

SOA-Equalizer mit TWE und 4WM – quasistationärer Input –

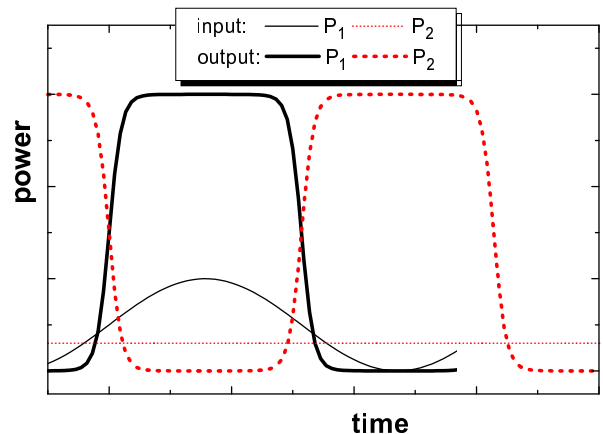
Ede, 5. Februar 2001

1 Einleitung

Ich beziehe mich mal wieder auf Hans-Peter Noltings Vortrag vom 11.1.01. Und zwar auf den ersten Teil zum Equalizer.

Die Simulationen zeigten folgendes. Wenn man kleines DC-Signal P_1 bei Wellenlänge λ_1 plus etwas größeres periodisches Signal $P_0(t)$ bei weit entfernter Wellenlänge λ_0 in einen hinreichend langen SOA¹ eingespeist, zeigen die Intensitäten P_1, P_0 , die am anderen Ende des SOA herauskommen folgendes Zeitverhalten:

- beide entsprechend periodisch wie das Eingangssignal
- Jedes P_i schaltet während einer Periode je einmal zwischen fast 0 und einer Maximalleistung P_{max} hin und her.
- Dieses so, daß $P_1 + P_0$ praktisch konstant bleibt.
- Bei abnehmender Frequenz des Input-Signals P_0 bleibt der Effekt bestehen. Im Output schaltet die Intensität während einer Periode einmal von Welle 0 auf Welle 1 und einmal zurück. Dabei hängt die Dauer der Umschaltvorgänge kaum von der Frequenz ab.
- Der Effekt verschwindet, wenn man die nichtlineare Gainsättigung abschaltet ($\varepsilon = 0$ in $g = g'(N - N_t)/(1 + \varepsilon S)$, S =Photonendichte).



Ich will untersuchen, ob man so was mit einfachen Modellgleichungen modellieren kann.

Dabei beschränke ich mich auf quasistationären Input, d.h. hinreichend kleine Signalfrequenzen. Entsprechend Punkt d) gibt es dann lange Perioden, in denen die Intensitäten hinten konstant sind. Und zwar entweder $P_0 \gg P_1$ oder umgekehrt, unbeeinflusst von der langsamen Variation des Signals am Input.

Ich vermute, daß jeweils die Welle mit der kleineren Inputintensität durch die andere unterdrückt wird.

Wie kann das aber sein, wenn $S = S_1 + S_2$, so daß beide Intensitäten in den Sättigungsnenner symmetrisch über das gleiche ε eingehen?

Ich werde zeigen, daß dies im Rahmen des TWE-Modells automatisch infolge der Wellenmischung herauskommt.

¹Semiconductor Optical Amplifier

2 Travelling-Wave-Modell mit Gain-Sättigung

Grundsätzlich kann man vom Travelling-Wave-Modell starten. Wegen der fehlenden Rückkopplung braucht man aber keine rückwärtslaufende Welle, sondern man hat nur eine vorwärts laufende mit der langsam variierenden Amplitude $f(t, z)$. Die entsprechenden Gleichungen für diese wären (ohne spontane Emission)

$$(\partial_t + v_g \partial_z) f = \frac{v_g}{2} [g - \alpha] f \quad \text{und} \quad \partial_t N = \frac{J}{ewd} - \frac{N}{\tau_e} - v_g g S \quad \text{mit} \quad g = \frac{g'(N - N_t)}{1 + \varepsilon S} \quad \text{und} \quad S = f^* f. \quad (2.1)$$

