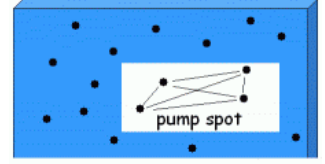


# Lasing Networks in Semiconductors: Maxwell-Bloch Model

by ede

4. August 2011

Wir betrachten zufällig oder regulär verteilte Streuer (Luftlöcher) in einem endlichen Gebiet mit Gain ohne Resonator. Das Modell von Ref. [1] für Random Laser (RL) soll auf den dynamischen Fall verallgemeinert werden. Ausgangspunkt: Maxwellgleichungen in Verbindung mit effektiven 2-Niveau-Materialgleichungen



$$\partial_t \vec{P} = (-i\Omega - \gamma)\vec{P} + \frac{d^2}{i\hbar} N \vec{E}, \quad \partial_t N = \frac{4}{\hbar} \text{Im} \left\{ \vec{E}^* (\varepsilon_0 \varepsilon_N \vec{E} + \vec{P}) \right\} + \frac{N_0 - N}{\tau}. \quad (1)$$

$\Omega$ : Resonanz-Frequenz des Mediums (Gain-Maximum),  $\gamma$ : Polarisationsdämpfung,  $N$ : Inversion,  $N_0$ : ungesättigte Inversion, inclusive Pumprate. Alle Felder hängen von  $(t, \vec{r})$  ab,  $d$  und  $\varepsilon$  von  $\vec{r}$ . In Luft gilt  $d = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ . Im Halbleiter ist  $\varepsilon = \text{const.}$  eine komplexe DK, deren Dispersion im interessierenden Frequenzband um eine Zentralfrequenz  $\omega_0$  herum vernachlässigbar sei.  $\varepsilon_N$ : ihr an die Inversion ankoppelnder Anteil (nichtdispersiver Gainbeitrag). Die für die Bandbreitenbegrenzung verantwortliche Dispersion entsteht durch die resonante Polarisation  $\vec{P}$ .

RL sind typisch mindestens  $10^6$  Kubikwellenlängen groß. Selbst die linearen Maxwellgleichungen sind dafür numerisch kaum noch lösbar. Außerdem machen sie den Netzwerkaspekt nicht explizit. Deshalb Beschränkung auf die Konfiguration von Ref. [1]: zylindrische Luftlöcher vertical in Wellenleiterschicht, Abstand groß gegen Wellenlänge, TE-Polarisation, Streuung in MIE-Approximation (ebene einlaufende Wellen), Übergang zu langsam variierenden Amplituden (Details: Anhang A). Die am Streuer  $s$  vom Streuer  $\bar{s}$  einlaufende Amplitude (Fernfeld) ist dann

$$E_{s\bar{s}}(t) = \mathcal{E}_{s\bar{s}}(t, r_{s\bar{s}}) G(k_0, r_{s\bar{s}}) e^{-i\omega_0 t}, \quad G(k, r) = \frac{\exp(ikr + i\pi/4)}{\sqrt{8\pi kr}}. \quad (2)$$

$\omega_0$ : Zentralfrequenz,  $k_0 = \omega_0 n_H / c$ ,  $n_H$ : reeller Hintergrund-Brechindex des Halbleiters. Die langsamen Amplituden und die Inversion genügen den Gleichungen vom Maxwell-Bloch-Typ

$$\begin{aligned} \partial_r \mathcal{E}_{s\bar{s}} + \frac{1}{v} \partial_t \mathcal{E}_{s\bar{s}} &= \frac{1}{2} [\bar{g}(N) - \alpha_0 - i\alpha \bar{g}(N)] \mathcal{E}_{s\bar{s}} + ik_0 \frac{\mathcal{P}_{s\bar{s}}}{2n_H^2}, \\ \partial_t \mathcal{P}_{s\bar{s}} &= i(\omega_0 - \Omega + i\gamma) \mathcal{P}_{s\bar{s}} + \frac{d^2}{i\hbar \varepsilon_0} N \mathcal{E}_{s\bar{s}}, \\ \partial_t N &= -D \nabla^2 N + \frac{N_0 - N}{\tau} + \frac{1}{\hbar} \text{Im} \{ E^* P \} - v \bar{g}(N) |E|^2 \\ \text{Randbedingung: } \mathcal{E}_{s\bar{s}}(t, 0) &= \sum_{s'} A_{s\bar{s}, \bar{s}s'} \mathcal{E}_{\bar{s}s'}(t, r_{\bar{s}s'}) G(k_0, r_{\bar{s}s'}) + F_{\bar{s}}(t). \end{aligned} \quad (3)$$

