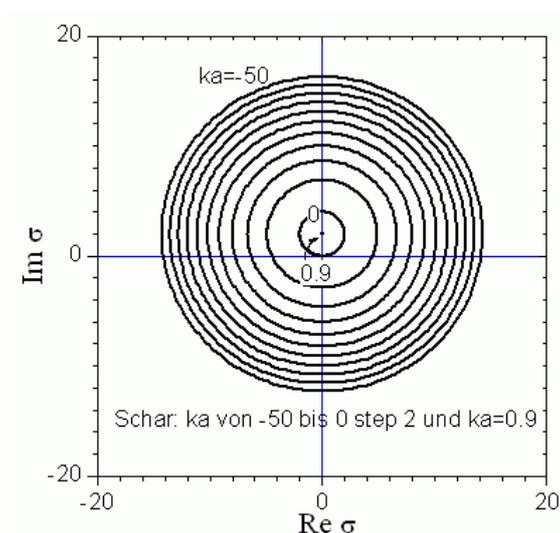
Damit

$$\text{Streuquerschnitt} \quad s = \frac{1}{k} \frac{|\sigma|^2}{4} = \frac{1}{k} \left[2 - ka - 2 \sqrt{1 - ka} \sin \varphi \right] \quad (4)$$

$$\text{Extinktionsquerschnitt} \quad e = \frac{1}{k} \text{Im} \sigma = \frac{2}{k} \left[\sqrt{1 - ka} \sin \varphi + 1 \right].$$

Im Folgenden immer $ka = k \cdot a$, $ke = k \cdot e$, $ks = k \cdot s$.

Linien konstanten Absorptionsquerschnitts in der σ -Ebene:



$ka > 1$ ist unmöglich - die Streuwellen müssten dann nicht vom Streuer weg, sondern auf den Streuer zu laufen.

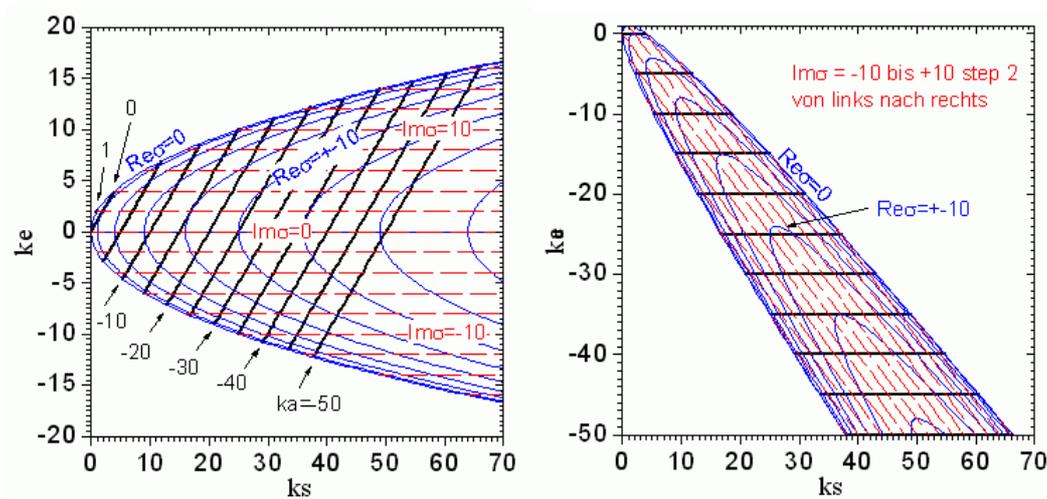
$ka=1$ ist genau der Punkt $\sigma=2i$.

$ka < 1$ sind Kreise um diesen Punkt. Da $\text{Im}(\sigma)=ke$, bedeutet das Maximum des Kreises maximale Extinction. Hier ist auch der Streuquerschnitt ks maximal. Eingestrahlte Welle und gestreute Welle überlagern sich in Vorwärtsrichtung destruktiv. Entsprechend bedeutet das Minimum des Kreises konstruktive Überlagerung in Vorwärtsrichtung.

Beim verlustfreien Streuer $ka=0$ berührt der Kreis die reelle Achse in $\sigma=0$. Endliche Streustärke erfordert einen positiven Imaginärteil. Die Leistung, die zur Seite weggestreut wird, fehlt durch die Interferenz zwischen einfallendem und Streulicht exakt in Vorwärtsrichtung. Maximales $ks=ke=4$ bei $\sigma=4i$.

Höhere Streuquerschnitte erfordern verstärkende Streuer, d.h. $ka < 0$.

