

# PHOTONIK I

Moderne Optik, Photonen und Atome, Materialien  
– Wintersemester 2002/2003 –

von

Hans-Jürgen Wünsche & Fritz Henneberger  
Institut für Physik der Humboldt-Universität zu Berlin  
Invalidenstr. 110

Tel: 2093 7649

email: Wünsche: ede@physik.hu-berlin.de, Henneberger: henne@physik.hu-berlin.de

[www.physik.hu-berlin.de](http://www.physik.hu-berlin.de) → forschung → Physikalische Grundlagen der Photonik

14. April 2003

## Worwort

Diese Skripte basiert auf den Vorlesungen Photonik I und II, die von Prof. F. Henneberger in den letzten Jahren entwickelt und von mir seit WS 2001 fortgesetzt wurden.

Der Begriff PHOTONIK ist in Analogie und Abgrenzung zum Begriff ELEKTRONIK entstanden, den heutzutage jeder kennt. Im engeren Sinne geht es um die Übertragung und Verarbeitung von Informationen mit Licht. Man will mit Photonen das gleiche schaffen wie mit Elektronen – und möglichst noch mehr.

Momentane technische Basis der Photonik sind die Opto-Elektronik (Umwandlung Licht – elektrisch und umgekehrt) und die Lichtwellentechnologie (Glasfasern, . . . , Holografie).

Diese zweisemestrige Vorlesung ist etwas weiter gefaßt. Es handelt sich um die Grundvorlesung für das Wahlpflichtfach Optik und Spektroskopie. Folgende Themenkreise sind geplant (in Klammern einige Stichworte):

- **Wellenoptik** (homogene u. inhomogene Medien, Eikonal)
- **Fourier-Optik** (Holografie)
- **Geführte Wellen** (Wellenleiter, Fasern)
- **Resonatoren** (insbesondere Laser-Resonatoren)
- **Optische Kohärenz** (klassisch)
- **Quantenoptik** (Photonen als Lichtquanten . . . )
- **Wechselwirkung von Photonen und Atomen**
- **Ultrakurze Impulse**
- **Nichtlineare Optik**
- **Laser**

Im Wintersemester sollen die Kapitel bis einschließlich Quantenoptik dran sein.

## Literatur

- [1] B. E. A. Saleh & M. C. Teich, "Fundamentals of Photonics"
- [2] M. Born & E. Wolf, "Principles of Optics"
- [3] Bergmann - Schäfer: Experimentalphysik, Band III, Optik
- [4] Haken, Hermann : Licht und Materie

# 1 Wellen und Strahlen (Eikonal)

Licht als sich frei ausbreitende elektromagnetische Welle.

## 1.1 Maxwell'sche Gleichungen im Medium

In Gebieten ohne externe Ladungen und Ströme:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\quad (1.1)$$

mit

$$\text{dielektr. Verschiebung } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vec{E} & - \text{elektrische Feldstärke} \\ \vec{P} & - \text{Polarisation (Dipolmoment pro Volumen)} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$$\text{magn. Induktion } \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vec{H} & - \text{magnetische Feldstärke} \\ \vec{M} & - \text{Magnetisierung} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Auf jede Ladung  $q$  mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  wirkt die

$$\text{Lorentz-Kraft } \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.4)$$

d.h., die Felder wirken auf die internen Ladungen und Ströme im Medium zurück, ändern also  $\vec{P}, \vec{M}$ .

Wir betrachten zunächst optisch lineare (Wirkung  $\sim$  Ursache), nichtdispersive, homogene u. isotrope Di-elektrika<sup>1</sup>. Für diese

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{Magnetisierung vernachlässigbar, Suszeptibilität } \chi \text{ konstant}) \quad (1.5)$$

Damit  $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \epsilon \vec{E}$  und die Maxwellgl. liefern

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \stackrel{\nabla \cdot \vec{E} = 0}{=} -\Delta \vec{E} = -\mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Wellengleichung	$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$	Lichtgeschw. im Medium	$c = c_0/n$ ( $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ )	$n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ .	$(1.6)$
-----------------	--	------------------------	---	------------------------------------	---------

$\vec{H}$  analog.

### monochromatische Wellen

Monochromatische Wellen der Frequenz  $\omega$  haben die Form

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \exp(-i\omega t) + c.c. = \Re \{ \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \}. \quad (1.7)$$

Einsetzen in die Wellengleichung gibt für deren Amplituden die

Helmholtz-Gleichung	$\Delta \vec{\mathcal{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\mathcal{E}} = 0$	$(1.8)$
---------------------	---	---------

<sup>1</sup>nichtlineare sowie zeitlich nichtlokale Zusammenhänge zwischen elektrischem und Polarisationsfeld werden wir in Photonik II behandeln.

## 1.2 Repräsentative Wellenfelder

Beschränkung auf linear polarisierte Welle: Orientierung von  $\vec{\mathcal{E}}$  (und  $\vec{\mathcal{H}}$ ) in eine zeit- und ortsunabhängige Richtung  $\vec{e}_0 \Rightarrow$  skalare Wellenoptik<sup>2</sup>.

Die skalare Helmholtz-Gleichung entspricht der stationären Schrödinger-Gleichung.

Die Amplitude ist im allgemeinen komplex:

$$\mathcal{E}(\vec{r}) = A(\vec{r}) \cdot \exp(-i\Phi(\vec{r})) \quad \left( \begin{array}{l} \Phi \\ A^2 = |\vec{\mathcal{E}}|^2 \end{array} \right) \quad \text{– Phase} \quad (1.9)$$

$$\text{Gesamtfeld: } \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_0 A(\vec{r}) \cos [\Phi(\vec{r}) - \omega t] \quad (1.10)$$

Wellenfront = Fläche konstanter Phase,  $\Phi(\vec{r}) = \text{const.}$

Die Helmholtz-Gleichung hat je nach den Randbedingungen ganz unterschiedliche Lösungen. Als wichtige Lösungstypen werden wir jetzt die ebenen und Kugelwellen behandeln, sowie Gauss'sche Bündel.

### 1.2.1 Ebene Welle

Die Wellenfronten sind Ebenen. Mathematische Form:

$$\mathcal{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r}) \quad (\vec{k} \text{ – Wellenvektor } \perp \text{ Wellenfront}, k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}) \quad (1.11)$$

Dies löst die Helmholtz-Gleichung nur wenn gilt

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = n^2 k_0^2 \quad \text{mit } k_0 = \frac{\omega}{c_0}. \quad (\text{Dispersionsrelation}) \quad (1.12)$$

In einem Medium mit der Brechzahl  $n$  ist der Wellenvektor um den Faktor  $n$  größer als im Vakuum, Wellengeschwindigkeit und -länge sind um den Faktor  $1/n$  kleiner.

### 1.2.2 Kugelwelle

Die Wellenfronten sind Kugeln. Mathematische Form:

$$\mathcal{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}_0 \frac{\exp(ikr)}{r} \quad (1.13)$$

Einsetzen in die Helmholtz-Gleichung liefert wieder die Bedingung  $k^2 = \omega^2/c^2$ .

### 1.2.3 Gauß'sche Bündel

Ebene Wellen und Kugelwellen sind entgegengesetzte Extremfälle:

- Kugelwelle: punktförmige Lichtquelle, aber ohne bevorzugte Ausbreitungsrichtung.
- Ebene Welle: Fixierte Ausbreitungsrichtung, aber ohne lokalisierte Lichtquelle.

---

<sup>2</sup>Andere Polarisationstypen sind meist als geeignete Linearkombinationen linear polarisierter Wellen darstellbar

Nun werde ich Wellenfelder behandeln, die sowohl einen endlichen Strahldurchmesser haben als auch eine bevorzugte Ausbreitungsrichtung. Musterbeispiel dafür sind die sogenannten Gauss-Bündel.

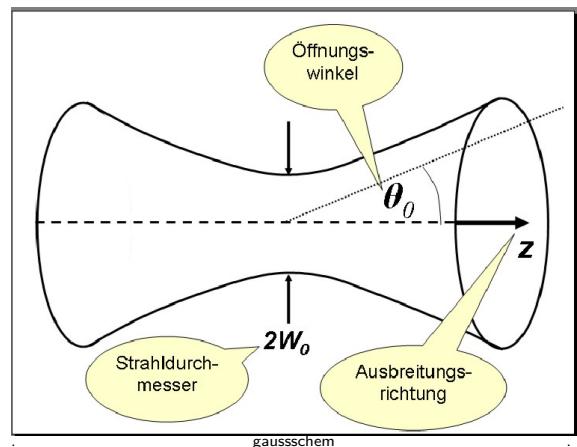
Zunächst einige qualitative Eigenschaften.

Gauß-Bündel sind Wellenfelder (Lichtstrahlen) mit folgenden Eigenschaften:

- Sie breiten sich in eine Vorzugsrichtung aus ( $z$ ).
- Das Intensitätsprofil senkrecht zu  $z$  hat rotationssymmetrische Gaußform

$$I(x, y, z) \sim \exp\left(-\frac{2\rho^2}{W^2}\right), \quad (1.14)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{Abstand von Strahlachse.}$$



Der effektive Strahlradius  $W$  ändert sich entlang des Strahls. Er durchläuft ein Minimum (Strahltaille). Weit entfernt von der Taille gilt  $W \sim |z|$ . Der entsprechende Öffnungswinkel  $\theta_0$  ist umgekehrt proportional zum Taillenradius  $W_0$ . Schmale Taillen werden also mit hoher Strahldivergenz bezahlt und umgekehrt.

### Quantitative Formeln für die Feldamplitude

$$\text{Ansatz: } \mathcal{E}(\vec{r}) = u(\rho, z) \exp(ikz), \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (1.15)$$

Dies ist in die Helmholtz-Gleichung (1.8) einzusetzen:

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)\mathcal{E} &= (\Delta_\rho + \partial_z^2 + k^2)u \exp(ikz) \quad \text{wo (Zylinderkoordinaten)} \quad \Delta_\rho = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho \\ &= \exp(ikz)(\Delta_\rho + [\partial_z^2 + 2ik\partial_z - k^2] + k^2)u \\ &= \exp(ikz)(\Delta_\rho + \partial_z^2 + 2ik\partial_z)u \\ &= \exp(ikz)(\Delta_\rho u + \partial_z[\partial_z u + 2iku]) = 0 \end{aligned}$$

Annahme:  $u$  variiert schwach mit  $z$ , es gelte  $|\partial_z u| \ll k|u|$ .

Damit  $\partial_z u$  in der eckigen Klammer vernachlässigbar, es bleibt

$$\boxed{\Delta_\rho u + 2ik\partial_z u = 0} \quad \text{Helmholtzgleichung in paraxialer Näherung.} \quad (1.16)$$

Wie eine Lösung finden? Wir nutzen einen physikalisch motivierten Ansatz.

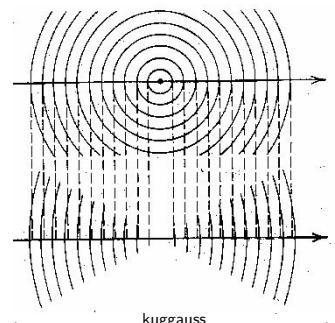
Nämlich der Ausschnitt aus einer Kugelwelle nahe der  $z$ -Achse und weit weg vom Zentrum sollte der paraxialen Näherung auch genügen.

Dort  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = z\sqrt{1 + \rho^2/z^2} \approx z + \rho^2/2z$ , also

$$\mathcal{E} \sim \frac{\exp(ikr)}{r} \approx \frac{\exp(ik\rho^2/2z)}{z} \exp(ikz) \Rightarrow u \sim \frac{\exp(ik\rho^2/2z)}{z} \quad (1.17)$$

Probieren wir doch einfach, ob das eine Lösung von (1.16) ist:

$$\begin{aligned} \Delta_\rho \frac{\exp(ik\rho^2/2z)}{z} &= +\left(\frac{2ik}{z^2} - \frac{k^2\rho^2}{z^3}\right) \exp(ik\rho^2/2z) \\ 2ik\partial_z \frac{\exp(ik\rho^2/2z)}{z} &= -\left(\frac{2ik}{z^2} - \frac{k^2\rho^2}{z^3}\right) \exp(ik\rho^2/2z) \end{aligned}$$



Die Summe beider Terme hebt sich weg, also löst (1.17) die paraxiale Helmholtz-Gleichung.

Diese Welle bleibt Lösung, wenn man sie entlang der  $z$ -Achse verschiebt, also  $z$  durch  $z+\text{const}$  ersetzt. Man überzeugt sich leicht, daß die Konstante sogar komplex sein kann. Die Grundform des Gauss-Bündels ergibt sich mit  $\text{const}=iz_0$ .

$$\mathcal{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}_0 \frac{q(0)}{q(z)} \exp\left(ik \left[z + \frac{\rho^2}{2q(z)}\right]\right), \quad q(z) = z + iz_0. \quad \text{Grundform Gauss-Bündel} \quad (1.18)$$

Dabei ist  $z_0$  eine frei wählbare Konstante, die sogenannte Rayleigh-Länge.

Für die Diskussion der Eigenschaften von Gauss-Bündeln ist es günstig, dieses Feld als das Produkt einer reellen Amplitude und eines Phasenfaktors zu schreiben. Das Ergebnis ist

$$\mathcal{E}(\rho, z) = \mathcal{E}_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right) \cdot \exp\left(ikz + ik \frac{\rho^2}{2R(z)} - i\zeta(z)\right) \quad \text{Alternativform Gauss-Bündel} \quad (1.19)$$

Abkürzungen dabei (die Bedeutung wird weiter unten klar):

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} \quad \text{Strahlradius} \quad (1.20)$$

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \quad \text{Taillenradius} \quad (1.21)$$

$$R(z) = z + \frac{z_0^2}{z} \quad \begin{array}{l} \text{Krümmungsradius} \\ \text{Wellenfront} \end{array} \quad (1.22)$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{Phasenretardierung} \quad (1.23)$$

Alle diese Größen werden durch den einen freien Parameter  $z_0$  bestimmt.

**Intensität:**

$$I(\rho, z) := |\vec{\mathcal{E}}(\rho, z)|^2 = \mathcal{E}_0^2 \frac{W_0^2}{W^2(z)} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right) \quad (1.24)$$

Das ist für jeden Punkt  $z$  auf der optischen Achse eine Gauss-Verteilung bzgl. der transversalen Koordinate.

Strahlradius: Innerhalb des effektiven Strahlradius  $W(z)$  liegen ca. 86% der Intensität.  
Für große  $z$  gilt:  $W = W_0 z / z_0$ .

