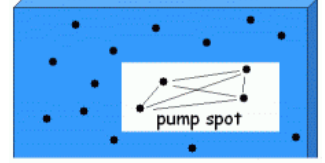


Towards a Network Model of Scatterer Lasers

by ede

8. August 2011

Wir betrachten Laser aus zufällig oder regulär verteilten Streuern in einem endlichen Gebiet mit Gain ohne sonstigen Resonator. Kann man einen solchen Laser als ein laserndes Netzwerk auffassen, wie nebenstehende Abbildung suggeriert? Wie lauten die Gleichungen für die Dynamik eines entsprechenden Netzwerkmodells?



Die folgende Diskussion dieser Fragen orientiert sich an den Maxwell-Bloch Gleichungen. Das Material mit Gain wird durch ein effektives 2-Niveau-System modelliert. Aus den Maxwellgleichungen für das Streuproblem werden verschiedene Modelle absteigender Komplexität abgeleitet.

1 Volles Maxwell-Bloch Modell

Exemplarische Beschränkung auf die Konfiguration von Ref. [1]. Vertikale zylindrische Luftlöcher in einer Halbleiterschicht. Abstand groß gegen Wellenlänge. Streuung horizontal laufender quasi ebener TE-Wellen. Fernfeld-Amplitude der Streuwelle: $E(t, \vec{r}) = \mathcal{E}(t, r)G(k_0, r)A(\vec{n}_{in}\vec{n}_{out})e^{-i\omega_0 t}$. In [2] für die langsamen Amplituden hergeleitet¹

$$\partial_r \mathcal{E}_{s\bar{s}} + \frac{1}{v} \partial_t \mathcal{E}_{s\bar{s}} = \frac{1}{2} [(1 - i\alpha)\bar{g}(N) - \alpha_0] \mathcal{E}_{s\bar{s}} + \mathcal{P}_{s\bar{s}}, \quad (1)$$

$$\text{Randbedingung: } \mathcal{E}_{s\bar{s}}(t, 0) = \sum_{s'} A(\vec{n}_{s\bar{s}}\vec{n}_{s's'}) \mathcal{E}_{s's'}(t, r_{s's'}) G(k_0, r_{s's'}) + F_{\bar{s}}(t), \quad (2)$$

$$\partial_t \mathcal{P}_{s\bar{s}} = i(\omega_0 - \Omega + i\gamma) \mathcal{P}_{s\bar{s}} + \frac{1}{2} \gamma g'_r N \mathcal{E}_{s\bar{s}}, \quad (3)$$

$$\partial_t N = -D \nabla^2 N + \frac{N_0 - N}{\tau} + \frac{1}{\hbar} \text{Im} \{E^* P\} - v \bar{g}(N) |E|^2, \quad (4)$$

$$\mathcal{E}(t, \vec{r}) = \sum_{\bar{s}} \mathcal{E}_{\bar{s}, \vec{e}}(t, x_{\bar{s}}) G(k_0, x_{\bar{s}}) \quad \text{und} \quad \mathcal{P}(t, \vec{r}) = \frac{2n^2 \varepsilon_0}{ik_0} \sum_{\bar{s}} \mathcal{P}_{\bar{s}, \vec{e}}(t, x_{\bar{s}}) G(k_0, x_{\bar{s}}). \quad (5)$$

Diskussion:

Ich möchte zuerst den Bezug zum Modenmodell von Ref. [1] herstellen. Als (instantane) Moden bezeichne ich Lösungen der rein optischen Gleichungen für eingefrorene Inversion (N zeitlich konstant) und ohne spontante Emission. Das sind lineare Gleichungen, die sich durch Exponentialansatz $\sim e^{i(\omega - \omega_0)t}$ lösen lassen. Die Polarisationsgleichung ist dann algebraisch mit der Lösung (den Index $s\bar{s}$ lasse ich hier weg)

$$\mathcal{P} = ik_d(\omega, N) \mathcal{E} \quad \text{mit dem dispersiven Beitrag zur Wellenzahl } k_d(\omega, N) = \frac{\gamma}{\omega - \Omega + i\gamma} \frac{g'_r N}{2}. \quad (6)$$