Die Symbole haben folgende Bedeutung, bei Konstanten wird gleich der Standardwert mit angegeben: n, S - Dichten der Träger und der Photonen, v_g ($3e10/3.5$ cm/s) Gruppengeschwindigkeit, α (10 /cm) optische Wellenleiterverluste, τ_e (1 ns) Trägerlebensdauer, J (10 A/cm) Strom pro Länge, e ($1.6e-19$ As) Elementarladung, w, d ($3 \mu\text{m}, 0.1 \mu\text{m}$) Weite und Dicke der aktiven Zone, g Gain der Welle i als Funktion von n und S (nichtlineare Gainsättigung), wobei g' ($1e-16$ cm²) differentieller Gain, N_t (10^{18} cm⁻³ Transparenzdichte, ε ($3e-17$ cm³) inverse Photonen-Sättigungsdichten sind. Im folgenden werden noch daraus gebildete Größen genutzt: $J_t = ewdN_t/\tau_e$ (0.48 A/cm) .

3 Dimensionslose Normalform

Da gibt es viele Möglichkeiten. Ich wähle folgende Transformation, wobei nicht immer neue Symbole gewählt werden, links vom = steht immer die dimensionslose Größe und rechts die dimensionsbehaftete.

$$\begin{aligned} t &= \frac{t}{v_g \alpha} & z &= \alpha z & n &= \frac{N - N_t}{N_t} & f &= \frac{f}{\sqrt{N_t}}, s = \frac{S}{N_t} \\ j &= \frac{J - J_t}{v_g \alpha \tau_e J_t} \quad (0.2314) & \tau &= \tau_e \alpha v_g \quad (85.71) & g' &= g' \frac{N_t}{\alpha} \quad (10) & \varepsilon &= \varepsilon N_t \quad (10) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Damit wird die Normalform zu

$$2(\partial_t + \partial_z) f = [g - 1] f \quad \text{und} \quad \partial_t n = j - n \left[\frac{1}{\tau} + \frac{g' s}{1 + \varepsilon s} \right] \quad \text{mit} \quad g = \frac{g' n}{1 + \varepsilon s}. \quad (3.2)$$

$$\text{Randbedingung bei } z = 0: f(t, 0) = e^{i\omega t} \left(f_{00}(t) + f_{10}(t) e^{i\delta t} \right), \quad (3.3)$$

wobei $\omega = 2\pi c/\lambda_0$ die optische Frequenz der Welle 0 ist und $\omega + \delta = 2\pi c/\lambda_2$ die der anderen. Die Input-Amplituden $f_{i0}(t)$ sollen hinreichend langsam variieren.

4 Separation in Partialwellen

Für die Lösung im Innern mache ich folgenden

$$\underline{\text{Ansatz:}} \quad f(t, z) = e^{i\omega(t-z)} \sum_m f_m(z) e^{im\delta(t-z)}. \quad (4.1)$$

Das berücksichtigt die potentielle Erzeugung von Seitenbändern im Abstand von ganzzahligen Vielfachen der Differenzfrequenz δ durch die Nichtlinearitäten.

Entscheidend ist die Aufteilung der Photonendichte in einen stationären und einen Schwebungsterm. Den ersten bezeichne ich mit \bar{s} , den zweiten wieder mit s :

$$s = f^* f = \bar{s} + s, \quad \bar{s} = \sum_m f_m^* f_m \quad s = \sum_{m,n}^{(m \neq n)} f_m^* f_n e^{i(n-m)(t-z)}. \quad (4.2)$$

Der Schwebungsterm erzeugt über den Sättigungsnenner $1 + \varepsilon(\bar{s} + s)$ in (3.2) eine Gain- und Indexmodulation.

$$\text{Annahme: } \quad \varepsilon|s| \ll 1 + \varepsilon\bar{s}. \quad (4.3)$$

Dann Linearisierung bezüglich dieser kleinen Größe möglich:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon(\bar{s} + s)} \approx \frac{1}{1 + \varepsilon\bar{s}} - \frac{\varepsilon s}{(1 + \varepsilon\bar{s})^2} \quad \text{und} \quad \frac{\bar{s} + s}{1 + \varepsilon(\bar{s} + s)} \approx \frac{\bar{s}}{1 + \varepsilon\bar{s}} + \frac{s}{(1 + \varepsilon\bar{s})^2}. \quad (4.4)$$