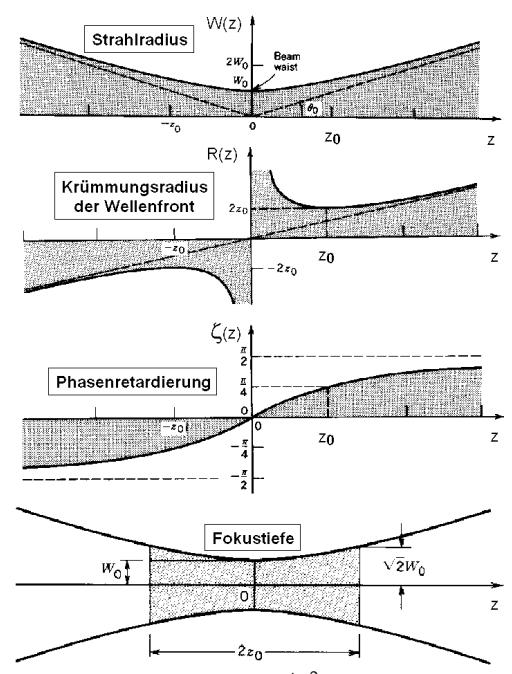
$$\text{Öffnungswinkel (Strahldivergenz)}: \quad \tan \theta_0 \approx \theta_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}} = \frac{\lambda}{\pi W_0} \quad (1.25)$$

Fokustiefe:  $2z_0 = 2\pi W_0^2 / \lambda$   
Bei  $z = \pm 2z_0$  ist der Strahlquerschnitt doppelt so groß wie in der Taille.

Eine der 3 Größen  $W_0, \theta_0, z_0$  kann durch Randbedingungen vorgegeben werden. Die beiden anderen sind dadurch dann bestimmt.

Zahlenbeispiel:  $\lambda = 633\text{nm}$  (He-Ne-Laser)  
 $W_0 = 1\text{cm} \Rightarrow 2z_0 = 1\text{km}$   
 $W_0 = 1\mu\text{m} \Rightarrow 2z_0 = 1\text{mm}$ .

Konfokale Spektroskopie:  $W_0 \approx \lambda$  (Vorsicht, paraxiale Näherung wird hier schlecht)



## Phase

$$\Phi(\rho, z) = kz - \zeta(z) + k \frac{\rho^2}{2R(z)}. \quad (1.26)$$

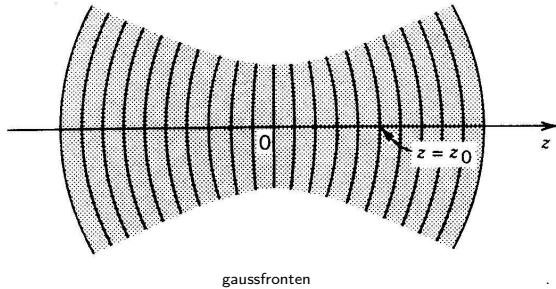
Die Phase ist antisymmetrisch bezüglich  $z = 0$ . Wir brauchen nur  $z > 0$  zu diskutieren.

Auf optischer Achse:

Es tragen nur die ersten beiden Terme bei.  $kz$  entspricht dem Phasenzuwachs einer ebenen bzw. Kugelwelle. Die negative Korrektur  $-\zeta(z)$  nennt man Phasenretardierung. Sie fällt monoton von  $\pi/2$  bei  $z \rightarrow -\infty$  auf  $-\pi/2$  für  $z \rightarrow \infty$ . Insgesamt geht also zwischen  $-\infty$  und  $\infty$  eine halbe Wellenlänge verloren (Goy-Effekt).

Neben optischer Achse:

Der letzte Term vergrößert die Phase, Flächen konstanter Phase wandern mit wachsendem  $\rho$  zu kleineren  $z$ , krümmen sich also zum Ursprung hin. Krümmungsradius:  $R(z)$  (in der Nähe der Achse).



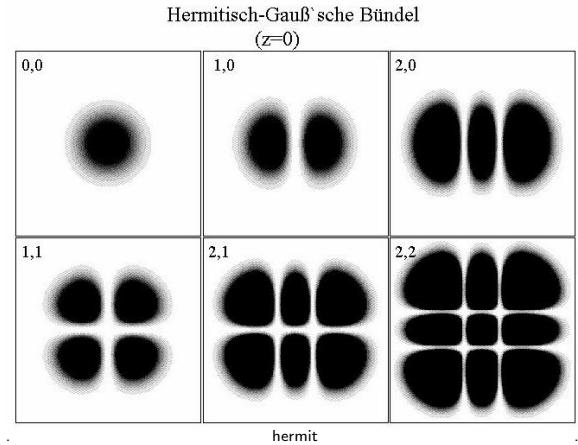
Die Abbildung skizziert die Flächen konstanter Phase (Wellenfronten) in einem Gauss-Bündel. Der Krümmungsradius  $R = z + z_0^2/z$  wird unendlich für  $z = 0$  und  $z \rightarrow \infty$ . Dort sind die Wellenfronten Ebenen. Der Krümmungsradius erreicht bei  $z = z_0$  den Minimalwert  $2z_0$  (dieser Parameter wird deshalb Fokustiefe genannt).

**Gültigkeitsgrenzen** Diese Näherungsformeln (paraxiale Näherung) sind gültig für  $\rho^2 < z^2 + z_0^2$ . Damit das innerhalb des Strahlradius  $W(z)$  der Fall ist, muss gelten  $W_0 > \lambda$  bzw.  $z_0 > \lambda$ .

## 1.2.4 Weitere repräsentative Wellenfelder

### Hermite-Gauss-Bündel

Das ist eine ganze Familie von Bündeln. Zu jedem Gauss-Bündel umfaßt diese weitere Lichtbündel mit jeweils  $l$  horizontalen und  $m$  vertikalen Knotenlinien (Auf einer Knotenlinie verschwindet die Lichtintensität) (s. Abb.). Es ist üblich, die verschiedenen Mitglieder dieser Familie durch das Indexpaar  $(l, m)$  zu unterscheiden.  $(0, 0)$  ist das originale Gauss-Bündel, dessen Amplitude  $\mathcal{E}_{00}$  durch Formel (1.18) bzw. (1.19) beschrieben wird. Die Amplitude der anderen Hermite-Gauss-Bündel ist dann



$$\mathcal{E}_{lm}(x, y, z) = H_l \left( \frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right) H_m \left( \frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right) e^{i(l+m)\zeta(z)} \mathcal{E}_{00}(\rho, z). \quad (1.27)$$

Dabei ist  $H_k(u)$  das *Hermite-Polynom* der Ordnung  $k$ , das über die Rekursionsbeziehung  $H_k(u) = 2uH_{k-1}(u) - 2(k-1)H_{k-2}(u)$  und  $H_0(u) \equiv 1, H_1(u) = 2u$  berechenbar ist und für die Knotenlinien sorgt.

Bei gegebenem Parameter  $z_0$  haben alle Hermite-Gauss-Bündel  $(l, m)$  gleiche Fokustiefe  $2z_0$ , Taillenweite  $W_0$ , Öffnungswinkel  $\theta_0$  und auch gleiche Krümmung der Wellenfronten.

In der  $x, y$ -Ebene bilden sie ein vollständiges Funktionensystem. Das heisst, jede Amplitudenverteilung bei  $z = 0$  (z.B. der Ort einer flächenhaften Lichtquelle) läßt sich durch eine Linearkombination aus den  $\mathcal{E}_{lm}(x, y, 0)$  darstellen. Die Ausbreitung des Lichts zu beliebigen  $z > 0$  wird dann einfach durch die gleiche Linearkombination von  $\mathcal{E}_{lm}(x, y, z)$  gegeben. In diesem Sinne läßt sich jede Lösung der paraxialen Helmholtz-Gleichung als Linearkombination von Hermite-Gauss-Bündeln darstellen.

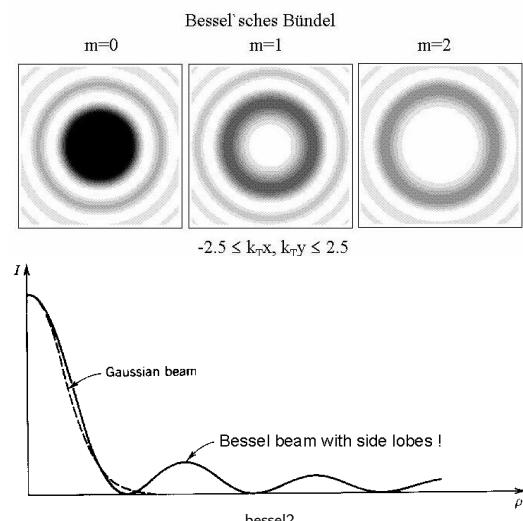
### Bessel-Bündel

Das sind Lösungen der Helmholtz-Gleichung (1.8) vom Typ

$$\mathcal{E}_m(\rho, \varphi, z) = \mathcal{E}_0 J_m(k_T \rho) e^{im\varphi} e^{i\beta z} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \beta & - \text{freier Parameter} < \frac{\omega}{c} \\ k_T & = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2} \\ J_m(u) & - \text{Bessel-Funktion 1. Art} \\ m & - \text{ganzzahliger Index} \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Die Intensitätsverteilung der ersten 3 Besselbündel ist in der Abbildung skizziert. Im Unterschied zu den Gauss-Bündeln sind hier die transversale und die longitudinale Richtung nicht verkoppelt, es gibt also keine Strahldivergenz. Das scheint der Feststellung zu widersprechen, daß dünne Strahlen große Divergenz bedeuten und umgekehrt. Jedoch wird die Divergenzfreiheit bei den Besselbündeln durch eine Folge von Nebenmaxima erkauft, deren Höhe nur langsam abklingt, so daß das Bündel praktisch unendlich ausgedehnt ist (mehr mathematisch: das Integral  $\int \rho |\mathcal{E}_m|^2 dx dy$  für den mittleren Radius des Bündels divergiert).

Damit genug mit den Bündeln.



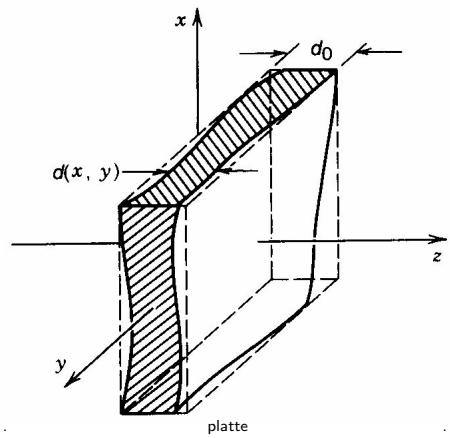
### 1.3 Wellenoptik einfacher Elemente

Damit sind Linsen, Prismen, Beugungsgitter, Spiegel gemeint.

Hier Beschränkung auf Transmissionsfall und

- hinreichend dünne Elemente,
- optische Dicke & Durchlässigkeit variieren langsam,
- Reflexionen an den Grenzflächen vernachlässigbar.

Wie wirkt das Element auf eine einfallende Welle?



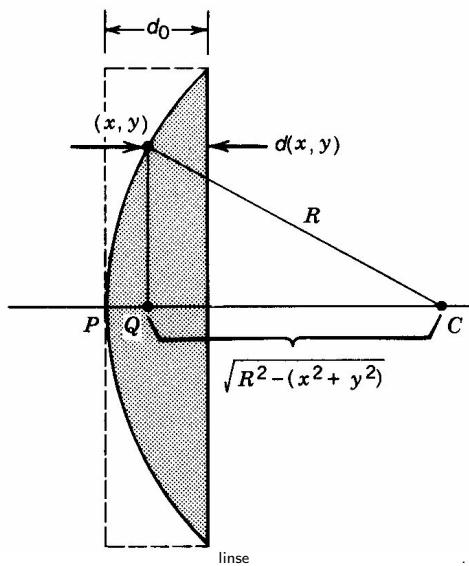
Es erzeugt einen zusätzlichen Beitrag zur Phase,  $\delta = k_0(n - 1)d$ <sup>3</sup>

Bei variabler Dicke  $d(x, y)$  hängt dies von den Transversalkoordinaten  $(x, y)$  ab.

Gleiches ergibt sich bei variablem Brechindex  $n(x, y)$ .

#### 1.3.1 Beispiel: dünne Linse

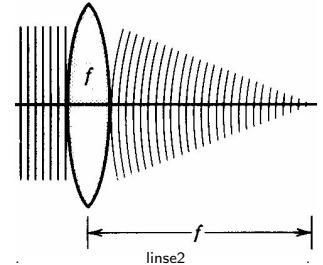
Zylindersymmetrie,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$



$$\begin{aligned} d(\rho) &= d_0 - (R - \sqrt{R^2 - \rho^2}) \stackrel{\rho \ll R}{\approx} d_0 - \frac{\rho^2}{2R} \\ \Rightarrow \quad \delta(\rho) &= \delta_0 - ik_0 \frac{\rho^2}{2f} \text{ mit } f = \frac{R}{n-1} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Dies bedeutet:

Sind die einfallenden Wellenfronten Ebenen, dann haben jene hinter der Linse den Krümmungsradius  $f$ , dies ist also die Brennweite.



#### 1.3.2 Wirkung der Linse auf ein Gauss-Bündel

Die Position der Linse im von links einfallenden Gauss-Bündel sei  $z$ .

Ohne Linse wäre die  $\rho$ -abhängige Term der Phase dort  $k_0\rho^2/2q$ .

Mit Linse muß man die Zusatzphase  $-k_0\rho^2/2f$  addieren.

Der  $\rho$ -abhängige Term der Phase wird dabei

$$k_0 \frac{\rho^2}{2q'} \text{ mit dem veränderten Parameter } \frac{1}{q'} = \frac{1}{q} - \frac{1}{f}.$$

Also breitet sich auch jenseits der Linse ein Gauss-Bündel aus, allerdings mit anderen Parametern.

<sup>3</sup>Hier ist  $k_0 = 2\pi/\lambda$  die Wellenzahl von Luft (Vakuum).