$v = c/n_H$ , light velocity in the semiconductor,  $\bar{g}(N)$ : eventueller dispersionsfreier Gainbeitrag,  $\alpha_0$ : Hintergrundabsorption im Halbleiter,  $\alpha$ : Henry-Faktor der Amplituden-Phasenkopplung,  $D$ : Diffusionskoeffizient<sup>1</sup>  $E, P$ : Gesamtfeld u. -Polarisation (s.u.),  $A_{s\bar{s}, \bar{s}s'}$ : Streu-Amplitude der bei  $\bar{s}$  von  $s'$  einlaufenden Partialwelle in die nach  $s$  auslaufende Partialwelle.  $F_{\bar{s}}(t)$ : Langevin-Kraft für die spontane Emission<sup>2</sup>. Ihr Mittelwert und alle Korrelationsfunktionen verschwinden bis auf

$$\langle F^*(t') F(t) \rangle = \beta \delta(t' - t) \quad (4)$$

<sup>1</sup>Ohne Diffusion sind die Gleichungen wahrscheinlich nicht wohlgestellt. Sie ist hier nur formal eingefügt.

<sup>2</sup>Der phänomenologische Term  $F_s(t)$  soll den Einfluss der spontanen Emission im Sinne einer fluktuierenden Langevin-Kraft erfassen. Das ist wichtig, damit der Laser unter der Schwelle nicht ganz ausgeht und Lasermodes, die zeitweise über die Schwelle kommen, auch anschwingen können. Die Überlegung ist folgende. Spontane Emission entsteht überall im gepumpten Gebiet. Sagen wir durch homogen verteilte stochastisch schwingende Dipole. Von diesen gehen entsprechend stochastische Kugelwellen aus. An jedem Streuer  $s$  werden diese aus allen Richtungen einlaufenden unkorrelierten stochastischen Wellen ihrerseits wieder gestreut. Das gibt eine isotrop von  $s$  auslaufende Kugelwelle mit stochastischer Amplitude  $F_s(t)$ . Letztere kann durch weißes Rauschen modelliert werden

Die Stärke  $\beta$  der spontanen Emission hängt eigentlich von der Streustärke von  $s$ , von der Besetzungsinversion und auch der Geometrie des Gaingebietes ab. Ich behandle es aber als einen (kleinen) Parameter.

Die vollen Feld- und Polarisationsamplituden am Orte  $\vec{r}$  sind

$$E(t, \vec{r}) = \sum_{\vec{s}} \mathcal{E}_{\vec{s}, \vec{e}}(t, x) G(k_0, x) e^{-i\omega_0 t} + \text{ASE} \quad \text{und} \quad P(t, \vec{r}) = \varepsilon_0 \sum_{\vec{s}} \mathcal{P}_{\vec{s}, \vec{e}}(t, x) G(k_0, x) e^{-i\omega_0 t}, \quad (5)$$