¹Hier z.T. leicht modifizierte Bezeichnungen: $\mathcal{E}_{s\bar{s}}(t, r)$: von \bar{s} nach s einlaufende langsame Amplitude, $\mathcal{P}_{s\bar{s}}$: zugehörige Polarisationsamplitude, v : Licht(gruppen)geschwindigkeit im Halbleiter, N : Inversion, $\bar{g}(N)$: eventueller dispersionsfreier Gainbeitrag, α_0 : Hintergrundabsorption im Halbleiter, α : Henry-Faktor der Amplituden-Phasenkopplung, $A(\vec{n}_{s\bar{s}}\vec{n}_{s's'})$: Streu-Amplitude der bei \bar{s} von s' einlaufenden Partialwelle in die nach s auslaufende Partialwelle. $\vec{n}_{s\bar{s}}$: Einheitsvektor von \bar{s} Richtung s' , $r_{s\bar{s}}$: Streuerabstand, $F_{\bar{s}}(t)$: Langevin-Kraft für die spontane Emission, ω_0 : Zentralfrequenz, Ω : Resonanz-Frequenz des Mediums (Gain-Maximum), γ : Polarisationsdämpfung, g'_r : Anstieg des dispersiven Gainmaximums mit N , D : Diffusionskoeffizient, N_0 : ungesättigte Inversion inclusive Pumprate, τ : Inversionslebensdauer, \mathcal{E}, \mathcal{P} : totale Amplituden bei \vec{r} , $k_0 = \omega_0 n/c$, n : reeller Hintergrund-Brechindex des Halbleiters, $\vec{x}_{\bar{s}} = \vec{r} - \vec{r}_{\bar{s}}$, \vec{e} : Richtung von \vec{x} , $G(k, r) = \exp(ikr + i\pi/4)/\sqrt{8\pi kr}$.

Die Ortsintegration der \mathcal{E} -Gleichung ist dann einfach. Man gelangt zu

$$E_{s\bar{s}}(\omega) = \exp\left(i \int_0^{r_{s\bar{s}}} k(\omega, \vec{r}_s + r\vec{n}_{s\bar{s}}) dr\right) \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k_0 r}} \sum_{s'} A(\vec{n}_{s\bar{s}} \vec{n}_{s'\bar{s}'}) E_{s'\bar{s}'}(\omega) \quad (7)$$

$$k(\omega, \vec{r}) = \left[k_0 - \alpha \frac{\bar{g}(N)}{2} + \frac{\omega - \omega_0}{v} + \Re k_d(\omega, N) \right] - \frac{i}{2} [\bar{g}(N) - 2\Im k_d(\omega, N) - \alpha_0], \quad (8)$$

wobei $E_{s\bar{s}}(\omega) = G(k_0, r_{s\bar{s}}) \mathcal{E}_{s\bar{s}}(\omega)$ die in [1] verwendeten vollen Amplituden sind. Nimmt man wie dort räumlich konstantes N und damit k an, so ist (7) die Modengleichung (2) von Ref. [1] (bis auf k_0 statt k im Nenner, was unwesentlich ist). Bei schwacher Streuung wird das k -Spektrum durch die voneinander entferntesten Streuer bestimmt und die Imaginärteile fluktuieren um einen Mittelwert, der von $\Re(k)$ unabhängig ist (Spektrum vom Fabry-Perot Typ). Dieses flache k -Spektrum wird durch die Lorentz-Kurve $\Im k_d(\omega, N)$ in Gleichung (8) in ein ω -Spektrum transformiert, bei dem die Moden nahe Ω eine kleinere Schwelle haben als alle anderen. Entsprechend tragen vorwiegend diese zum Lasern bei und die Bandbreite der Emission bleibt begrenzt.

Wenn die Inversion räumlich variiert, liefert das Nullsetzen der Systemdeterminante von (7) direkt die möglichen Modenfrequenzen. Insofern ist dies eine Verallgemeinerung des Modells von Ref. [1].

Damit ist das Maxwell-Bloch Modell (1) bis (5) insgesamt eine Verallgemeinerung dieses statischen Modenmodells. Ist es aber ein Netzwerkmodell? Die erste Gleichung ist eine Propagationsgleichung für das Feld entlang der Verbindungslinien zwischen den Streuern. Auch die Polarisation und die Inversion braucht man nur lokal entlang dieser Linien. Die stimulierte Rekombination in der Inversionsgleichung erfordert aber das Gesamtfeld in jedem Punkt auf diesen Linien, wozu (1) und (3) entsprechende Propagationsgleichungen von jedem Streuer zu jedem Punkt auf den Verbindungslinien zu lösen sind. Das ist schon kein Netzwerk mit abzählbar vielen Verbindungen mehr. Es ist außerdem unpraktisch. Radikale Vereinfachung erforderlich.

2 Maxwell-Bloch Modell mit stückweise konstanter Inversion

Vereinfachung: räumlich stückweise konstante Inversion.