Bestimmen wir diese:

$$q' = \frac{qf}{f-q} = \frac{(q-f+f)f}{f-q} = -f + \frac{f^2}{f-q} = -f + \frac{f^2(f-q^*)}{|f-q|^2} \text{ bzw.}$$

$q' + f = M^2 \cdot (f - q^*)$

mit dem Multiplikator  $M = \frac{f}{|f-q|}$  (1.30)

Einsetzen von  $q = z + iz_0$ ,  $q' = z' + iz'_0$ , Trennen von Real- und Imaginärteil sowie Beachten von (1.20) ergibt für die Bündelparameter nach der Linse

Position der Taille	$-z' - f = M^2(z - f)$	(1.31)
---------------------	------------------------	--------

Fokustiefe	$2z'_0 = M^2 \cdot 2z_0$	(1.32)
------------	--------------------------	--------

Taillenradius	$W'_0 = MW_0$	(1.33)
---------------	---------------	--------

Strahldivergenz	$2\theta'_0 = \frac{2\theta_0}{M}$	(1.34)
-----------------	------------------------------------	--------

Vergrößerungsfaktor	$M = \frac{f}{\sqrt{(z-f)^2 + z_0^2}} = \left[ \left( \frac{z}{f} - 1 \right)^2 + \left( \frac{z_0}{f} \right)^2 \right]^{-1/2}$	(1.35)
---------------------	--	--------

Diskussion:

Die Linse formt das einfallende Gauss-Bündel in ein anderes um (Strahlformung).

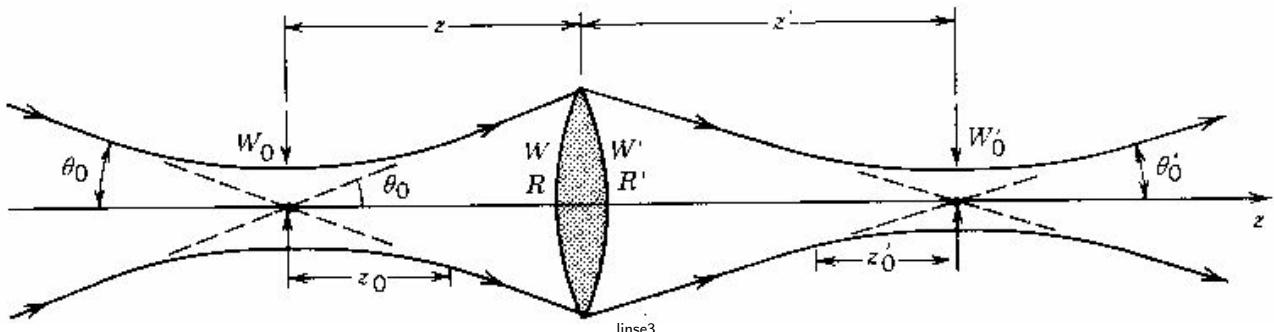
Diese Transformation wird durch 2 Parameter bestimmt:

$z/f$  – "wie viele Brennweiten die Taille des einfallenden Bündels vor der Linse ist"

$z_0/f$  – Fokustiefe des einfallenden Bündels.

Zur Erinnerung: Das ist der minimale Krümmungsradius von Wellenfronten im Bündel.

$z'$  ist die Position der Linse relativ zur Taille des ausfallenden Bündels.  $z' < 0$  bedeutet also, daß die Linse vor der ausfallenden Taille liegt<sup>4</sup>. Das entspricht der Situation in folgender Skizze.



<sup>4</sup>Man beachte aber, daß das Vorzeichen von  $z'$  in der Literatur oft umgedreht definiert wird (z.B. auch in [1]), so daß dann gilt  $z' - f = M^2(z - f)$ .

### 1.3.3 Strahlenoptischer Grenzfall

$|z - f| \gg z_0$  bzw.  $z_0 \rightarrow 0$ . Dann lässt sich (1.31) wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} -z' - f &= \frac{f^2}{(z-f)^2}(z-f) = \frac{f^2}{z-f} && \text{Multiplikation mit } (z-f) \\ -z'z - (z-z')f + f^2 &= f^2 \Rightarrow -z'z = (z-z')f && \text{Division durch } -z'z \end{aligned}$$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{-z'} + \frac{1}{z}$  Das ist genau die klassische strahlenoptische Linsengleichung zwischen Brennweite  $f$ , Gegenstandsweite  $z$  und Bildweite  $-z'$ .  
Also ist  $z_0 \rightarrow 0$  der strahlenoptische Grenzfall.

(1.36)

Die Positionen der Taillen des ein- und ausfallenden Bündels entsprechen also dem Gegenstand- bzw. Bildpunkt in der klassischen Optik.

Bei nicht vernachlässigbaren  $z_0$  bzw. Taillenweiten ergeben sich Abweichungen von der klassischen Linsengleichung (1.36), die hier aber nicht ausgewalzt werden sollen.

### 1.3.4 Gauss-Bündel durch beliebiges paraxiales optisches Element

Solange die paraxiale Näherung gilt, transformiert jedes zylindersymmetrische optische Element einen einfallenden Gauss-Strahl wieder in einen Gauss-Strahl.

Dabei ergibt sich der komplexe Parameter  $q' = z' + iz'_0$  des neuen Strahls aus jenem des alten gemäß eines "ABCD-Gesetzes" der Form

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (1.37)$$

Der Beweis soll hier nicht gebracht werden, er kann im Saleh / Teich ([1] Abschnitt 3.2.D) nachgelesen werden.

Die Konstanten charakterisieren das optische Element. Wichtigste Beispiele:

- dünne Linse:  $A = 1, B = 0, C = -1/f, D = 1$
- Platte der optischen Dicke  $nd$ :  $A = 1, B = nd, C = 0, D = 1$

Für alle anderen dünnen paraxialen optischen Elementen gilt das gleiche wie für die Linse, wenn  $f$  die entsprechende Brennweite ist.

Dicke paraxiale optische Elemente bzw. paraxiale optische Systeme aus mehreren Elementen können als Kombinationen dünner Elemente mit Platten endlicher Dicke aufgefasst werden. Ihre  $q'$  ergeben sich entsprechend durch mehrfache Hintereinander-Ausführung von (1.37). Man überzeugt sich leicht, dass dies immer wieder auf einen Zusammenhang vom Typ (1.37) führt, dessen Koeffizientenmatrix gerade das Produkt der Koeffizientenmatrizen der  $N$  Einzelemente ist:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_N \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{N-1} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_1 \quad (1.38)$$

Ganz rechts in diesem Produkt steht die Koeffizientenmatrix des Elements, auf die der Gaußstrahl zuerst fällt, ganz links diejenes Elements, welches der Strahl zuletzt durchquert.

Dies ist die Verallgemeinerung der entsprechenden Matrix-Technik der Strahlenoptik (s. Grundkurs Physik bzw. [1] 1.4.).

## 1.4 Inhomogene Medien (GRIN) – Grenzfall Strahlenoptik

In GRIN (= graded index materials) ortsabhängige DK:  $\varepsilon(\vec{r})$

### 1.4.1 Wellenbild: Helmholtz-Gleichung für GRIN

Erfordert erneute Herleitung der Wellengleichung.

$$\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = \underline{\text{rot rot } \vec{E}} = \text{rot}(-\partial_t \vec{B}) = -\mu_0 \partial_t \text{rot} \vec{H} = -\mu_0 \partial_t^2 \vec{D} = -\mu_0 \varepsilon(\vec{r}) \partial_t^2 \vec{E} \quad (*)$$

Jetzt verschwindet  $\text{div } \vec{E}$  im ersten Term nicht mehr, sondern:

$$0 = \text{div } \vec{D} = \text{div}(\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}) = \varepsilon \text{div } \vec{E} + \vec{E} \text{ grad } \varepsilon \Rightarrow \text{div } \vec{E} = -\left(\frac{\text{grad } \varepsilon}{\varepsilon}\right) \cdot \vec{E}.$$

Bleibt aber vernachlässigbar, wenn  $\varepsilon$  über Längen von der Ordnung der Wellenlänge schwach variiert. Dann reicht ortsabhängiger Brechindex in der Helmholtzgleichung:

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\vec{r}) \right) \mathcal{E}(\vec{r}) = 0 \quad \text{Helmholtz-Gleichung für GRIN}$$

$n(\vec{r}) = \sqrt{\varepsilon(\vec{r})/\varepsilon_0}$

(1.39)

### 1.4.2 Übergang zur geometrischen bzw. Strahlenoptik (Eikonal)

$$\text{Ansatz: } \mathcal{E}(\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{ik_0 S(\vec{r})}$$

$S(\vec{r})$  heißt **Eikonal**

$[S] = \text{Länge}$

(1.40)

$A(\vec{r})$ : langsam veränderliche reelle Amplitude,

$e^{ik_0 S(\vec{r})}$ : Phasenfaktor, oszilliert schnell mit Periode von Ordnung Wellenlänge

**Physikalische Bedeutung des Eikonals:**

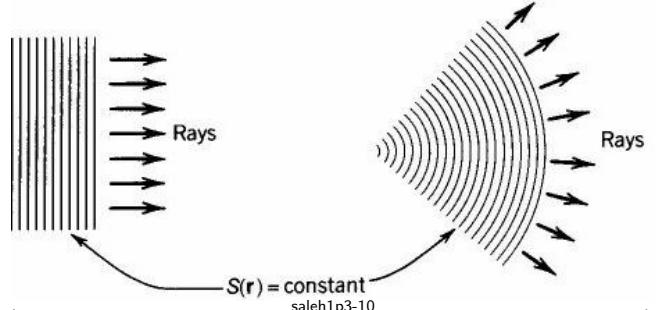
Phase  $= k_0 S(\vec{r}) \Rightarrow$  Wellenfronten:  $S(\vec{r}) = \text{const.}$

Lichtstrahlen stehen auf Wellenfronten senkrecht.

GRIN:  $A(\vec{r})$  schwach veränderlich, damit

$$\mathcal{E}(\vec{r} + d\vec{r}) \approx \mathcal{E}(\vec{r}) e^{ik_0 \nabla S(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}.$$

$$\Rightarrow \vec{k}(\vec{r}) = k_0 \nabla S(\vec{r}) \text{ ist lokaler Wellenvektor.}$$



**Bestimmungsgleichung für das Eikonal**

$$\text{Die Eikonalgleichung lautet: } (\nabla S)^2 = n^2$$

bzw.

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = n^2(\vec{r})$$

(1.41)

a) *Einfache heuristische Herleitung:*  $k_0 \cdot n(\vec{r}) \stackrel{!}{=} |\vec{k}(\vec{r})| = k_0 |\nabla S(\vec{r})| \Rightarrow |\nabla S(\vec{r})| = n(\vec{r}).$

b) *Richtige Herleitung:* Einsetzen des Feldansatzes (1.40) in Helmholtz-Gleichung (1.39)

$$\text{zunächst gilt } \Delta \mathcal{E} = \underbrace{A \Delta e^{ik_0 S}}_{A e^{ik_0 S} (-k_0^2 (\nabla S)^2 + i k_0 \Delta S)} + 2(\nabla A) \underbrace{(\nabla e^{ik_0 S})}_{i k_0 e^{ik_0 S} \nabla S} + e^{ik_0 S} \Delta A$$

$$\text{dies in Helmholtzgl.: } \{ \Delta A + k_0^2 [n^2 - (\nabla S)^2] A \} + i k_0 \{ 2(\nabla A)(\nabla S) + A \Delta S \} = 0.$$

Real & Imaginärteil:  $\Rightarrow$  zwei gekoppelte Gleichungen für  $A$  und  $S$ .

Realteil nach  $\nabla S$  umgestellt:  $(\nabla S)^2 = n^2 - \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2} \frac{\Delta A}{A}$ . Dies ist die Eikonalgleichung, wenn Term 2 vernachlässigbar ist. Das ist der Fall, wenn  $A$  schwach über eine Wellenlänge variiert.

Die Eikonalgleichung – und damit die geometrische bzw. Strahloptik – gilt also im Limit  $\lambda_0 \rightarrow 0$ .

### 1.4.3 Strahlengleichung

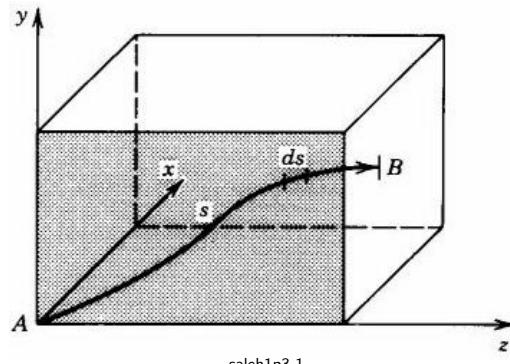
Jeder Lichtstrahl ist eine Kurve  $\vec{r}(s)$  im Raum.

$s$ : Länge der Kurve bis zu diesem Punkt.

Tangenteneinheitsvektor in Strahlrichtung:  $\vec{e}_t(s) = d\vec{r}(s)/ds$ .

Mithin  $\nabla S = |\nabla S| \vec{e}_t(s) = n \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$ .  $(*)$

Wir leiten dies nochmal nach  $s$  ab:



$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \nabla S \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \nabla(\nabla S) \stackrel{(*)}{=} \frac{\nabla S}{n} \cdot \nabla(\nabla S) = \frac{1}{2n} \nabla [(\nabla S)^2] \stackrel{1.41}{=} \frac{1}{2n} \nabla n^2 = \nabla n$$

Also endgültig	$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n$	Strahlengleichung	(1.42)
----------------	--	-------------------	--------

3 Bestimmungsgleichungen für die 3 Komponenten der Lichtstrahlen  $\vec{r}(s)$ .

Es sind inhomogene lineare Gleichungen 2. Ordnung, also gibt es in der Regel durch jeden Punkt in jede Richtung genau einen Strahl.

### 1.4.4 Paraxiale Näherung der Strahlengleichung

Oft sind die Strahlen fast parallel zur opt. Achse.

Dann gilt  $ds \approx dz$  und die Strahltrajektorie ist gegeben durch  $x(z), y(z)$ . Gleichungen dafür

$\frac{d}{dz} \left( n \frac{dx}{dz} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}$	&	$\frac{d}{dz} \left( n \frac{dy}{dz} \right) = \frac{\partial n}{\partial y}$	Gleichungen für paraxiale Strahlen	(1.43)
---	---	---	------------------------------------	--------

Wir werden uns im folgenden auf paraxiale Strahlen beschränken.