Linien konstanten $\text{Re}(\sigma)$ und $\text{Im}(\sigma)$ in den (ke, ks) - und (ka, ks) -Ebenen:



2. Streuung an Kreisen (2D)

Eutpricht Zylindern in 3D mit senkrechtem Einfall.

Ist vollständig durchgerechnet in Kap. 8.4 von

[BH] = C.F. Bohren, D.R. Huffman: Absorption and Scattering of Light by Small Particles, Wiley 1983.

Sasha Kaluzniak hat die Formeln in Mathematica programmiert.

pdf des Buchkapitels: [BohrenHuffman_StreuungZylinder.pdf](#)

Es ist sinnvoll, zunächst den Fall kleiner Streuer zu betrachten (Rayleigh-Streuung).

Small-Particle Limit, Streuung an Kreisen 2D, [BH S. 208]

$kd/2 \ll 1$ und $\left| \frac{\epsilon_{\text{inner}}}{\epsilon_{\text{aussen}}} \right|^{0.5} kd/2 \ll 1$, $d = 2R = \text{Durchmesser Kreises}$

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel s} \\ E_{\perp s} \end{pmatrix} = e^{i3\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{i k r} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel i} \\ E_{\perp i} \end{pmatrix} \quad (8.40)$$

||: Pol. parallel Zylinderachse; \perp : \perp .

Vergleichen mit unserem Punkttrenausatz:

$$E_s = \frac{\sigma}{\sqrt{8\pi k r}} e^{i(kr + \pi/4)} E_i$$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{8\pi k r \cdot 2}{\pi k r}} e^{i\pi/2} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = 4i \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = b_0 = -i\pi x^2 (m^2 - 1)/4; \quad T_2 = 2\alpha_1 \cos\theta = -\frac{i\pi x^2}{2} \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} \cos\theta$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_{\parallel} = \pi (kR)^2 \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_a} - 1 \right); \quad \sigma_{\perp} = 2\pi (kR)^2 \frac{\epsilon_i/\epsilon_a - 1}{\epsilon_i/\epsilon_a + 1} \cos\theta} \quad (S1)$$

$R = \text{Radius des Kreises.}$

Gültigkeitsbedingungen bedeuten $|\sigma| \ll \pi$.

Wie auch immer, Kreisbreuer kann durch 3 Parameter charakterisiert werden (bei geg. Wellenlänge)

$$R, U := \pi (kR)^2 \text{Re} \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_a} - 1 \right); \quad V := \pi (kR)^2 \text{Im} \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_a} \right). \quad (S2)$$

Bei schwachen Streuern hängt dann Streuung \parallel nicht von R , sondern nur von U und V ab.

Bei Punkttreuer $\sigma = U + iV$.

Beachte: dieser Grenzfall gilt, solange der geometrische Durchmesser die Bedingung $d \ll \min(\lambda_i, \lambda_a)/\pi$ erfüllt, also kleiner ist sowohl als die Wellenlänge im Streuer, als auch die äussere Wellenlänge. Wenn man also den Brechindex im Streuer hochdreht, um die Streustärke zu erhöhen, wird die innere Wellenlänge immer kleiner und man verletzt irgendwann diese Bedingung, auch wenn der Streuer kleiner ist als die äussere Wellenlänge.

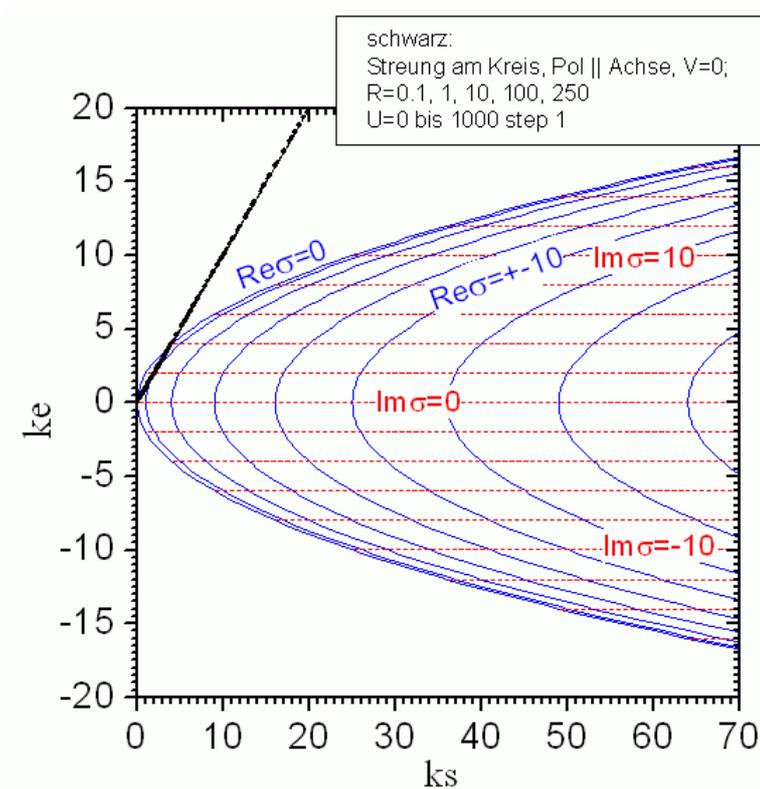
Numerische Ergebnisse für endliche Streuer (Mie-Streuung)