Die Trägergleichung wird damit

$$\partial_t n = j - n \left[\frac{1}{\tau} + \frac{g'\bar{s}}{1 + \varepsilon\bar{s}} - \frac{g's}{(1 + \varepsilon\bar{s})^2} \right].$$

Annahme: der letzte zeitlich variierende Term ist vernachlässigbar, so daß

$$\partial_t n = j - n \left[\frac{1}{\tau} + \frac{g'\bar{s}}{1 + \varepsilon\bar{s}} \right]. \quad (4.5)$$

Diese Annahme ist aus mehreren Gründen gerechtfertigt:

- s oszilliert mit einer Periode $T = \lambda^2/(c\delta\lambda)$, das ist weniger als eine ps, wenn der Wellenlängenabstand $\delta\lambda$ mehr als 8 nm ist. Dem können die Ladungsträger ohnehin nicht folgen.
- Wenn eine der Partialwellen dominiert, ist ohnehin $|s| \ll \bar{s}$.

Nun setzen wir den Ansatz (4.1) und die Linearisierung (4.4) sowie den Ausdruck (4.2) für s in die TWE in (3.2) ein, dividieren durch den gemeinsamen Phasenfaktor $e^{i\omega(t-z)}$, multiplizieren mit $e^{-ik\delta(t-z)}$, mitteln alle schnell oszillierenden Terme heraus und erhalten:

$$2(\partial_t + \partial_z)f_k = (1 - i\alpha) \frac{g'n\bar{s}}{1 + \varepsilon\bar{s}} \left(f_k - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\bar{s}} \sum_{m,n}^{m \neq k} f_m f_n^* f_{n+k-m} \right) - f_k. \quad (4.6)$$

Bei $z = 0$ sind nur die Amplituden f_0, f_1 der eingestrahlten Wellen von null verschieden. Im Verlauf der Propagation führt der nichtlineare Term zur Erzeugung von Seitenwellen. Diese bleiben eine gewisse Strecke lang auf alle Fälle klein. In diesem Bereich braucht man im nichtlinearen Term nur die Hauptwellen zu berücksichtigen. Das gibt 3 Sorten von Gleichungen.

Für die beiden Hauptwellen $k = 0, 1$ bleibt nur der Summand $m = n = \bar{k}, n + k - m = k$, wobei \bar{k} die jeweils andere Hauptwelle ist. Das bedeutet $f_m f_n^* f_{n+k-m} = f_{\bar{k}}^* f_{\bar{k}} f_k$, man kann f_k ausklammern und erhält

$$2(\partial_t + \partial_z)f_k = \left[g'n(1 - i\alpha) \frac{1 + \varepsilon\bar{s}_k}{(1 + \varepsilon\bar{s})^2} - 1 \right] f_k \quad \text{mit } \bar{s}_k = f_{\bar{k}}^* f_k. \quad (k = 0, 1) \quad (4.7)$$

Für die beiden Nachbarwellen $k = -1, 2$ bleibt auch jeweils nur ein nichtlinearer Term, nämlich

$$2(\partial_t + \partial_z)f_k = \left[g'n(1 - i\alpha) \frac{1}{1 + \varepsilon\bar{s}} - 1 \right] f_k - g'n(1 - i\alpha) \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon\bar{s})^2} f_{close}^2 f_{far}^*, \quad (k = -1, 2) \quad (4.8)$$

wobei f_{close} die zu k benachbarte Hauptwelle ist und f_{far} die fernere. Diese beiden Wellen werden durch die Hauptwellen gespeist. Alle anderen Wellen koppeln nicht an die Hauptwellen, so daß in diesem Anfangsbereich insgesamt nur 4 Wellen beteiligt sind – eben "four-wave mixing".

Annahme: die Nebenwellen bleiben immer klein.

Dafür müßte eigentlich schon die Gaindispersion sorgen. Ich nehme das erst mal an, man muß es dann am Ende checken.