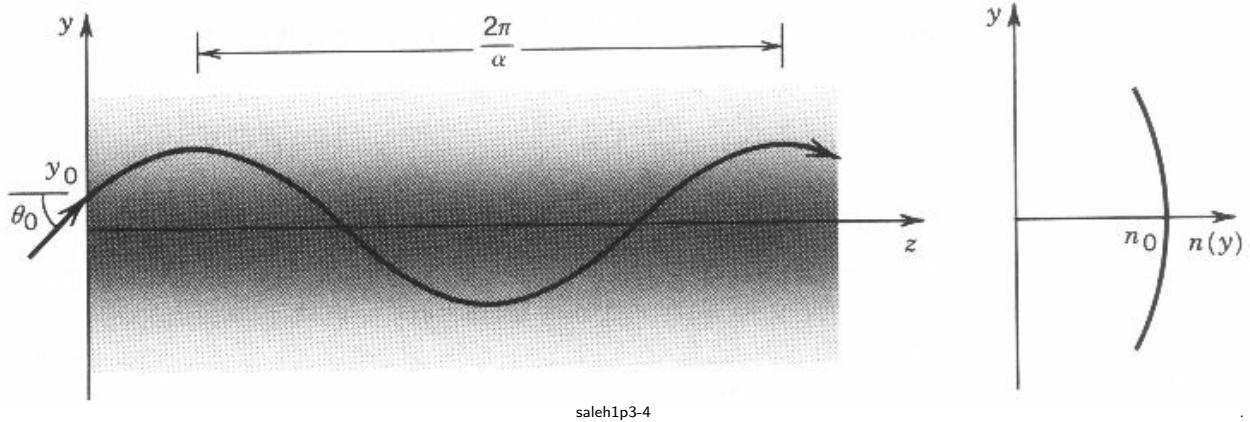
### 1.4.5 Einige Beispiele

**Homogenes Medium:**  $\nabla n = 0 \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0$ . Gerade Strahlen.

**SELFOC-Element:** Parabolisches Indexprofil in einer Richtung

$$\begin{aligned} n^2(y) &= n_0^2(1 - \alpha^2 y^2), & \alpha^2 y^2 \ll 1 \\ n(y) &\approx n_0(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 y^2) \text{ u. } \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \approx \frac{1}{n_0} \frac{\partial n}{\partial y} = -\alpha^2. \text{ Also Strahlgleichung einfach} \\ \frac{d^2y}{dz^2} &= -\alpha^2 y \Rightarrow \text{periodische Lösung: } y(z) = y(0) \cos(\alpha z) + \frac{y'(0)}{\alpha} \sin(\alpha z) \end{aligned} \quad (1.44)$$

$2\pi/\alpha$  = Periode (pitch), identisch für alle Strahlen.



saleh1p3-4

**GRIN-Glasfaser:** zylindersymmetrisches Indexprofil.

Maximum in Fasermitte  $\Rightarrow$  dort parabolisch.  $n(x, y) \approx n_0(1 - \alpha^2(x^2 + y^2))$ . Dies in (1.43)  $\Rightarrow$  Oszillatorgleichung f.  $x(z)$  und  $y(z)$ . Setzen o.B.d.A.  $x(0) = 0$ . Lösungen dann

$$x(z) = \frac{\theta_{x0}}{\alpha} \sin(\alpha z) \quad y(z) = \frac{\theta_{y0}}{\alpha} \sin(\alpha z) + y_0 \cos(\alpha z). \quad (1.45)$$

Hier 3 freie Parameter:  $y_0$  – Eintritts-Abstand zur Achse.  $\theta_{x0}$  u.  $\theta_{y0}$  – Eintrittswinkel in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung.

Wichtig sind 2 Grenzfälle:

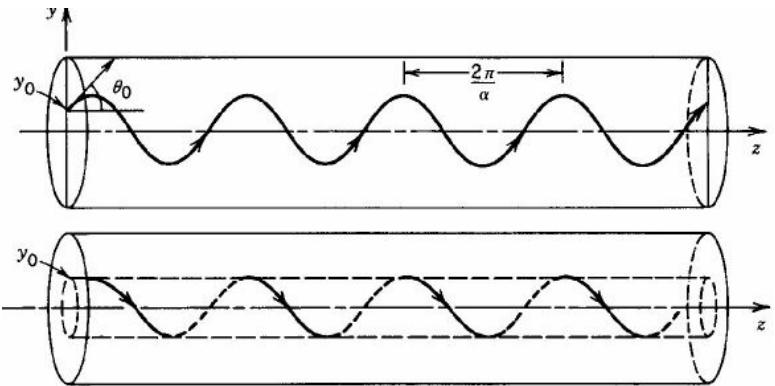
a) Meridionalstrahlen  
( $\theta_{x0} = 0$ , oberes Bild).

Hier bleibt der Strahl in einer Ebene.

b) Helikalstrahlen

( $\theta_{y0} = 0, \theta_{x0} = \alpha y_0$ , unteres Bild).

Hier bewegt sich der Strahl auf einer Schraubenlinie mit konstantem Abstand zur optischen Achse.



saleh1p3-7

#### 1.4.6 Ergänzung: Beziehung zu Fermat-Prinzip

Wir integrieren  $\nabla S = n\vec{e}_t(s)$  entlang des Strahls  $\vec{r}(s)$  zwischen 2 Punkten  $A$  und  $B$ .

$$\int_A^B d\vec{s} \cdot \nabla S(\vec{r}(s)) = \int_A^B d\vec{s} \cdot \vec{e}_t(s) n(\vec{r}(s)) = \int_A^B n(\vec{r}(s)) ds = \text{optische Weglänge von } A \text{ nach } B. \quad (1.46)$$

**Fermat-Prinzip:** Licht breitet sich von  $A$  nach  $B$  auf dem kürzesten optischen Weg aus.

Mit Variationsrechnung kann man zeigen, daß dies äquivalent zur Strahlgleichung (1.42) für  $\vec{r}(s)$  ist. Dies werde hier aber nicht ausgeführt.

## 2 Fourier-Optik

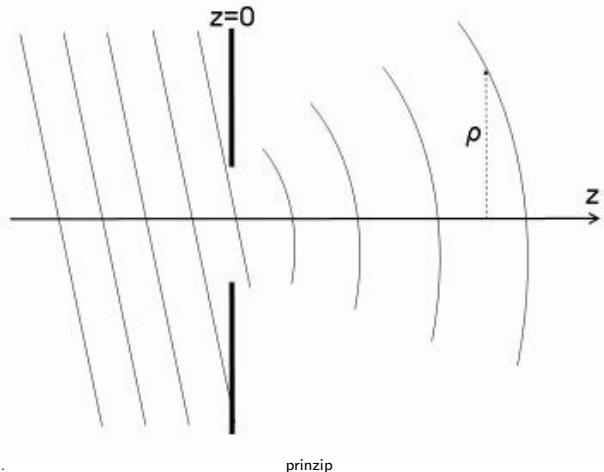
Auch kohärente Optik.

Typische Fragestellung:

Ein Wellenfeld falle auf ein begrenztes Hindernis  
(Lochblende, Beugungsgitter etc.)

– wie breitet es sich dahinter aus?

Zu diesem Problemkreis gehören Beugung und Holografie. Das ist ein sehr breites und nicht ganz triviales Feld.



prinzip

Im Rahmen dieses Kurses haben wir dafür nur 4 Vorlesungsstunden plus Übungen. Deshalb Beschränkung auf die einfachen Grundideen und simpelste Beispiele. Weiterführendes bietet die angegebene Literatur und auch die Vorlesung zur angewandten Optik / Holografie von Dr. Wernicke.

### 2.1 Prinzipien

- monochromatische Felder  $\sim e^{-i\omega t}$

Also, der Ortsfaktor  $f(\vec{r})$  jeder Feldkomponente genügt im Freiraum hinter dem Hindernis der

$$\text{Helmholtz-Gleichung} \quad \{\Delta + k_0^2\} f = 0 \quad \text{mit} \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \quad (1.8)$$

#### • Entwicklung nach ebenen Wellen

Alle ebenen Wellen  $e^{i\vec{k}\vec{r}}$  mit  $|\vec{k}| = \pm k_0$  lösen die Helmholtzgleichung.

*Mathematik beweist:* Jede Lösung der Helmholtz-Gleichung zu gegebenem  $k_0$  kann als Linearkombination dieser ebenen Wellen dargestellt werden.

*Wichtig hierbei:* Es tragen nur Wellen bei mit  $k_0^2 = \vec{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ .

*Also:*

nur 2  $k$ -Komponenten frei wählbar, wir nehmen o.B.d.A.  $k_x$  und  $k_y$ .

$$\begin{aligned} \text{sinnvolle neue Abkürzungen:} \quad & \vec{q} = (k_x, k_y) \quad \text{2-dim Wellenvektor in Ebene } \perp z \\ & \vec{\rho} = (x, y) \quad \text{2-dim Ortsvektor in Ebene } \perp z \end{aligned} \quad (2.1)$$

die dritte hat dann nur 2 mögliche Werte:  $k_z = \pm k_z(q)$  mit  $k_z(q) := +\sqrt{k_0^2 - \vec{q}^2}$ .

Also lautet die Darstellung des Feldes nach ebenen Wellen allgemein

$$f(\vec{\rho}, z) = f_+(\vec{\rho}, z) + f_-(\vec{\rho}, z) \quad \text{mit} \quad f_{\pm}(\vec{\rho}, z) = \int \frac{d^2 q}{4\pi^2} F_{\pm}(q) e^{i\vec{q}\vec{\rho}} e^{\pm i k_z(q) z} \quad (2.2)$$

Bei  $z = 0$  ist das gerade eine 2D Fouriertransformation. Also

$$F_{\pm}(\vec{q}) = \int d^2 \rho \ f_{\pm}(\vec{\rho}, 0) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} \quad \text{Die Entwicklungskoeffizienten } F_{\pm}(k_x, k_y) \text{ der hin- und rücklaufenden Feldamplituden nach ebenen Wellen sind gerade die Fouriertransformierten dieser Amplituden in der Einfallsebene } z = 0 \quad (2.3)$$

Die Feldkomponenten der hin- und rücklaufenden Wellen hinter dem Hinternis werden also vollständig durch deren Amplituden in der Einfallsebene festgelegt.

Mit folgendem 3-Schritt-Rezept kann man also die Felder von  $z = 0$  zu beliebigem  $z > 0$  propagieren<sup>5</sup>:

- Schritt 1: Fouriertransformation der Feldamplituden in der Einfallsebene  $z = 0$ .
- Schritt 2: Multiplikation mit dem Propagationsfaktor  $H(q, z) = \exp(i\sqrt{k_0^2 - q^2}z)$
- Schritt 3: Inverse Fouriertransformation der Resultate gibt das Feld bei  $z$ .

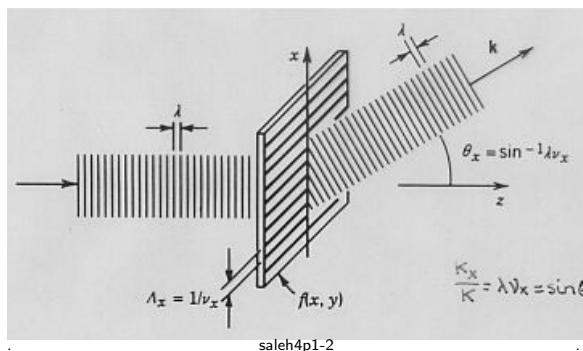
Das ist das Prinzip der Fourier-Optik.

### Beispiel: Folie mit periodischer Durchlässigkeit

Die Durchlässigkeit einer Folie  $t(\vec{p}) = \exp(i\kappa x)$ . Von links falle senkrecht eine ebene Welle  $e^{ik_0 z}$  ein.

Feld bei  $z = 0$  nach der Folie:  $f_+(\vec{p}, 0) = e^{i\kappa x}$ ,  $f_-(\vec{p}, 0) = 0$

Wie breitet sich das Licht nach der Folie aus?



Anwenden Fourier-Rezept:

**Schritt 1:** Fouriertransformation

$$F_+(\vec{q}) = 4\pi^2 \delta(q_x - \kappa) \delta(q_y).$$

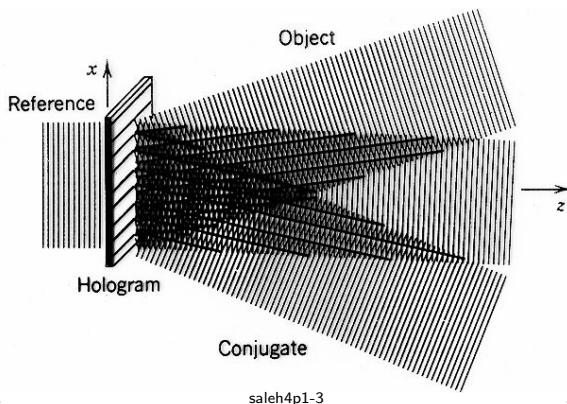
**Schritt 2:** Propagation zur Position  $z$

$$F_+(\vec{q}, z) = 4\pi^2 e^{i\sqrt{k_0^2 - \kappa^2}z} \delta(q_x - \kappa) \delta(q_y)$$

**Schritt 3:** Rücktransformation in Ortsraum

$$f_+(\vec{p}, z) = e^{i[\kappa x + \sqrt{k_0^2 - \kappa^2}z]}$$

Das ist schräg in  $x$ -Richtung abgelenkte Welle. Ablenkwinkel:  $\sin \theta = \kappa/k_0$ . = Beugung am Gitter.<sup>6</sup>



### Verallgemeinerung des Beispiels

Die angenommene komplexe harmonische Durchlässigkeit der Folie ist natürlich unrealistisch.

Man kann aber jede reale Durchlässigkeit  $t(x, y)$  in Fourierkomponenten zerlegen. Das überträgt sich auf das Feld hinter der Folie.

Jede Fourierkomponente des Feldes in der Einfallsebene erzeugt dann eine abgelenkte ebene Partialwelle. Die beiden Ablenkinkel sind gegeben durch  $\vec{\theta} = (\theta_x, \theta_y) = \vec{q}/k_0$ .

Dicht hinter der Folie überlagern sich alle Teilwellen. Mit diesem Nahfeld werden wir uns gleich im Rahmen der Fresnel-Approximation beschäftigen (Fresnel-Beugung).

Sehr weit hinter der Folie (im Vergleich zu ihren Abmessungen) überlagern sich die Partialwellen in die verschiedenen Richtungen nicht mehr. Dieses Fernfeld ist der Bereich der Fraunhofer-Beugung.

Praktisch nutzt man all dies bei der Holografie aus, das kommt noch.