Formel (S2) läßt sich leicht nach ϵ_i auflösen:

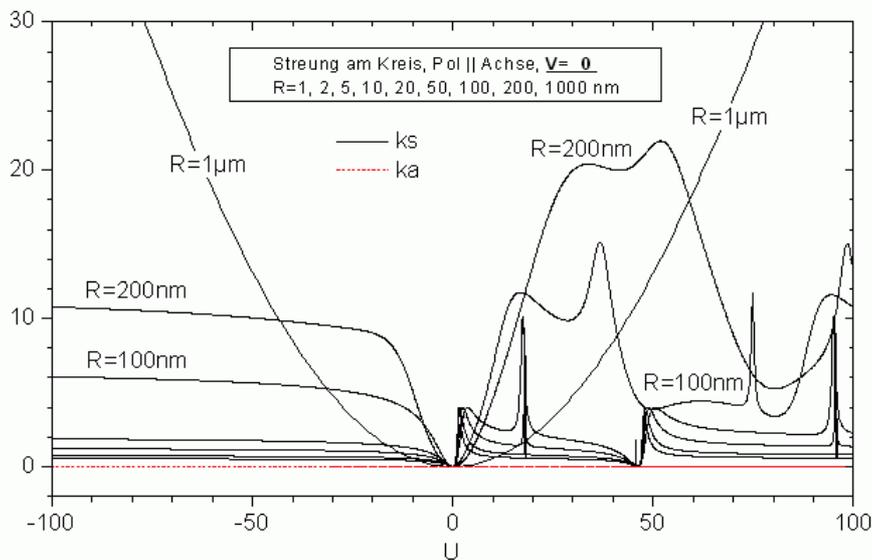
$$\epsilon_i = \epsilon_a \left(1 + \frac{U + iV}{F} \right), \quad F = \pi (kR)^2$$

Für festes V ($\text{Im } \epsilon_i$) wurde für verschiedene Kreisradien R der Parameter U ($\text{Re } \epsilon_i$) jeweils von 0 bis 100 step 1 durchgedreht und k_s sowie k_e berechnet. Andere Parameter: $\epsilon_a = 4$, $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$.

a) verlustfreie Streuer ($V=0$)



Die Punkte (schwarz) liegen natürlich auf der Geraden $ke=ks$. Sie liegen aber teilweise ausserhalb des Bereichs, der von Punktstreuern abgedeckt werden kann. Wo das herkommt, zeigt folgende Abbildung:



$U > 0$ (optisch dickeres Medium im Streuer):

nichtmonoton mit Resonanzen (Resonatoreffekt im Streuer).

$R \ll \lambda_a = 250 \text{ nm}$: Resonanzen an gleicher Stelle. Erster schneller Anstieg bis auf maximalen Punktstreuerwert $ks=4$. Erst in den späteren, extrem scharfen Resonanzen höhere Werte.

R vergleichbar mit λ_a : Resonanzen schieben und schmieren aus.

$R > \lambda_a$: parabelartig, d.h. linear in Wurzel $U =$ Reflexion an der Frontfläche des Kreises.