Dann braucht man zunächst nur das in sich geschlossene System (4.7) zu betrachten. Dies läßt sich leicht in die Intensitätsgleichungen

$$(\partial_t + \partial_z)s_k = \left[\frac{g'n}{1 + \varepsilon s} - 1 \right] s_k - \frac{\varepsilon s_0 s_1}{(1 + \varepsilon s)^2} \quad (k = 0, 1) \quad (4.9)$$

umformen, wobei ich die Überstriche wieder weglasse. Dies zusammen mit der Trägergleichung (4.5) ist jetzt ein geschlossenes Gleichungssystem.

Der erste Term rechts ist das übliche ohne 4WM. Der zweite Term die Korrektur durch das 4WM. Das ist ein zusätzlicher Verlust. Ich interpretiere ihn als die Leistung, die in die anderen Wellen transferiert wird. Offensichtlich wird aus beiden Hauptwellen gleich viel entnommen. Das ist für den Effekt entscheidend, denn es bedeutet, der relative Verlust pro vorhandenes Photon ist für die schwächere Welle größer.

5 Lösung des Systems (4.5) und (4.9)

Als erstes transformiere ich in die mitbewegte Zeit $\tau = t - z$: $p_k(\tau, z) = s_k(t, z)$. Damit $(\partial_t + \partial_z)p_k(\tau, z) = (\partial_t \tau + \partial_z \tau)\partial_\tau p_k(\tau, z) + \partial_z p_k(\tau, z) = \partial_z(\tau, z)$. Analog mit den Trägern $n(t, z) = \rho(\tau, z)$ und um Verwechslungen zu vermeiden τ_c für die Trägerlebensdauer gibt

$$\partial_z p_k(\tau, z) = \left[g' \rho(\tau, z) \frac{1 + \varepsilon p_k(\tau, z)}{(1 + \varepsilon p(\tau, z))^2} - 1 \right] p_k(\tau, z) \Big|_{\tau=t-z} \text{ Randbedingung: } p_k(\tau, 0) = |f_{k0}(\tau)|^2. \quad (5.1)$$

$$\partial_\tau \rho(\tau, z) = j - \rho(\tau, z) \left[\frac{1}{\tau_c} + \frac{g' p(\tau, z)}{1 + \varepsilon p(\tau, z)} \right]. \quad (5.2)$$

Aha, bei den Photonen ist jetzt τ nur noch ein Parameter, bei den Trägern z .

Das ist immer noch kompliziert genug, insbesondere im Anfangsbereich, bevor Sättigung eintritt.

Aber die Asymptotik hinten hat keine Wahl.

In der Photonengleichung hat die Welle mit der höheren Intensität immer die größere eckige Klammer – bei jedem τ und z und unabhängig von der konkreten Gestalt von $\rho(\tau, z)$. Damit kann die bei $z = 0$ intensivere Welle nie wieder schwächer werden als die andere. Und wenn p_k für $z \rightarrow \infty$ stationär werden soll, so muß entweder $p_k = 0$ sein und die eckige Klammer nicht positiv oder $p_k > 0$ und die eckige Klammer null. Da aber die bei $z = 0$ größere eckige Klammer immer größer bleibt, kann nur diese null werden, die andere ist negativ und mithin geht die dazugehörige Intensität gegen null.

Fazit so weit:

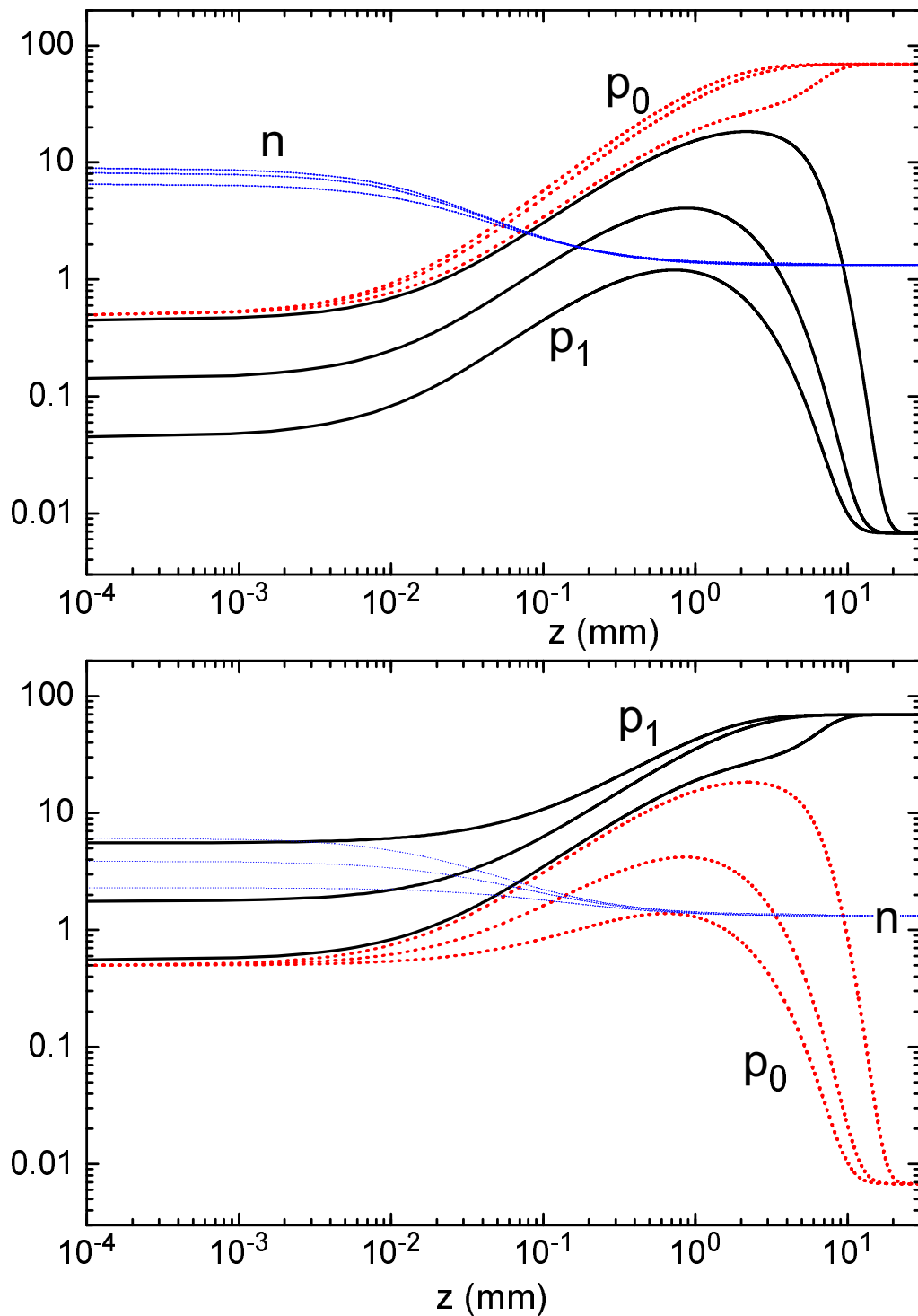
wenn die Länge L des SOA nach ∞ geht, kommt zu jeder Zeit t nur die Welle hinten raus, die am Eingang zur Zeit $t - L/v_g$ die größere Intensität hatte. Nur am Eingang identische Intensitäten bleiben identisch.

Natürlich, die für die Unterdrückung der kleineren Welle nötige Länge ist um so größer, je weniger sich die Eingangsintensitäten unterscheiden. Deshalb gibt es bei jeder endlichen Länge am Ausgang eine endliche Übergangszeit.

Auch haben sicher die weggelassenen schnell oszillierenden Terme einen Einfluß auf die Übergangszeit.

Freitag 18 Uhr 15, jetzt geh ich Stimmen !!!!

Am Wochenende habe ich die Gleichungen für stationäre Inputs mal gelöst. Ergebnis im folgenden Bild.



Die Welle p_0 (dick gepunktet) ist am Input immer 0.5 mW, die Welle p_1 (dick durchgezogen) mal kleiner (oberes Teilbild), mal größer (unteres Teilbild). Zusätzlich sind dünn noch die Trägerdichten (in 10^{18} cm^{-3}) eingemalt. Man beachte die doppelt logarithmische Skala.