<sup>5</sup>propagieren: fortpflanzen, ausbreiten

<sup>6</sup>Was ist, wenn  $\kappa > k_0$ ? Dann wird  $k_z$  imaginär, also  $f_+(\vec{p}, z) = e^{i\kappa x} e^{-\sqrt{|k_0^2 - \kappa^2|}z}$ . Dies klingt in  $z$ -Richtung exponentiell ab. Man nennt dies eine evanescente Welle. Sie kann sich hinter der Folie nicht in  $z$ -Richtung ausbreiten. Wo bleibt ihre Energie? Sie wird reflektiert, man hat Totalreflexion. Warum kommt die reflektierte Welle bei unserem Fourier-Rezept nicht raus? Qualitative Antwort: Weil wir angenommen haben, dass überall nur eine hinlaufende Welle existiert. Zerlegung des erhaltenen evaneszenten Feldes hinter der Folie liefert aber ebenso starke rückwärts- wie vorwärtslaufende Komponenten, also war die Annahme falsch. Denkt man nun das Fourierprinzip rückwärts (von hinter der Folie nach vorn), hat man gleich starke  $f_+$  und  $f_-$  bei  $z = 0$ , also vor der Folie gleich starke hin- und rücklaufende Wellen, also Totalreflexion. Die genaue Behandlung dieses Falls ist aber nicht Gegenstand dieses Abschnitts.

## 2.2 Vereinfachungen und Näherungen

Der Teufel steckt wie immer im Detail. U.a. gibt es folgendes Problem:

- Man braucht die hin- und rücklaufenden Amplituden in der Einfallsebene einzeln. Die Gesamtamplitude reicht nicht. Rücklaufende Wellen kommen meist von irgendwelchen Reflexionen weiter hinten. Was da zurückkommt, hängt natürlich davon ab, wie die vorwärtslaufende Welle aussieht. Da beißt sich die Katze in den Schwanz, das Problem muß selbstkonsistent gelöst werden.

Im folgenden **Beschränkung auf hinlaufende Welle** (Reflexionen vernachlässigbar).

Der Index  $+$  kann dann weggelassen werden.

### Transfer-Funktionen

Man kann die Amplitude  $f(\vec{p}, z)$  der (vorwärtslaufenden) Welle natürlich bei jedem  $z$  bezüglich  $\vec{p}$  fourier-transformieren. Bezeichnet man diese teilweise Fouriertransformierte mit  $F(\vec{q}, z)$ , so gilt offensichtlich

$$F(\vec{q}, z) = H(q, z) \cdot F(\vec{q}, 0) \quad \text{mit der Impuls-Transferfunktion} \quad H(q, z) = \exp(i\sqrt{k_0^2 - q^2}z). \quad (2.4)$$

Transformiert man dies Fourier zurück, so wird aus dem Produkt eine Faltung, also

$$f(\vec{p}, z) = \int d^2\rho' h(|\vec{p} - \vec{\rho}'|, z) f(\vec{\rho}', 0) \quad (2.5)$$

$$\text{wobei } h(\rho, z) = \int \frac{d^2q}{4\pi^2} e^{i\vec{q}\vec{p}} H(q, z) \text{ die räumliche Transferfunktion ist.} \quad (2.6)$$

Die Impuls-Transferfunktion hängt nur vom Betrag  $|\vec{q}|$  ab, also ihre Fouriertransformierte  $h$  auch nur von  $|\vec{\rho}|$ .

### Nahfeld: Fresnel-Näherung

- Die verschiedenen Feldkomponenten sind nicht unabhängig. Jede der ebenen Wellen ist transversal, d.h., elektrisches Feld, magnetisches Feld und  $\vec{k}$  bilden ein orthogonales Dreibein. Weil die verschiedenen zu (2.2) beitragenden ebenen Wellen verschiedene  $\vec{k}$ -Richtungen haben, macht das eine Auswertung im allgemeinen Fall sehr schwierig.

Meistens tragen aber nur **kleine Divergenzwinkel**  $\theta$  bei.

Dann sind die Feldkomponenten in  $z$ -Richtung vernachlässigbar, es gibt 2 mögliche Polarisationsrichtungen, diese sind entkoppelt und können einzeln betrachtet werden.

Kleine Divergenzwinkel bedeutet  $1 \gg \theta \approx q/k_0$ .

Mithin gilt für die Phase der Impuls-Transferfunktion

$$\sqrt{k_0^2 - q^2}z = k_0 z \sqrt{1 - q^2/k_0^2} \approx k_0 z \sqrt{1 - \theta^2} = k_0 z (1 - \theta^2/2 + \theta^4/8 \mp \dots). \quad (2.7)$$

Fresnel-Näherung: Vernachlässigung aller Terme jenseits  $\theta^2$

Gültigkeitsbedingung:  $\theta \ll 1$  und vernachlässigter Phasenbeitrag klein:  $k_0 z \theta^4/8 \ll \pi$

Mit  $k_0 = 2\pi/\lambda$  bedeutet das für den maximalen Öffnungswinkel  $\theta_m$

$$\frac{\theta_m^4 z}{4\lambda} \ll 1 \text{ bzw. } \boxed{\frac{N_F \theta_m^2}{4} \ll 1} \quad \text{Fresnel-Zahl } N_F = \frac{\theta_m^2 z}{\lambda} = \frac{(\theta_m z)^2}{z\lambda} = \frac{\text{"Bildfläche"}}{z\lambda}. \quad (2.8)$$

Merke: bei kleinen Öffnungswinkeln kann  $N_F$  größer als 1 werden, ohne dies zu verletzen.

Impuls-Transferfunktion in Fresnel-Näherung:

$$H(q, z) \approx \exp\left(ik_0z - i\frac{q^2 z}{2k_0}\right) \quad (2.9)$$

Die Fouriertransformierte von  $a^2 \exp(-a^2 q^2/2)$  ist  $\exp -\rho^2/2a^2$ , also

Orts-Transferfunktionen in Fresnel-Näherung:

$$h(\rho, z) \approx \frac{k_0}{2\pi iz} \exp\left(ik_0z + ik_0\frac{\rho^2}{2z}\right) \quad (2.10)$$

Damit wird (2.5)

$$f(\vec{\rho}, z) = \frac{1}{i\lambda} \int d^2\rho' \frac{\exp\left(ik_0z + ik_0\frac{\vec{\rho}'^2}{2z}\right)}{z} f(\vec{\rho} + \vec{\rho}', 0). \quad (2.11)$$

Das ist eine Überlagerung von Gauß-Bündeln, die von allen Quellpunkten  $(\vec{\rho}', 0)$  ausgehen. Ersetzt man den Kleinwinkelausdruck  $ik_0z + ik_0\vec{\rho}'^2/2z$  rückwärts wieder durch  $ik_0\sqrt{\rho'^2 + z^2}$  und im Nenner  $z$  durch  $r$ , erhält man

$$f(\vec{\rho}, z) \approx \frac{1}{i\lambda} \int d^2\rho' \frac{\exp(ik_0r)}{r} f(\vec{\rho}', 0) \quad \text{Kirchhoff's Beugungsintegral (Kleinwinkelfall).} \quad (2.12)$$

Hier ist  $r = \sqrt{(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2 + z^2}$  der Abstand Quellpunkt – Aufpunkt.

Das entspricht dem **Huygens-Prinzip**:

das Feld im Aufpunkt  $(\vec{\rho}, z)$  ist die Überlagerung der Kugelwellen aus allen Quellpunkten  $(\vec{\rho}', 0)$ .

## 2.3 Fernfeld: Fraunhofer-Näherung

Oft hat man den Fall, daß das Feld in der Einfallsebene  $z = 0$  nur eine endliche Ausdehnung hat (Blende).

Gelte also  $f(\vec{r}, 0) = 0$  für  $\rho > b$ .

Fernfeld: das Feld für  $z \gg b$ .

Anschaulich ist klar, dass sich dann Partialwellen, die in verschiedene Richtungen laufen, nicht mehr überlappen. Die bei  $\vec{r} = (\vec{\rho}, z)$  ankommende Amplitude wird also vor allem durch die Amplitude jener Partialwelle bestimmt, deren Wellenvektor parallel zu  $\vec{r}$  ist, also gleich  $k_0 \vec{r}/r$ . Die Amplituden der Partialwellen sind nun ihrerseits proportional zur Fouriertransformierten  $F(\vec{q}, 0)$  des Feldes in der Einfallsebene. Also

$$f(\vec{\rho}, z) \sim F(k_0 \frac{\vec{\rho}}{r}, z) \quad (z \gg b) \quad \text{Fraunhofer-Näherung qualitativ} \quad (2.13)$$

Das Fernfeld ist proportional zur Fouriertransformierten des Feldes in der Einfallsebene.

Mehr mathematisch formal: entsprechend dem "Fourier-Rezept" (2.4) gilt

$$f(\vec{\rho}, z) = \int \frac{d^2 q}{4\pi^2} e^{i(\sqrt{k_0^2 - q^2} z + \vec{q} \cdot \vec{\rho})} F(\vec{q}, 0).$$

Wenn  $z$  sehr groß ist, oszilliert der Phasenfaktor als Funktion von  $\vec{q}$  fast überall extrem stark. Nur nicht dort, wo der Exponent stationär wird. Das ist gerade bei  $\vec{q}_0 = k_0 \vec{\rho}/r$  der Fall. Wegen der räumlichen Begrenzung des Feldes in der Einfallsebene ist  $F$  hingegen relativ glatt<sup>7</sup>. Der Hauptbeitrag zum Integral kommt dann aus einer kleinen Umgebung von  $\vec{q}_0$ , man kann  $F$  dort aus dem Integral ziehen:

$$f(\vec{\rho}, z) \approx F(k_0 \frac{\vec{\rho}}{r}, z) \int \frac{d^2 q}{4\pi^2} e^{i(\sqrt{k_0^2 - q^2} z + \vec{q} \cdot \vec{\rho})} \quad (2.14)$$

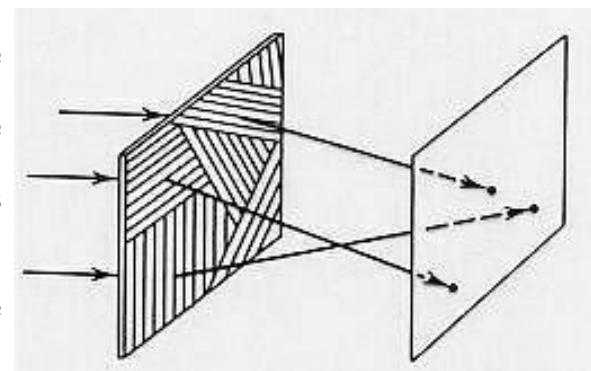
Beschränkt man sich noch auf den Kleinwinkelfall ( $\rho \ll z$ ), so lässt sich das Integral auswerten und man erhält

$$f(\vec{\rho}, z) = \frac{\exp(ik_0 r)}{i\lambda r} F(k_0 \frac{\vec{\rho}}{r}, 0). \quad (z \gg b) \quad \text{Fraunhofer-Näherung, Kleinwinkelfall} \quad (2.15)$$

Fazit: Das Fernfeld ist die Fouriertransformierte des Feldes in der Einfallsebene.

Anwendung 1: optischer Verbindungsschalter

Wenn sich in der Einfallsebene eine Folie befindet, die in verschiedenen Bereichen unterschiedliche Fourierkomponenten erzeugt, so wird eine einfallende ausgedehnte ebene Welle in verschiedene Richtungen (Kanäle) aufgeteilt. Ist die Abmessung der einfallenden Welle kleiner als der verschiedenen Folienbereiche, kann man sie wahlweise in jeden der Kanäle schalten, indem man sie auf den betreffenden Bereich auffallen lässt. So kann man optische Verbindungskanäle "umstöpseln".

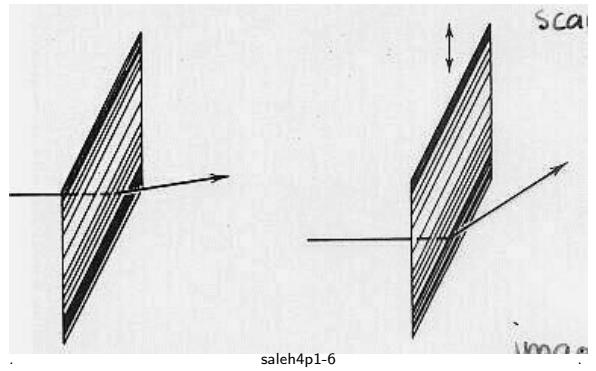


saleh4p1-5

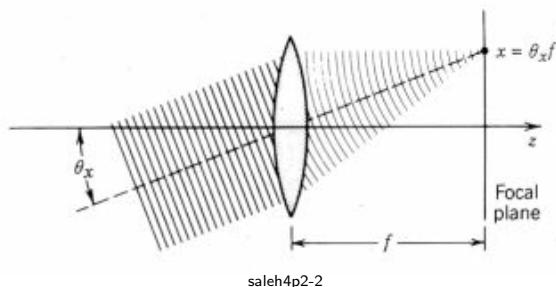
<sup>7</sup>Wenn die Blende die lineare Dimension  $b$  hat, ist die Fouriertransformierte  $F$  des Feldes glatt in Bereichen der Dimension  $1/b$  im  $\vec{q}$ -Raum.

## Anwendung 2: "Scannen"

In der Einfallsebene befindet sich eine Folie mit harmonisch modulierter Transparenz, wobei die Periode von der Mitte aus nach aussen hin allmählich linear abnehme. Dann wird der Ablenkinkel  $\theta$  für ein einfallendes Wellenfeld proportional zum Abstand des Einfallspunktes von der Mitte. Läßt man die Folie auf und ab schwingen, ändert sich der Ablenkinkel periodisch. Das kann zum Scannen benutzt werden (Abtasten einer Zeile mit dem Lichtstrahl). Auf ein ausgedehntes Wellenfeld wirkt solch eine Folie wie eine Zylinderlinse.



## 2.4 Fouriertrafo mit Linsen und Blenden



Linse mit Brennweite<sup>a</sup>  $f$  bei  $z = 0$ .

Ebene Welle falle unter Winkel  $(\theta_x, \theta_y) = \vec{q}/k_0 \ll 1$  ein.

Bekannt aus Strahlenoptik:  
wird auf Punkt  $(\theta_x f, \theta_y f, f)$  in Brennebene fokussiert.

Wellenoptischer Beweis: Übung.

<sup>a</sup>Aufpassen, gleicher Buchstabe für Brennweite und optische Amplitude, ist aber leicht außenanderzuhalten.

beliebiges einfallendes Wellenfeld: jede Partialwelle  $\vec{q}$  "belichtet" einen anderen Punkt in der Brennebene.

Nun ist die Amplitude der Partialwelle  $\vec{q}$  proportional zur Fourierkomponente  $F(\vec{q}, -d)$  des einfallenden Feldes in einer beliebigen Ebene  $z = -d$  vor der Linse.