Sehr radikal wäre: N räumlich konstant. Dann sind aber kaum noch Effekte wie Multistabilität zu erwarten. Denn N ist außerdem adiabatisch langsam, die jeweilige optische Mode mit kleinster Schwelle dominiert. Kann auch noch interessant sein. Reichhaltiger: Aufteilung des Gebiets in endliche Teilgebiete mit (räumlich) konstantem N . Wie? Warum nicht so: jeder Punkt gehört zum Gebiet des nächsten Streuers, d.h.,

$$N(t, \vec{r}) = N_s(t) \quad \text{if} \quad |\vec{r} - \vec{r}_s| < \min_{\bar{s} \neq s} |\vec{r} - \vec{r}_{\bar{s}}|. \quad (9)$$

Damit das mit der N -Gleichung verträglich ist, muss man dort die die rechten Seiten über die Teilgebiete mitteln und den Transport über deren Grenzen vernachlässigen ($D = 0$). Die Felder gehen immer quadratisch ein. Mittelwerte von in den Streuindizes nichtdiagonalen Termen sind wegen der schnellen Oszillationen von G klein und können vernachlässigt werden. Bei den glatten Diagonaltermen mit $\bar{s} \neq s$ sind die Werte im Zentrum des Teilgebietes sicher gute Repräsentanten für den Mittelwert. Der Diagonalterm mit $\bar{s} = s$ ist bei schwacher Streuung klein und wird weggelassen (Strich an Summe unten). Also vereinfacht sich die Inversionsgleichung und man gelangt zu

$$\partial_r \mathcal{E}_{s\bar{s}} + \frac{1}{v} \partial_t \mathcal{E}_{s\bar{s}} = \frac{1}{2} [(1 - i\alpha) \bar{g}(N) - \alpha_0] \mathcal{E}_{s\bar{s}} + \mathcal{P}_{s\bar{s}}, \quad (10)$$

$$\text{Randbedingung:} \quad \mathcal{E}_{s\bar{s}}(t, 0) = \sum_{s'} A(\vec{n}_{s\bar{s}} \vec{n}_{\bar{s}s'}) \mathcal{E}_{\bar{s}s'}(t, r_{\bar{s}s'}) G(k_0, r_{\bar{s}s'}) + F_{\bar{s}}(t), \quad (11)$$

$$\partial_t \mathcal{P}_{s\bar{s}} = i(\omega_0 - \Omega + i\gamma) \mathcal{P}_{s\bar{s}} + \frac{1}{2} \gamma g'_r N \mathcal{E}_{s\bar{s}}, \quad (12)$$

$$\partial_t N_s = \frac{N_0 - N_s}{\tau} + \sum_{\bar{s}}' |G(k_0, r_{s\bar{s}})|^2 \left[\frac{2n^2 \varepsilon_0}{ik_0 \hbar} \text{Im} \{ \mathcal{E}_{s\bar{s}}^*(t, r_{s\bar{s}}) \mathcal{P}_{s\bar{s}}(t, r_{s\bar{s}}) \} - v \bar{g}(N_s) |\mathcal{E}_{s\bar{s}}(t, r_{s\bar{s}})|^2 \right]. \quad (13)$$

Diskussion:

Die Modengleichungen bleiben unverändert (7) und (8) - nur dass eben k stückweise konstant wird. Die Bandbreitenbegrenzung durch den Gain-Lorenzian bleibt intakt.

Im Zeitbereich hat man jetzt nur noch eine Inversionsgleichung für jeden Streuer. Die hier in die stimulierte Emission eingehenden langsamen Amplituden erfordern die Lösung der Propagationsgleichungen nur noch entlang der Verbindungslinien. Das entspricht einem Netzwerk mit N_s Knoten, von denen jeder mit jedem verbunden ist. Allerdings ist die Signalausbreitung entlang der Verbindungen recht komplex. Es sind PDE zu lösen. Weitere Vereinfachungen scheinen sinnvoll.