$x, \vec{e}$ : Betrag und Richtung von  $\vec{x}_{\vec{s}} = \vec{r} - \vec{r}_{\vec{s}}$ . ASE: spontane Emission, die direkt zum Punkte  $\vec{r}$  gelangt. Die langsamen Amplituden  $\mathcal{E}_{\vec{s}, \vec{e}}(t, r), \mathcal{P}_{\vec{s}, \vec{e}}(t, r)$  sind hier Lösungen von

$$\partial_r \mathcal{E}_{\vec{s}, \vec{e}} + \frac{\sqrt{\varepsilon_H}}{c} \partial_t \mathcal{E}_{\vec{s}, \vec{e}} = \frac{1 - i\alpha}{2} \bar{g}(N) \mathcal{E}_{\vec{s}, \vec{e}} + ik_0 \frac{\mathcal{P}_{\vec{s}, \vec{e}}}{2\sqrt{\varepsilon_H}}, \quad (6)$$

$$\partial_t \mathcal{P}_{\vec{s}, \vec{e}} = i(\omega_0 - \Omega + i\gamma) \mathcal{P}_{\vec{s}, \vec{e}} + \frac{d^2}{i\hbar\varepsilon_0} N \mathcal{E}_{\vec{s}, \vec{e}}, \quad (7)$$

mit den Randbedingungen

$$\mathcal{E}_{\vec{s}, \vec{e}}(t, 0) = \sum_{s'} A_{\vec{e}, \vec{s}s'} \mathcal{E}_{\vec{s}s'}(t, r_{\vec{s}s'}) G(k_0, r_{\vec{s}s'}) + F_{\vec{s}}(t), \quad (8)$$

wo  $A_{\vec{e}, \vec{s}s'}$  die Streuamplitude für Wellen ist, die von  $s'$  kommend an  $\vec{s}$  in Richtung von  $\vec{e}$  gestreut werden.

## Diskussion

Die erste Gleichung in (3) ist eine Propagationsgleichung für das Feld entlang der Verbindungslinien zwischen den Streuern. Auch die Polarisation und die Inversion braucht man nur lokal entlang dieser Linien. Die stimulierte Rekombination in der Inversionsgleichung erfordert aber das Gesamtfeld in jedem Punkt auf diesen Linien, wozu Propagationsgleichungen von jedem Streuer zu jedem Punkt auf den Verbindungslinien gerechnet werden müssen. Das ist unpraktisch. Radikale Vereinfachung erforderlich.

## Literatur

- [1] S. Kalusniak, H.-J. Wünsche, and F. Henneberger, "Random Semiconductor Lasers: Scattered versus Fabry-Perot Feedback", Phys. Rev. Lett. **106**, 013901 (2011)

## A Streuung mit Maxwell-Bloch

Zylindrisches Luftloch in Halbleiter mit Besetzungsinversion. Senkrecht zur Achse einlaufende ebene TE-Welle mit langsam variierender Amplitude. Gestreute Amplitude?

Die gestreute Welle ist im Fernfeld wieder TE, Polarisation senkrecht zu Ausbreitungsrichtung und kann durch skalare Amplitude beschrieben werden. Ihr positiver Frequenzanteil genügt der 2D skalaren Wellengleichung mit 2-Niveau-Polarisation ( $N$  hier als gegeben vorausgesetzt)

$$\left[ \nabla^2 - \frac{\varepsilon(\vec{r})}{c^2} \partial_t^2 \right] E = \mu_0 \partial_t^2 P, \quad \partial_t P = (-i\Omega - \gamma)P + \frac{d^2}{i\hbar} N E, \quad (9)$$

Streuproblem: Man löse (9) für  $E = E_s + E_i$ , wobei  $E_i$  ein einfallendes ebenes Wellenpaket im homogenen Halbleiter (also ohne Luftloch) ist und  $E_s$  außen asymptotisch nur auslaufende Wellen enthält<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Beachte: im Unterschied zum Hauptteil des Manuskripts bezeichnet der Index  $s$  in diesem Anhang die Streuwelle und nicht einen Streuer.

Die einfallende Welle genüge also den Gleichungen

$$\left[ \nabla^2 - \frac{\varepsilon_H}{c^2} \partial_t^2 \right] E_i = \mu_0 \partial_t^2 P_i \quad \partial_t P_i = (-i\Omega - \gamma)P_i + \frac{d^2}{i\hbar} N E_i. \quad (10)$$

Beachte: hier steht die räumlich konstante Halbleiter-DK, auch im Bereich des Luftlochs. Für die Streuwelle ergibt das

$$\left[ \nabla^2 - \frac{\varepsilon}{c^2} \partial_t^2 \right] E_s = \mu_0 \partial_t^2 P_s + \frac{\varepsilon - \varepsilon_H}{c^2} \partial_t^2 E_i \quad \partial_t P_s = (-i\Omega - \gamma)P_s + \frac{d^2}{i\hbar} N E_s. \quad (11)$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für die Streuwelle mit dem zweiten Term der ersten Gleichung als Inhomogenität, welche die Quelle der Streuwelle ist und ausserhalb des Streuers verschwindet.