Also: Feldamplitude in Brennebene nach Linse  $\sim$  Fouriertransformierte der Amplitude vor der Linse.

**Linsen sind Fouriertransformatoren.**

So weit qualitativ. Quantitativ ergibt die Rechnung in Fresnel-Näherung ([1], Abschnitt 4.2.B):

$$f(\vec{\rho}, z = f) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left(ik_0(d + f) + i\pi \frac{\rho^2(d - f)}{\lambda f^2}\right) F\left(\frac{\vec{\rho}}{\lambda f}, z = -d\right). \quad (2.16)$$

*Diskussion:*

• Intensität:	$ f(\vec{\rho}, z = f) ^2 = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \left  F\left(\frac{\vec{\rho}}{\lambda f}, z = -d\right) \right ^2$	unabhängig von $d$ !
---------------	--	----------------------

(2.17)

Die Intensität in der Brennebene hinter der Linse ist direkt proportional zum Betragsquadrat der Fouriertransformierten (bezgl.  $x, y$ ) der Feldamplitude in jeder beliebigen Ebene  $\perp z$  vor der Linse.

- Phasenfaktor:  $\vec{\rho}$ -unabhängig für  $d = f$   
 $\Rightarrow$  Die Feldamplitude in der Bennebene hinter der Linse ist proportional zur Fouriertransformierten der Feldamplitude in der Brennebene vor der Linse.

## Anwendung: Blenden vor der Linse

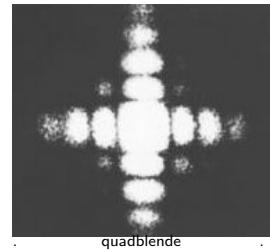
Ebene Welle senkrechter Einfall + Blende vor Linse  $\Rightarrow$  in Brennebene nach Linse sieht man das Betragsquadrat der Fouriertransformierten der Blende als Intensitätsverteilung. Dafür 3 Beispiele.

### quadratische Lochblende:

$$f(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x|, |y| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(\vec{q}, 0) \propto \frac{\sin(q_x a)}{q_x a} \cdot (x \leftrightarrow y)$$

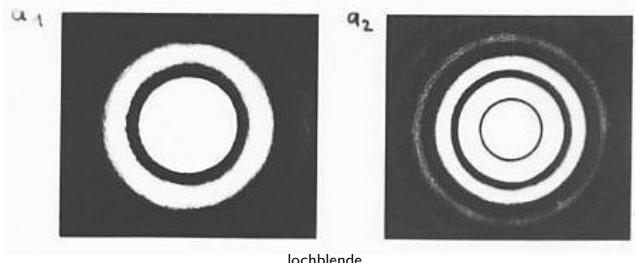
Bild in Brennebene:



### kreisförmige Lochblende:

$$f(\rho, 0) = \begin{cases} 1 & \text{if } \rho < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(\vec{q}, 0) \propto \frac{a}{q} \cdot J_1(qa)$$

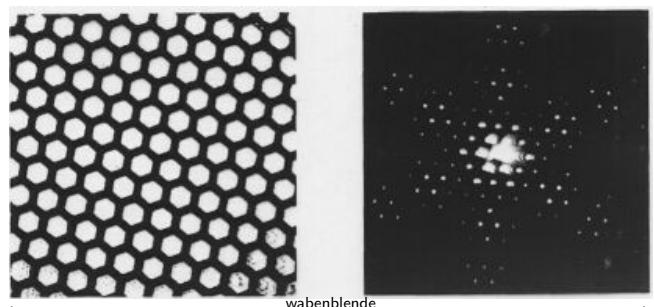


### Wabenmuster:

Hier keine Rechnung.

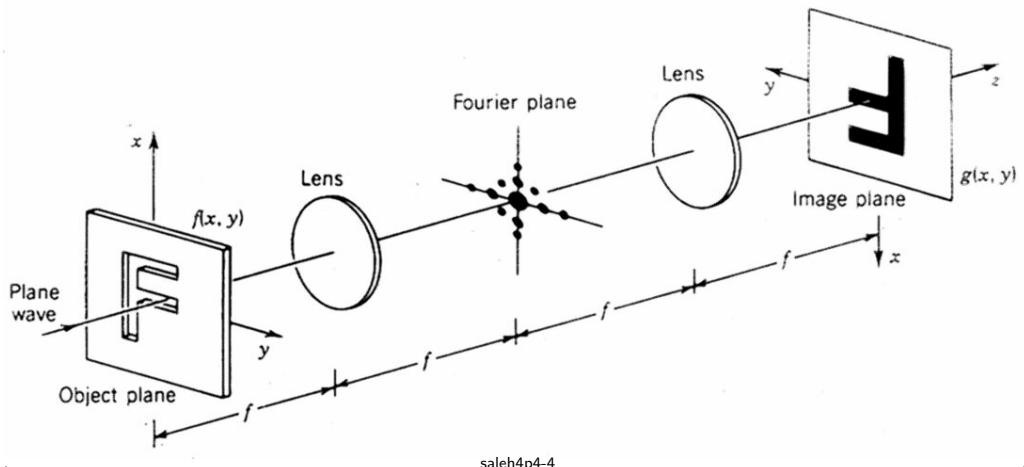
Links die Blende mit dem Wabenmuster.

Rechts die Intensitätsverteilung in der Fokalebene hinter der Linse.



### Anwendung: räumliche Filterung

#### 4f-System



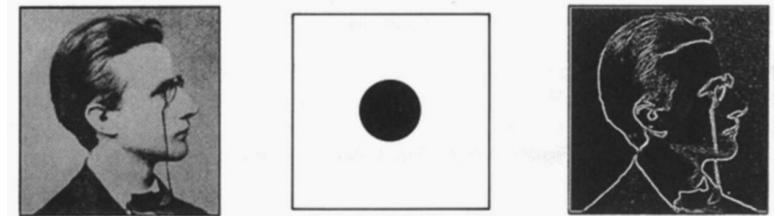
Erste Linse erzeugt in der Mitte Fouriertransformierte des Urbildes. Zweite Linse daraus umgekehrtes Bild.

Mit Blenden in der Fourierebene kann man die Fouriertransformierte und damit das Bild modifizieren:

Tiefpass-Filter  
(hohe Fourierkomponenten weg)



Hochpass-Filter  
(tiefe Fourierkomponenten weg)



Vertikalpass-Filter  
(horizontal hohe Fourierkomponenten weg)



saleh4p4-6

## 2.5 Holografie

Jeder kennt heutzutage Hologramme: sie zeigen 3D Bilder.

Wie kann man ein Hologramm herstellen?

Man braucht dazu das abzubildende Objekt, einen Laser, die Photoschicht und ein bissel Kleinkram.

### 2.5.1 Vereinfachte Grundidee

Mit dem monochromatischen Laserlicht bestrahlt man das Objekt.

Was ein Beobachter vom Objekt sieht, ist die reflektierte Welle, die Objektwelle.

Ihre Amplitude sei  $f_o(\vec{r})$ .

Der Beobachter sieht das gleiche, wenn bei ihm genau diese Amplitude künstlich erzeugt wird.

Das macht ein Hologramm.

Nun kommt die Fourieroptik ins Spiel:

Man stelle in die Ebene  $z = 0$  eine Folie der Transparenz  $t(\vec{r}) = f_o(\vec{r}, 0)$ , bestrahe diese von links mit einer ebenen monochromatischen Welle und schon hat man rechts die Objektwelle rekonstruiert.

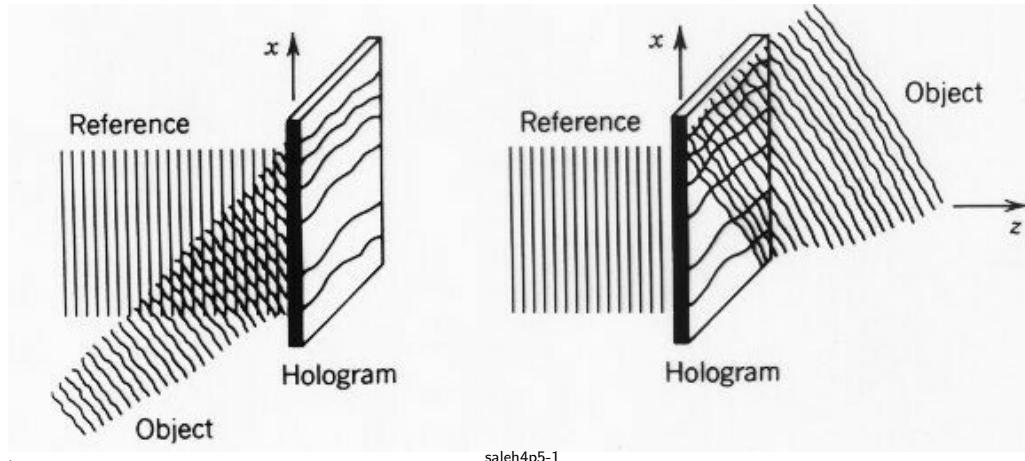
**Problem:** Es gibt keine Folie mit dieser Transparenz, weil  $f_o(\vec{r}, 0)$  komplex ist.

Man muß die Phaseninformation mit abspeichern.

Das gelingt mit einem von Gabor 1947 erfundenen Trick, der das nächste mal dran kommt.

## 2.5.2 Holografische Kodierung

Man überlagert die Objektwelle mit einem Teil des Laserlichts, der Referenzwelle  $f_r(\vec{r})$ . Das Interferenzbild beider wird auf der Photoplatte aufgenommen. Durchstrahlt man diese dann nur mit der Objektwelle, entsteht das Hologramm.



Rechnen wir das durch:

Auf der Photoplatte setzt sich die Intensität (reell!) in Schwärzung um:

$$t \sim |f_o + f_r|^2 = I_o + I_r + f_r^* f_o + f_o^* f_r. \quad (\text{bei } z = 0 \text{ für jedes } \vec{r} = (x, y)) \quad (2.18)$$

Schickt man durch die entwickelte Platte nur die Referenzwelle, entsteht hinter ihr die Abfragewelle

$$f_a = t \cdot f_r \sim (I_o + I_r) f_r + I_r f_o + f_r^2 f_o^* \quad (\text{bei } z = 0 \text{ für jedes } \vec{r} = (x, y)) \quad (2.19)$$

Es entsteht also nicht nur die gewünschte Objektwelle, sondern insgesamt 3 Teilwellen:

$$(I_o + I_r) f_r - \underline{\text{durchgehende Referenzwelle}} \quad (\text{Ambiguity}) \quad (2.20)$$

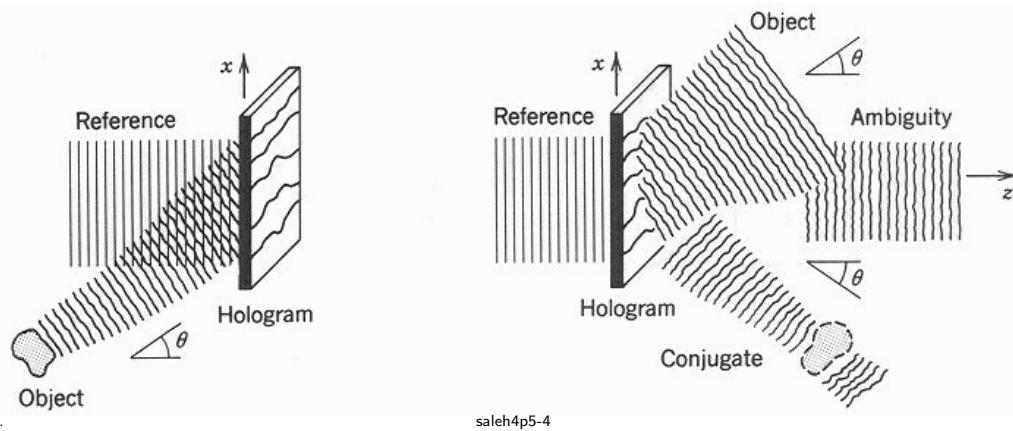
Wenn die Einzelintensitäten auf der Photoplatte konstant sind, entspricht das genau der durchgehenden Referenzwelle, bis auf einen konstanten Schwächungsfaktor. In der Realität variieren die Einzelintensitäten schwach, entsprechend ergeben sich leichte Modifikationen der durchlaufenden Referenzwelle.

$$I_r f_o - \underline{\text{Objektwelle}} \quad (2.21)$$

Das ist genau die Welle, die wir für die Holografie brauchen, wenn wir dafür sorgen, daß die Intensität  $I_r$  der Referenzwelle über das Hologramm hinweg hinreichend schwach variiert.

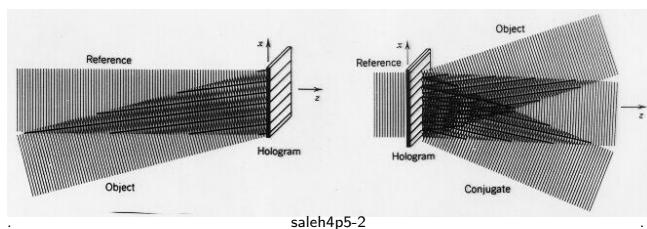
$$f_r^2 f_o^* - \underline{\text{konjugierte Welle}} \quad (2.22)$$

Sie heißt so, weil das konjugiert komplexe  $f_o^*$  der Objektamplitude eingeht. Dies allein wäre praktisch die rückwärts laufende Objektwelle. Der Faktor  $f_r^2$  trägt aber auch Phaseninformation. Wir werden das an Beispielen weiter diskutieren.



Damit ist das Grundprinzip der Holografie klar.

### 2.5.3 Hologram einer schräg einfallenden ebenen Welle



Die Referenzwelle falle senkrecht ein,  $f_r(\vec{r}) = I_r^{1/2} e^{ik_0 z}$ .

Die Objektwelle bei der Aufnahme (links) unter einem Winkel  $\theta$ :  $f_o(\vec{r}) = I_o^{1/2} e^{ik_0(\sin(\theta)x + \cos(\theta)z)}$ .

Für die 3 Abfrage-Partialwellen gibt das:

durchgehende:  $(I_r + I_o) I_r^{1/2} e^{ik_0 z}$ , ebene Welle in  $z$ -Richtung.

Objekt:  $I_r I_o^{1/2} e^{ik_0(\sin(\theta)x + \cos(\theta)z)}$ , so wäre in der Tat die originale Objektwelle ohne Hologramm

konjugierte:  $I_r e^{2ik_0 z} \cdot I_o^{1/2} e^{-ik_0(\sin(\theta)x + \cos(\theta)z)} \stackrel{\theta \ll 1}{\approx} I_r I_o^{1/2} e^{ik_0(-\theta x + z)}$ ,  
die Objektwelle an der  $z$ -Achse gespiegelt.