3 Modell als zeitverzögerte Abbildung

Vereinfachung: keine Dispersion ($g'_r = 0$)

Das ist eine ziemlich radikale Vereinfachung. Aber lehrreich. Die Propagationsgleichung ergibt zunächst

$$\mathcal{E}_{s\bar{s}}(t, r_{s\bar{s}}) = \exp \left\{ \int_0^{\tau_{s\bar{s}}/2} v[\kappa_s(t-t') + \kappa_{\bar{s}}(t-t' - \tau_{s\bar{s}}/2)] dt' \right\} \mathcal{E}_{s\bar{s}}(t - \tau_{s\bar{s}}, 0), \quad \tau_{s\bar{s}} = r_{s\bar{s}}/v,$$

$$\kappa_s(t) = \frac{1}{2}[(1 - i\alpha)\bar{g}(N(t)) - \alpha_0]. \quad (14)$$

Vereinfachung: Inversion adiabatisch langsam

D.h., Änderungen der Inversion während der Laufzeiten zwischen Streuern vernachlässigbar. Abstände unter 1 mm entsprechen weniger als 10 ps Laufzeit, so dass diese Bedingung meist gut erfüllt ist. Das Integral im Exponenten kann deshalb relativ grob genähert werden. Am einfachsten ist es, den Integranden gleich dem aktuellen Mittelwert $\kappa_{s\bar{s}}(t) = [\kappa_s(t) + \kappa_{\bar{s}}(t)]/2$ zu setzen. Das führt auf

$$\mathcal{E}_{s\bar{s}}(t) = e^{\kappa_{s\bar{s}}(t)r_{s\bar{s}}} \left[\sum_{s'} A(\vec{n}_{s\bar{s}}\vec{n}_{\bar{s}s'}) \mathcal{E}_{\bar{s}s'}(t - \tau_{s\bar{s}}) G(k_0, r_{\bar{s}s'}) + F_{\bar{s}}(t - \tau_{s\bar{s}}) \right], \quad (15)$$

$$\partial_t N_s = \frac{N_0 - N_s}{\tau} - v\bar{g}(N_s) \sum_{\bar{s}} |G(k_0, r_{s\bar{s}})|^2 |\mathcal{E}_{s\bar{s}}|^2. \quad (16)$$

Diskussion:

Dies ist ein vollständiges Gleichungssystem für die Zeitfunktionen $\mathcal{E}_{s\bar{s}}(t)$ und $N_s(t)$. Die Amplitudengleichungen sind keine PDE mehr, sondern ein System linearer Abbildungen mit Zeitverzögerung.

Die Modengleichung (7) bleibt unverändert - nur dass eben k stückweise konstant ist und $k_d = 0$ in (8). Letzteres hebt insbesondere die die Bandbreitenbegrenzung durch den Gain-Lorenzian auf. Entsprechend kann man in der Zeitdomäne eigentlich auch keine glatten Amplitudenfunktionen erwarten. Das bedeutet aber, dass die Voraussetzung langsam variierender Amplituden irgendwann verletzt werden kann, wodurch das Gleichungssystem ungültig würde. Unter welchen Bedingungen das wirklich eintritt – oder auch nicht – ist mir unklar.

4 Modelle als zeitverzögerte Abbildung mit Bandbreitenfilter

Es ist sinnvoll, ab jetzt $\omega_0 = \Omega$ zu setzen. Bandbreitenbegrenzung kann durch folgende Filterung der Abbildung erzwungen werden.

$$T_{s\bar{s}} \partial_t \mathcal{E}_{s\bar{s}} + \mathcal{E}_{s\bar{s}} = e^{\kappa_{s\bar{s}}(t)r_{s\bar{s}}} \left[\sum_{s'} A(\vec{n}_{s\bar{s}} \vec{n}_{s\bar{s}'}) \mathcal{E}_{s\bar{s}'}(t - \tau_{s\bar{s}}) G(k_0, r_{s\bar{s}'}) + F_{s\bar{s}}(t - \tau_{s\bar{s}}) \right], \quad (17)$$