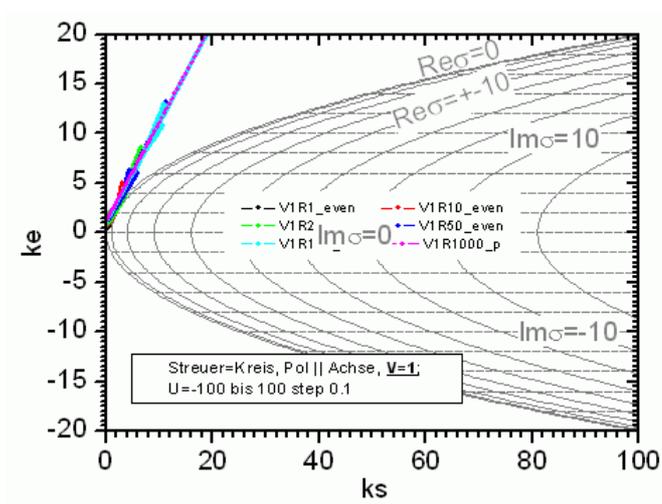
$U < 0$ (optisch dünneres bis metallartiges Medium im Streuer):

monoton ohne Resonanzen. Der erste steile Anstieg entspricht wahrscheinlich dem Fall optisch (zunehmend) dünneres Medium, das Plateau dem metallartigen Medium (negative DK).

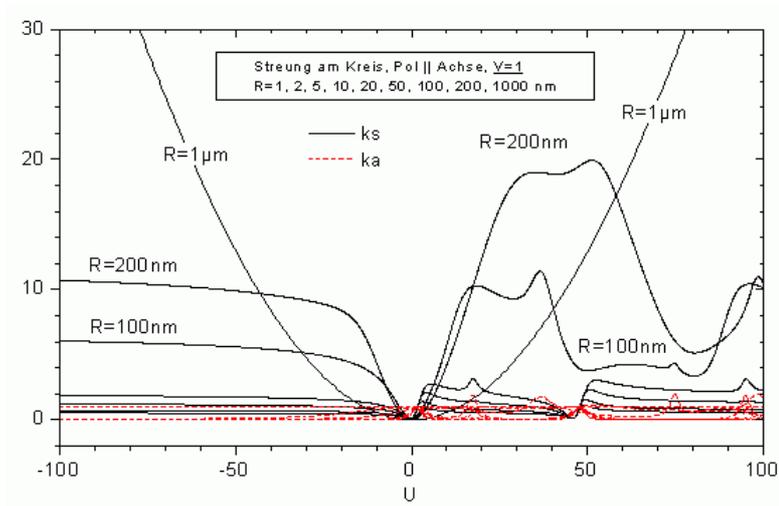
Es ist eigentlich nicht überraschend, dass die Resonanzen wie auch starke Reflexionen an größeren Streuern nicht auf Punktstreuer abbildbar sind.

Beachte: $U=10$ bedeutet einen DK-Sprung von 20000, 200, 2, 0.02 für $R=1, 10, 100, 1000 \text{ nm}$. Die Resonanzen für $R < 100 \text{ nm}$ sind also unrealistisch. Verlustfreie Streuer mit großen Streuquerschnitten ($ka > 10$) müssen entsprechend groß sein, vergleichbar oder größer als die externe Wellenlänge.

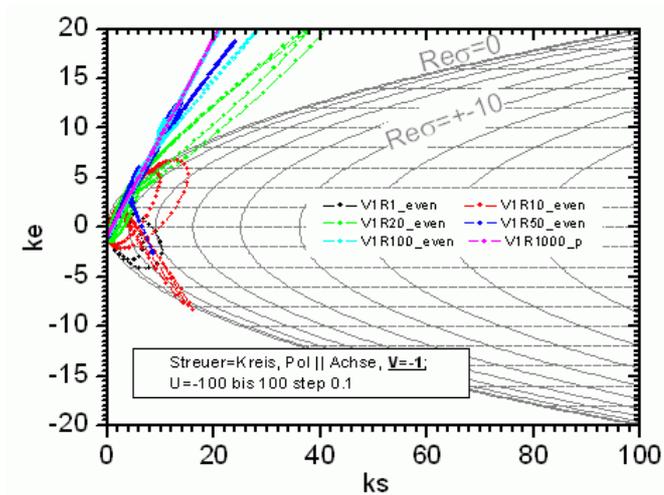
b) absorbierende Streuer ($V > 0$)