Da jede Objektwelle als Überlagerung ebener Wellen dargestellt werden kann, ist es sinnvoll, erst diesen Fall zu betrachten.

Wir werden insbesondere sehen, daß die konjugierte Welle genau so läuft, wie in der Abbildung dargestellt.

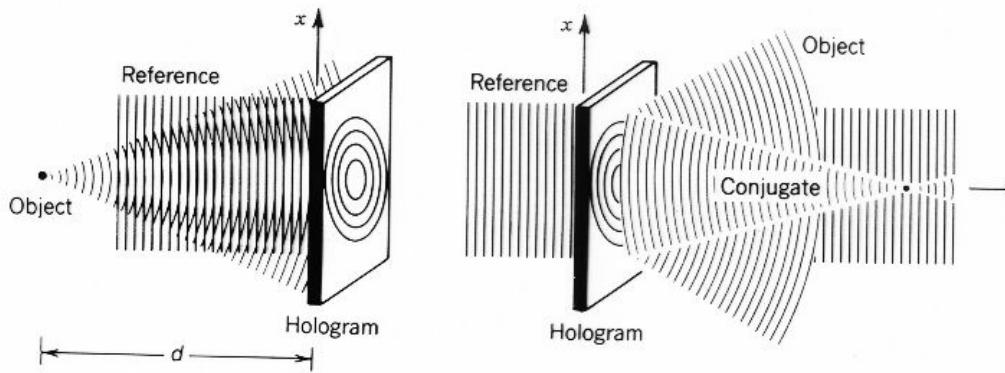
### 2.5.4 Hologramm eines punktförmigen Objekts

Die Referenzwelle bleibe eine ebene Welle mit senkrechtem Einfall.

Die Objektwelle ist eine Kugelwelle  $f_o \sim e^{ik_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|} / |\vec{r} - \vec{r}_0|$ .

Interessant ist die konjugierte Abfrage-Welle:

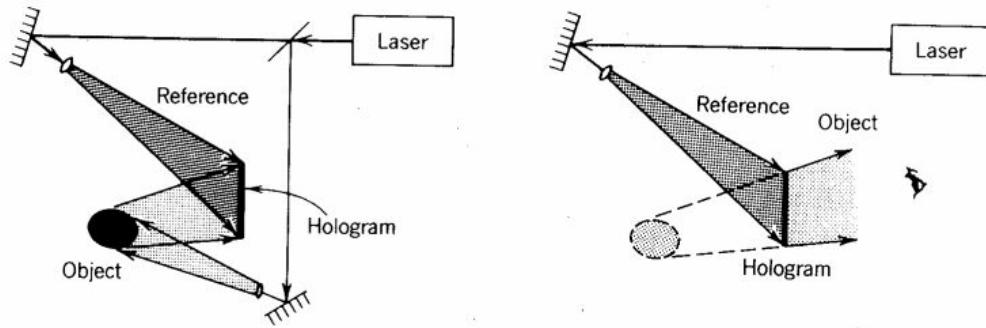
Der Faktor  $f_o^*$  für die rückwärts laufende Objektwelle ist zu multiplizieren mit  $f_r^2 \sim e^{i2k_0 z}$ . Dadurch wird die Laufrichtung in  $z$ -Richtung wieder umgepolt, das Produkt ist (näherungsweise) eine Kugelwelle, die in dem am Hologramm gespiegelten Punkt wieder zusammenläuft.



saleh4p5-3

### 2.5.5 Aufnahme von Hologrammen

- Wegunterschied muß innerhalb der Kohärenzlänge liegen

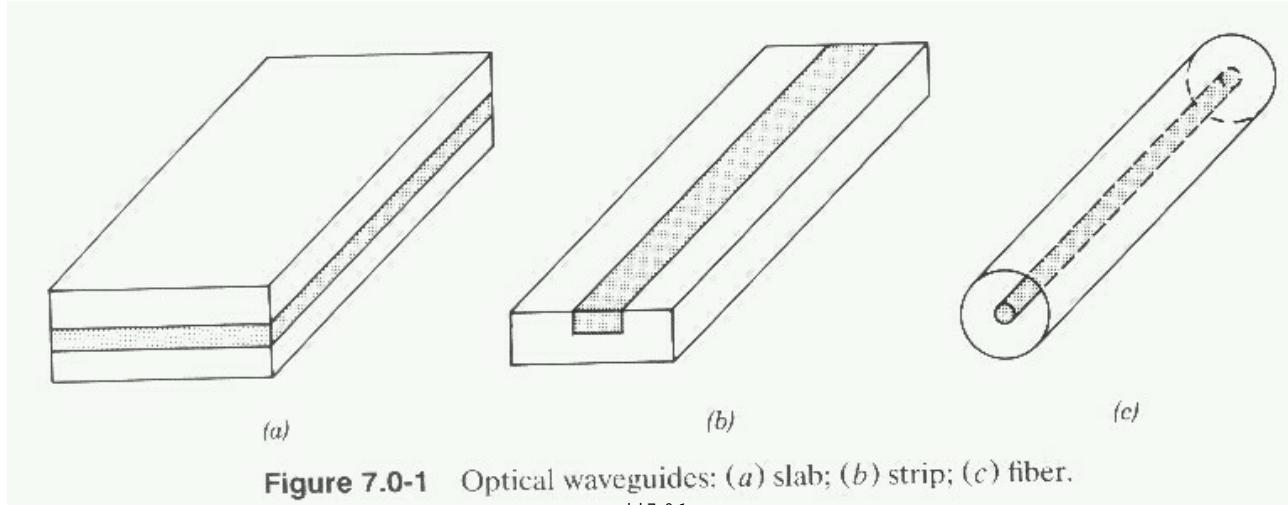


saleh4p5-7

Weitere Punkte siehe Literatur und auch die Wernicke-Skripte unter  
<http://www-pbp.physik.hu-berlin.de/koh/ger/Script.pdf>

### 3 Geführte Wellen

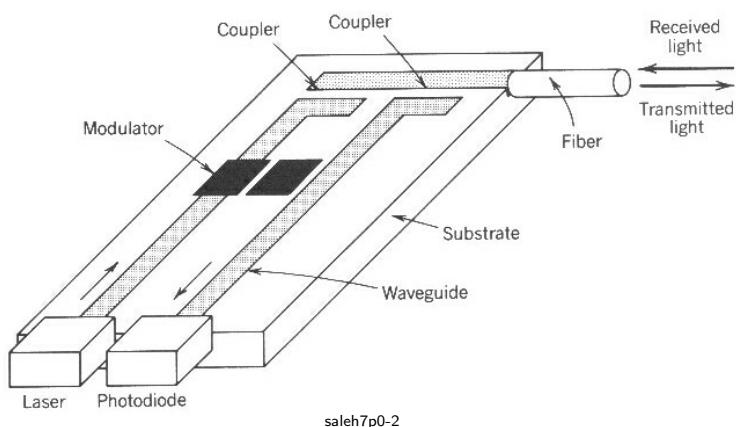
Die im Freiraum unvermeidliche Divergenz eines räumlich begrenzten Lichtbündels kann bei der Verwendung von Lichtwellenleitern vermieden werden. Das sind Materialien, deren Brechindex entlang der optischen Achse konstant ist und in der Nähe der optischen Achse größer ist als weiter draußen. Weitbekanntes Beispiel dafür sind Glasfasern (Schema rechts), ohne die die modernen "Datenaubahn" des Internet nicht existieren würden.



**Figure 7.0-1** Optical waveguides: (a) slab; (b) strip; (c) fiber.

saleh7p0-1

Wir werden uns zunächst das Prinzip eines Wellenleiters anhand einfacher planarer Wellenleiter (linkes Schema) klar machen. Für die integrierte Optik sind auch noch die Streifenwellenleiter (Schema Mitte) von großer Bedeutung. Hier werden wir vor allem auf gekoppelte Wellenleiter eingehen, wie sie in optischen Schaltkreisen Anwendung finden (Beispiel Skizze rechts).



Geführte Wellen: Intensität unabhängig von  $z$  (Koordinate entlang Achse).

Weil die Intensität proportional zum Betragsquadrat der Feldamplitude ist, bedeutet das Amplitude  $\sim e^{i\beta z}$  mit konstantem  $\beta$  (Ausbreitungskonstante).

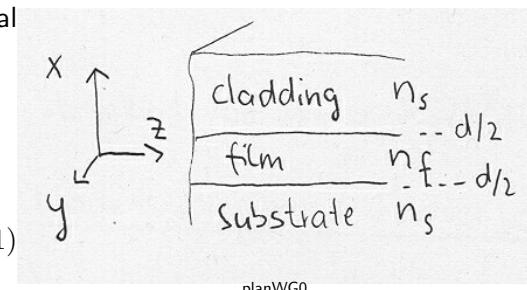
#### 3.1 Der symmetrische planare Schicht-Wellenleiter

Ein dünner Film mit Brechindex  $n_f$  ist eingebettet in Material mit dem Brechindex  $n_s < n_f$ .

Ansatz:  $\vec{E} = \vec{E}(x)e^{i(\beta z - \omega t)}$ ,  $\vec{H} = \vec{H}(x)e^{i(\beta z - \omega t)}$ .

Einsetzen in Maxwellgleichung für monochromatische Wellen

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega \mu_0 \vec{H} \quad \nabla \times \vec{H} = -i\omega \epsilon \vec{E} \quad (3.1)$$



Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{E}(x)e^{i\beta z}) &= e^{i\beta z} \nabla \times \vec{E}(x) + [\nabla e^{i\beta z}] \times \vec{E} \\ &= e^{i\beta z} (\nabla \times \vec{E}(x) + i\beta \vec{e}_z \times \vec{E}) = e^{i\beta z} (-i\beta E_y, +i\beta E_x - E'_z, E'_y)\end{aligned}\quad (3.2)$$

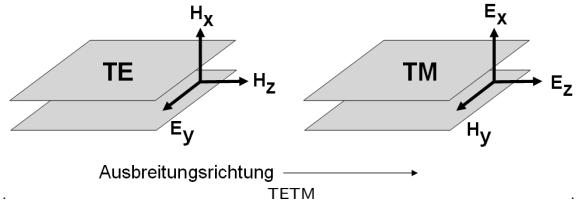
wobei ' die Ableitung nach  $x$  bedeutet. Einsetzen in MGI (3.1 ) gibt für die 6 Komponenten

$$\begin{array}{lll} i\omega\mu_0 H_x & = & -i\beta E_y \\ i\omega\mu_0 H_y & = & +i\beta E_x - E'_z \\ i\omega\mu_0 H_z & = & +E'_y \end{array} \quad \begin{array}{lll} -i\omega n^2(x)\varepsilon_0 E_x & = & -i\beta H_y \\ -i\omega n^2(x)\varepsilon_0 E_y & = & +i\beta H_x - H'_z \\ -i\omega n^2(x)\varepsilon_0 E_z & = & +H'_y \end{array} \quad (3.3)$$

Es gibt 2 verschiedene Lösungstypen (Polarisationen):

TE-Wellen und TM-Wellen.

### TE-Wellen:



TE = Transversal Elektrisch:  $E_z = 0 \Rightarrow H_y = \text{const.} = 0 \Rightarrow E_x = 0$ .

Bilden  $E''_y = i\omega\mu_0 H'_z = i\omega\mu_0(i\omega\varepsilon_0 n^2 E_y + i\beta \frac{-i\beta}{i\omega\mu_0} E_y) \Rightarrow$

$$E''_y = (\beta^2 - n^2 k_0^2) E_y \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad E_y \& E'_y \sim H_z \text{ stetig an Grenzfläche.} \quad (3.4)$$

Das ist die Bestimmungsgleichung für die einzige nichtverschwindende elektrische Feldkomponente einer TE-Welle. Die beiden nichtverschwindenden magnetischen Feldkomponenten  $H_x, H_z$  ergeben sich damit direkt aus der ersten und letzten linken Gleichung in (3.3).

### TM-Wellen:

TM = Transversal Magnetisch:  $H_z = 0 \Rightarrow E_y = \text{const.} = 0 \Rightarrow H_x = 0$ .

Bilden  $(H'_y/n^2)' = -i\omega\varepsilon_0 E'_z = -i\omega\varepsilon_0(-i\omega\mu_0 H_y + i\beta \frac{-i\beta}{i\omega\varepsilon_0 n^2} H_y) \Rightarrow$

$$n^2 \left( \frac{H'_y}{n^2} \right)' = (\beta^2 - n^2 k_0^2) H_y \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad H_y \& \frac{H'_y}{n^2} \sim E_z \text{ stetig an Grenzfläche.} \quad (3.5)$$

Das ist die Bestimmungsgleichung für die einzige nichtverschwindende magnetische Feldkomponente einer TM-Welle. Die beiden nichtverschwindenden elektrischen Feldkomponenten  $E_x, E_z$  ergeben sich damit direkt aus der ersten und letzten rechten Gleichung in (3.3).

### Moden und Feldverteilungen für TE-Wellen

Umschreiben Gleichung (3.4):  $E''_y + k_0^2 n^2(x) E_y = \beta^2 E_y$ . Das ist analog zur 1D-Schrödinger-Gleichung, wobei  $-n^2(x)$  die Rolle des Potentials spielt und  $-\beta^2$  die des Energieniveaus.<sup>8</sup> Entsprechend kann man folgendes Spektrum erwarten:

$\beta^2$ -Bereich	Spektrum der Eigenwerte	Feldamplitude $E_y(x)$
$k_0^2 n_f^2 < \beta^2$	keine Eigenwerte	—
$k_0^2 n_s^2 < \beta^2 < k_0^2 n_f^2$	diskrete Werte	Im Film konzentriert, nach oben und unten exponentiell abklingend. Dies sind die geführten Wellen bzw. <b>geführte Moden</b> .
$\beta^2 < k_0^2 n_s^2$	kontinuierliches Spektrum	unendlich nach oben und unten ausgedehnte Welle. Dies entspricht Feldern, die nicht nur in $z$ -Richtung laufen, sondern auch zum Teil in $x$ -Richtung, die also den Film schräg durchqueren. Man nennt sie <b>Strahlungsmoden</b> .

Weil wir von der speziellen Form von  $n(x)$  noch nicht Gebrauch gemacht haben, gilt alles bis hier für jeden planaren Wellenleiter, wobei  $n_f = \max(n(x))$  und  $n_s = \max(n(\pm\infty))$ .