Die einfallende Welle sei nun eine schwach modulierte ebene Welle,

$$E_i = \mathcal{E}_i e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}. \quad (12)$$

Hier sei  $k_0 = \omega_0 \sqrt{\varepsilon_H}/c$  die Wellenzahl des Halbleiters bei der Frequenz  $\omega_0$  *ohne* den Polarisationsbeitrag und  $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i(t, z)$  eine in beiden Variablen langsam variierende Amplitude, die sich für vorgegebene Modulation  $\mathcal{E}_i(t, 0)$  eindeutig aus (10) ergibt.

Die Lösung des Streuproblems ohne Modulation ( $\mathcal{E}_i$  zeitunabhängig, o.B.d.A  $\mathcal{E}_i = 1$  am Streuer) ist bekannt. Das Fernfeld der gestreuten Welle ist dann

$$E_s^{\omega_0} = G(k(\omega_0), r) A(\omega_0, \theta) e^{-i\omega_0 t} \quad \text{mit} \quad G(k, r) = \frac{\exp(ikr + i\pi/4)}{\sqrt{8\pi kr}} \quad (13)$$

und der Mie-Streuamplitude  $A(\omega_0, \theta)$ . Die zugehörige Polarisation ist

$$P_s^{\omega_0} = \varepsilon_0 \chi(\omega_0) E_s^{\omega_0} \quad \text{mit der Suszeptibilität} \quad \chi(\omega_0) = \frac{d^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{N}{\omega_0 - \Omega + i\gamma} \quad (14)$$

und  $k(\omega_0) = \omega_0 \sqrt{\varepsilon_H + \chi(\omega_0)}/c$ .

Nun lassen wir eine langsam variierende einfallende Amplitude zu. Es ist naheliegend, die Felder durch die bekannte Lösung  $E_s^0$  eines Problems nullter Ordnung in der Form

$$E_s = \mathcal{E}_s E_s^0 \quad \text{und} \quad P_s = \mathcal{P}_s \varepsilon_0 E_s^0 \quad (15)$$

auszudrücken und anzunehmen, dass  $\mathcal{E}_s, \mathcal{P}_s$  langsam variieren, so dass ihre Ableitungen nur in jeweils niedrigster Ordnung mitzunehmen sind. Als nullte Ordnung wähle ich die Streuung einer ebenen Welle ohne dispersive Polarisation.  $E_s^0$  ist dann durch (13) mit  $\chi = 0$ , d.h.  $k(\omega_0) = k_0$  gegeben. Die resultierende Amplitudengleichung lautet dann

$$\vec{n} \cdot \nabla \mathcal{E}_s + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} \partial_t \mathcal{E}_s = i \frac{\omega_0}{2\sqrt{\varepsilon}c} \left[ \mathcal{P}_s + (\varepsilon - \varepsilon_H)(\mathcal{E}_s - \mathcal{E}_i) \frac{e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}}{E_s^0} \right], \quad \vec{n} = \frac{c \nabla E_s^0}{i \omega_0 \sqrt{\varepsilon} E_s^0}, \quad (16)$$

$$\partial_t \mathcal{P}_s = i(\omega_0 - \Omega + i\gamma) \mathcal{P}_s + \frac{d^2}{i\hbar \varepsilon_0} n \mathcal{E}_s = i(\omega_0 - \Omega + i\gamma) [\mathcal{P}_s - \chi(\omega_0) \mathcal{E}_s]. \quad (17)$$