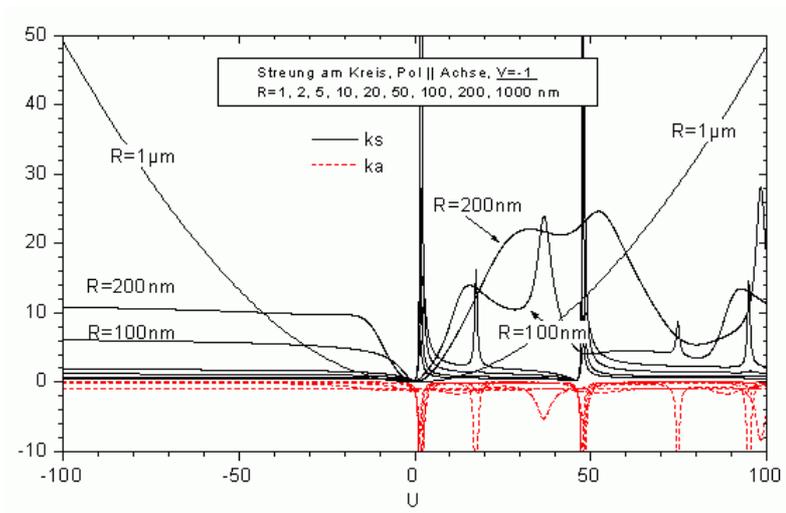
Die Punkte (farbig) liegen wieder größtenteils ausserhalb des Bereichs, der von Punktstreuern abgedeckt werden kann. Absorption heißt das Problem nicht.



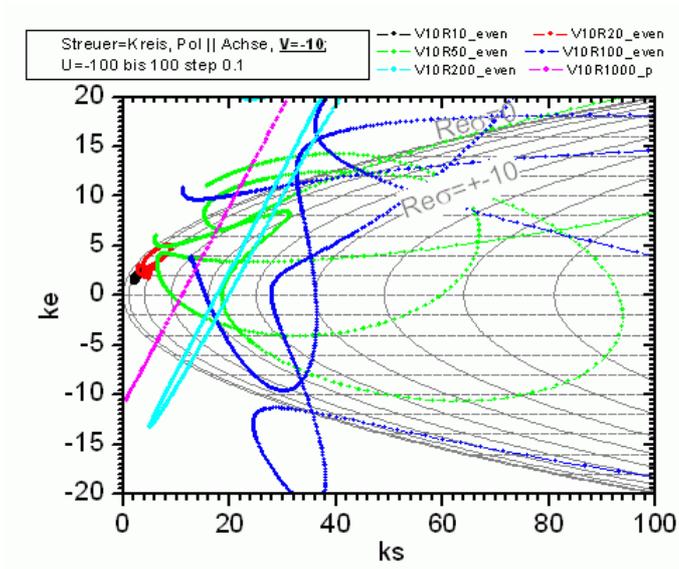
a) Streuer mit innerem Gain ($V < 0$)



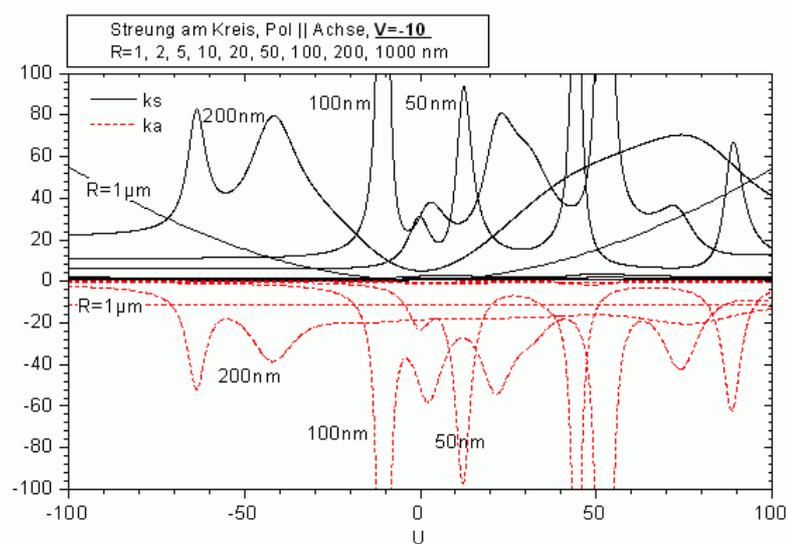
Jetzt liegen mehr Punkte (farbig) im Punktstreuereich. Sie gehören zu Resonanzen bei kleinen Radien:



Noch besser bei höherem Gain:



Jetzt im gesamten interessierenden Punktstreuerbereich reale Streuer. Sie gehören zu Resonanzen bei mittleren Radien:



Beachte: mit $U=10$ und $R=100$ bzw. 200nm erfordert das im Streuer einen (Brechindex, Gain \times cm) von $(1.2, 10^5)$ bzw. $(1.1, 3 \times 10^4)$. Bei $U=50$ sind die erforderlichen Werte $(1.9, 7 \times 10^4)$ bzw. $(1.3, 2.5 \times 10^4)$ und bei $U=0$ $(1.0, 1.2 \times 10^5)$ bzw. $(1.0, 3 \times 10^4)$. Ist das vielleicht, was in unseren Streuern passiert?