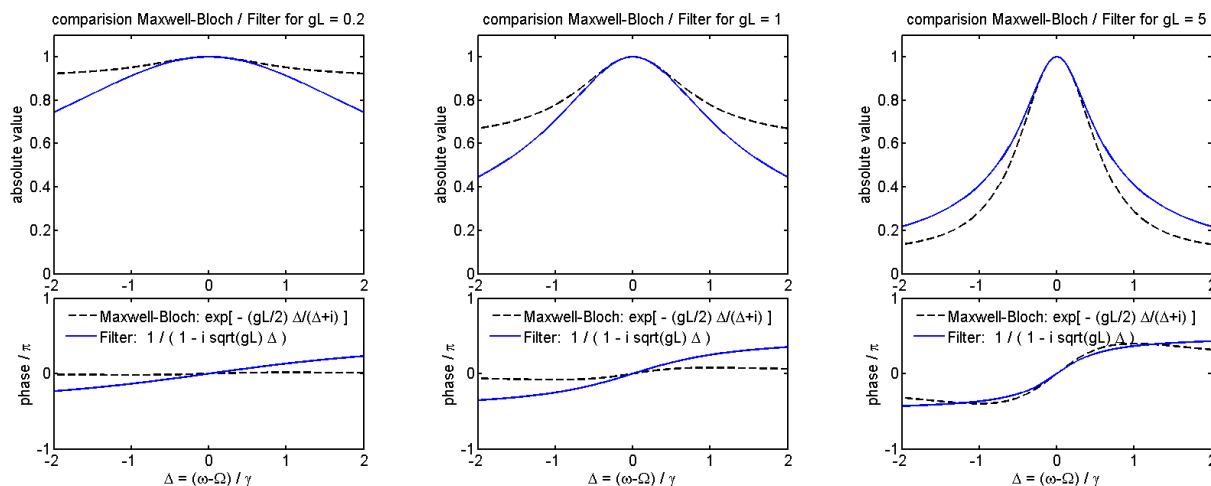
$$\partial_t N_s = \frac{N_0 - N_s}{\tau} - v\bar{g}(N_s) \sum_{s\bar{s}} |G(k_0, r_{s\bar{s}})|^2 |\mathcal{E}_{s\bar{s}}|^2. \quad (18)$$

Diskussion:

$T_{s\bar{s}} = 0$ entspricht dem ungefilterten Modell. Endliches $T_{s\bar{s}}$ entspricht einer Faltung der rechten Seite mit $e^{-t/T_{s\bar{s}}}$. Für die Modengleichung (7) bedeutet das Division der rechten Seite durch $1 + i(\omega - \Omega)T_{s\bar{s}}$. Das soll die Wirkung des vom vernachlässigten dispersiven Gain herrührenden Faktors $\exp(ik_d(\omega, N))$ möglichst gut approximieren. Der Betrag wird für kleine Frequenzabweichungen optimal approximiert, wenn

$$T_{s\bar{s}} = \frac{\sqrt{g r_{s\bar{s}}}}{\gamma} \quad \text{mit} \quad g = g'_r N. \quad (19)$$

Lange Abstände filtern stark, kurze schwach. Die Abbildungen vergleichen beide Varianten quantitativ.



Wenn man korrekter sein will, muss man halt das komplexere Maxwell-Bloch Modell in Kauf nehmen.

5 Minimalmodell: Punktstreuerlimit als zeitverzögerte Abbildung mit Filter

Bei Punktstreuern sind die Mie-Amplituden A Konstanten und können in (17) aus der Summe gezogen werden. Die Summe wird dann die am Streuer s einlaufende langsame Gesamtamplitude $\mathcal{E}_s(t) = \sum_{\bar{s}}' \mathcal{E}_{s\bar{s}}(t)$. Um zu einem geschlossenen Gleichungssystem für diese Größe zu kommen, muss allen bei s einlaufenden Amplituden das gleiche effektive T_s zugeordnet und die Intensität in der stimulierten Rekombination durch $|\mathcal{E}_s|^2$ approximiert werden. So ergibt sich

$$T_s \partial_t \mathcal{E}_s(t) + \mathcal{E}_s(t) = \sum_{\bar{s}}' e^{\kappa_{s\bar{s}}(t)r_{s\bar{s}}} G(k_0, r_{s\bar{s}}) [A\mathcal{E}_{\bar{s}}(t - \tau_{s\bar{s}}) + F_{\bar{s}}(t - \tau_{s\bar{s}})], \quad (20)$$

$$\partial_t N_s(t) = \frac{N_0 - N_s}{\tau} - v\bar{g}(N_s)|\mathcal{E}_s|^2. \quad (21)$$

Diskussion:

Nur noch eine Amplitude und eine Inversion für jeden Streuer. Obwohl nur für extrem schwache Streuung gültig, kann dies doch als Prototyp und Referenzmodell für die Dynamik dienen.

Bleibt noch der effektive Bandbreitenparameter festzulegen. Da weit voneinander entfernte Streuer die Schwelle bestimmen, scheint mir folgende Wahl sinnvoll zu sein:

$$T_s = \frac{\sqrt{g_r' N \max_{\bar{s} \neq s} r_{s\bar{s}}}}{\gamma} \quad \text{für } N > 0 \text{ und sonst } T_s = 0. \quad (22)$$

Literatur

- [1] S. Kalusniak, H.-J. Wünsche, and F. Henneberger, "Random Semiconductor Lasers: Scattered versus Fabry-Perot Feedback", Phys. Rev. Lett. **106**, 013901 (2011)
- [2] ede, "Lasing networks in semiconductors: Maxwell-Bloch model", manuscript 4.8.11