Testen wir das für monochromatische Einstrahlung mit Frequenz  $\omega$  nahe bei  $\omega_0$ . Zunächst für den asymptotischen Bereich, wo wir die exakte Lösung kennen. Dort ist  $\vec{n} = \vec{e}_r$  und (17) liefert  $\mathcal{P}_s = \chi(\omega) \mathcal{E}_s$ , mithin wird (16) zu

$$\partial_r \mathcal{E}_s = ik \mathcal{E}_s, \quad \text{also} \quad \mathcal{E}_s(r) = \mathcal{E}_0 e^{-i[(\omega - \omega_0)t - kr]} \quad \text{mit} \quad k = k_0 \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} + \frac{\chi(\omega)}{2\varepsilon_H} \right). \quad (18)$$

Die exakte Lösung ist

$$\mathcal{E}_s = \frac{E_s^\omega}{E_s^0} = \frac{A(\omega, \theta)}{A_0(\omega_0, \theta)} \sqrt{\frac{k_0}{k(\omega)}} e^{-i[(\omega - \omega_0)t - (k(\omega) - k_0)r]} \quad (19)$$

Der erste Faktor kann getrost 1 gesetzt werden, wenn das Frequenzband schmal ist gegen die Umlauffrequenz im Luftloch mit Durchmesser  $D$ , also  $|\omega - \omega_0|D/c \ll 1$ . Der zweite Faktor ist auch praktisch 1. Im Exponenten nehmen wir kleine Größen (Frequenzdifferenz,  $\chi$ ) nur bis zur ersten Ordnung:

$$k(\omega) - k_0 = \left( \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_H + \chi(\omega)} - k_0 \right) \approx k_0 \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} + \frac{\chi(\omega)}{2\varepsilon_H} \right). \quad (20)$$

Das ist genau (18), wenn man dort  $\mathcal{E}_0 = 1$  wählt.

### Zusammenfassung:

Wird eine langsam modulierte ebene Welle eingestrahlt, deren Amplitude  $\mathcal{E}_i(t, z) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$  ist, so gilt für das Fernfeld der Streuwelle näherungsweise

$$\begin{aligned} E_s(t, \vec{r}) &= \mathcal{E}_s(t, r) G(k_0, r) A(\omega_0, \theta) e^{-i\omega_0 t} \quad \text{und die Amplitude ist Lösung von} \\ \partial_r \mathcal{E}_s + \frac{\sqrt{\varepsilon_H}}{c} \partial_t \mathcal{E}_s &= ik_0 \frac{\mathcal{P}_s}{2\varepsilon_H}, \quad \text{R.B.:} \quad \mathcal{E}_s(t, 0) = \mathcal{E}_i(t, 0), \\ \partial_t \mathcal{P}_s &= i(\omega_0 - \Omega + i\gamma) \mathcal{P}_s + \frac{d^2}{i\hbar \varepsilon_0} n \mathcal{E}_s. \end{aligned} \quad (21)$$

Anmerkung: die mittlere Gleichung ist linear in den kleinen Größen Ableitungen von  $\mathcal{E}_s$  und  $\mathcal{P}_s$ . Eine weitere kleine Größe ist  $\delta\varepsilon_H = \varepsilon_H - n_H^2$ ,  $n_H$ : reeller Untergrund-Brechindex des Halbleiters. Es ist sinnvoll, auch diesbezüglich zu linearisieren, also in der mittleren Gleichung  $\varepsilon_H$  durch  $n_H^2$  zu ersetzen und  $k_0 = \omega_0 n_H / c$ . Nimmt man das gleiche  $k_0$  in der ersten Gleichung, entsteht der nicht notwendig kleine exponentielle Faktor  $e^{i\delta k r}$  mit  $\delta k = k_0(\varepsilon_H / n_H^2 - 1)$ . Dieser kann in die Definition für  $\mathcal{E}_s$  aufgenommen werden, was zum Zusatzterm  $i\delta k \mathcal{E}_s$  auf der rechten Seite der mittleren Gleichung führt. Das ist die Form dieser Gleichungen im Hauptteil des Manuskripts.