Nun konkret zum Schichtwellenleiter. Die Rechnung ist völlig analog zum endlichen Potentialtopf der Quantenmechanik. Die Hauptschritte sind:

<sup>8</sup>  $k_0 n^2(x) \hat{=} -2mV(x)/\hbar^2$ ,  $\beta^2 \hat{=} -2mE/\hbar^2$

- *Ausnutzen der Symmetrie:*

$n^2(x) = n^2(-x) \Rightarrow E_y(x) = \pm E_y(-x)$  (symmetrische und antisymmetrische Moden).  
Brauchen nur  $x > 0$  zu betrachten.

- *Lösung im Film:*

$$E_y(x) = \begin{cases} \cos(kx) & (\text{symm.}) \\ \sin(kx) & (\text{antisymm.}) \end{cases} \quad (k = \sqrt{n_f^2 k_0^2 - \beta^2}). \quad (3.6)$$

- *Lösung außerhalb:*

$$E_y(x) = a \exp(-\gamma(x - d/2)) \quad (\gamma = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_s^2}). \quad (3.7)$$

- *Stetigkeit an Grenzfläche:*

$$E_y : \begin{cases} \cos(kd/2) \\ \sin(kd/2) \end{cases} = a \quad E'_y : \begin{cases} -k \sin(kd/2) \\ k \cos(kd/2) \end{cases} = a\gamma. \quad (3.8)$$

Quotient beider und Multiplikation mit  $d/2$  gibt die Eigenwertgleichungen

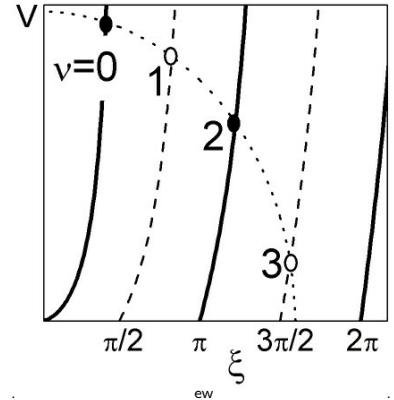
$$\boxed{\sqrt{V^2 - \xi^2} = \pm \xi [\tan(\xi)]^{\pm 1}} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \xi &= kd/2 = \sqrt{n_f^2 - n_{eff}^2} k_0 d/2 && \text{Eigenwert} \\ V &= \sqrt{n_f^2 - n_s^2 k_0 d/2} && \text{Frequenzparameter} \\ n_{eff} &= \frac{\beta}{k_0} && \text{effektiver Brechungsindex} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die Abb. illustriert, wie die Eigenwertgleichung graphisch gelöst werden kann. Fett schwarz: rechte Seite symm., gestrichelt: rechte Seite antisymm., gepunktet: linke Seite. Fette volle Punkte: Eigenwert für symmetrische Lösung, Offene Punkte: Eigenwerte für antisymmetrische Lösung.

Die linke Seite der Eigenwertgleichung ist ein Kreis mit dem Radius  $V$ .

Auf der rechten Seite liefern abwechselnd die symmetrischen und die antisymmetrischen Terme positive Beiträge, die für  $\xi \rightarrow n\pi/2$  divergieren.



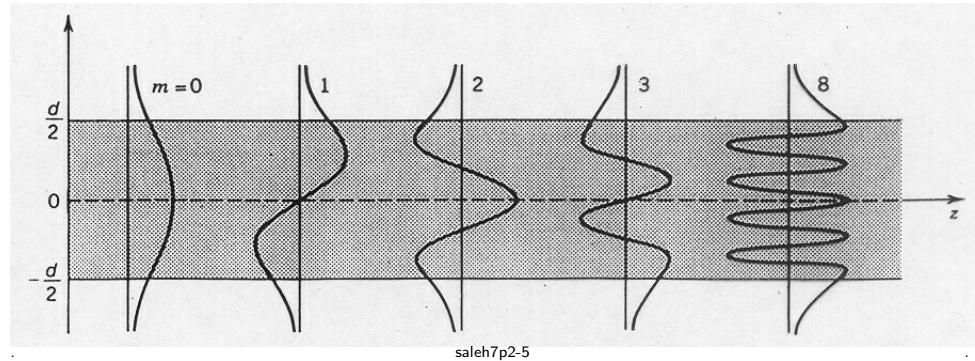
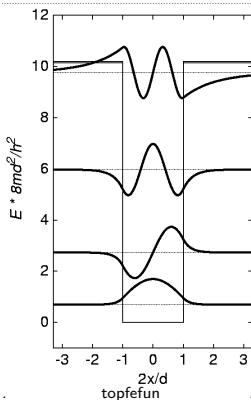
Wo sich beide Kurvenscharen kreuzen, liegen die Eigenwerte, die mit dem ganzzahligen Modenindex  $\nu$  durchnumeriert werden. (große Punkte, voll=symm, hohl=antisymm).

Bei schwachen Wellenleitern (kleiner Indexsprung) ist  $V$  und damit der Kreisradius klein und es gibt nur einen Eigenwert in diesem Energieintervall.

Mit wachsendem  $V$  wächst der Kreisradius und die Anzahl der Schnittpunkte nimmt zu.

Dabei wechseln symmetrische und antisymmetrische Eigenfunktionen einander ab.

Wellenfunktionen: die beiden Abbildungen zeigen die Wellenfunktionen eines Quantentopfes (links) und die Modenamplituden  $E_y(x)$  eines entsprechenden Wellenleiters.

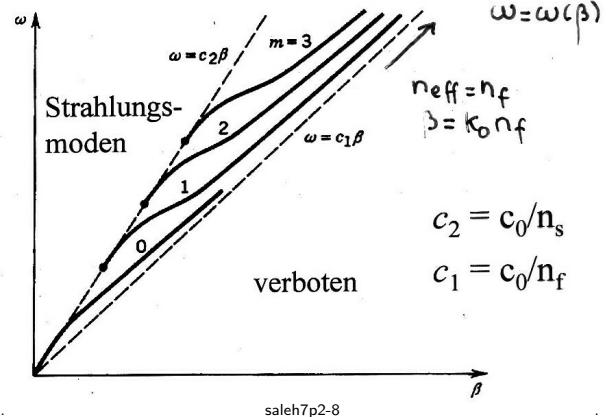


Diese Eigenfunktionen klingen nach außen hin exponentiell ab.

Anzahl geführter Moden:  $N = 1 + \text{ganzzahliger Anteil von } \frac{V}{\pi/2} = \frac{2d}{\lambda} \sqrt{n_f^2 - n_s^2}$ .

Dispersionsrelation: Die Eigenwertgleichung bedingt  $\omega = \omega_\nu(\beta)$  bzw.  $\beta = \beta_\nu(\omega)$

Zwischen den beiden Grenzkurven  $\omega = c\beta/n_f$  (Materialdispersion des wellenführenden Films) und  $\omega = c\beta/n_s$  (Dispersion des Substratmaterials) liegt das Gebiet der geführten Moden. Links darüber das Gebiet der Strahlungsmoden (Kontinuum), rechts darunter gibt es keine Moden.

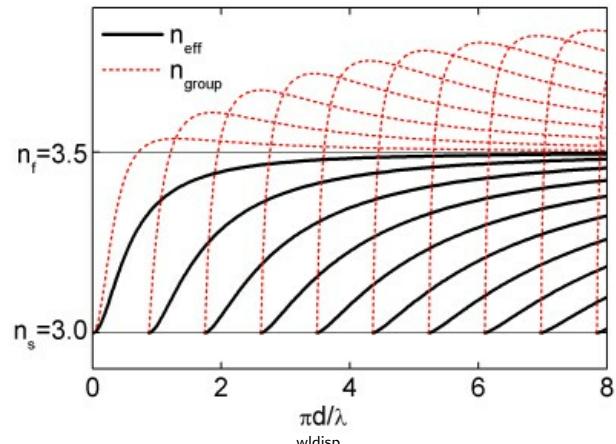


"cut off" Frequenz: Für Frequenzen unterhalb von  $\omega_c^{(\nu)} = \nu\pi c/(d\sqrt{n_f^2 - n_s^2})$  gibt es keine geführte Mode der Ordnung  $\nu$ .

Gruppengeschwindigkeit:  $v_\nu = \partial_\beta \omega_\nu(\beta)$ .

Sie ist um den Faktor  $n_g = c/v_\nu$  (Gruppenindex) kleiner als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Die Abbildung zeigt die effektiven Indizes (durchgezogen) und die Gruppenindizes der tiefsten Moden eines typischen Halbleiter-Wellenleiters. Während der effektive Index immer zwischen den beiden Materialwerten  $n_s$  und  $n_f$  liegt, wächst der Gruppenindex einer Mode in einem kleinen Gebiet oberhalb der cutoff-Frequenz rasch auf Werte über  $n_f$ , durchläuft ein Maximum und strebt dann von oben gegen  $n_f$ . Die Gruppengeschwindigkeit des Wellenleiters ist also in der Regel noch langsamer als im Material mit der kleinsten Aus-

breitungsgeschwindigkeit. Wegen der verschiedenen Gruppengeschwindigkeiten haben verschiedene Moden unterschiedliche Laufzeiten entlang eines Wellenleiters.



## Grenzfall starke Wellenführung

Wenn  $V \gg 1$ , dann gilt für Moden mit  $\nu \ll 2V/\pi$  annähernd  $\xi_\nu \approx \nu \frac{\pi}{2}$ , also

$$\text{Dispersion: } \omega^2 \approx c_f^2 \left( \beta^2 + \nu^2 \frac{\pi^2}{d^2} \right) \quad (3.11)$$

$$\text{Gruppengeschwindigkeit: } v_\nu \approx c_f \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + (\nu\pi/d)^2}} < c_f \quad (3.12)$$

$$\text{Gruppenindex: } n_g \approx n_f \sqrt{1 + \left( \frac{\nu\pi}{\beta d} \right)^2} > n_f \quad (3.13)$$

Dieser Grenzfall entspricht dem unendlich tiefen Potentialtopf in der Quantenmechanik.

## Moden und Feldverteilungen für TM-Wellen

Qualitativ analog zu den TE-Wellen. Quantitativ liegen die Eigenwerte wegen der verschiedenen Randbedingungen etwas anders, dies soll hier nicht ausgeführt werden.

### 3.2 Weitere Geometrien

#### 3.2.1 Asymmetrischer planarer Wellenleiter

Deckschicht ("cladding") verschieden von Substrat (o.B.d.A  $n_c < n_f$ ).

$$\text{Asymmetrie-Parameter: } a = \frac{n_s^2 - n_c^2}{n_f^2 - n_c^2}.$$

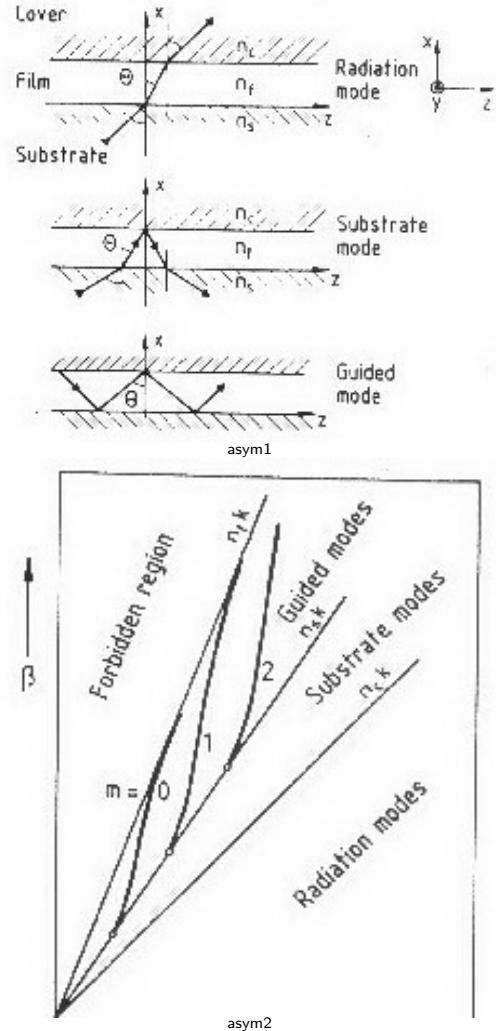
#### Neue Modensorte: Substratmoden

Das sind Wellen, die aus dem Substrat heraus so schräg auf den Film zulaufen, daß sie an der Deckschicht totalreflektiert werden und ins Substrat zurücklaufen. Ihre Intensität nimmt in die Deckschicht hinein exponentiell ab.

Daneben gibt es weiterhin die im Film geführten Moden und die den Film schräg vom Substrat in die Deckschicht oder umgekehrt durchquerenden Strahlungsmoden.

Das Bild rechts unten zeigt  $\beta$  über  $\omega$  für einen typischen asymmetrischen Wellenleiter. Zwischen den Gebieten der geführten Moden und der Strahlungsmoden liegen die Substratmoden. Die geführten Moden verschwinden (cut off), wenn sie die Grenze zu den Substratmoden berühren.

Im Unterschied zum symmetrischen Fall hat auch die Grundmode eine cutoff-Frequenz. Unterhalb dieser gibt es im asymmetrischen Wellenleiter überhaupt keine geführte Mode.



### 3.2.2 Gradierte planare Profile

Mit Diffusionsprozessen kann man kontinuierlich variierende Brechindexprofile herstellen. In der Nähe des Maximums gilt meist

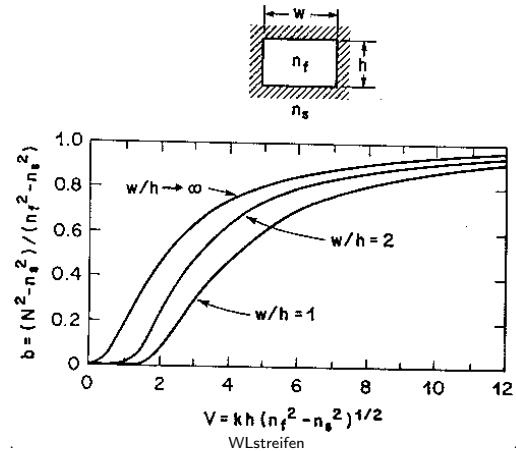
$$n^2(x) \approx n_f^2 \times (1 - x^2/x_0^2) \quad (3.14)$$

Ein solches parabolisches Indexprofil ergibt in Analogie zum harmonischen Oszillator Hermitesch-Gauß'sche Feldverteilungen, das Intensitätsprofil der Grundmode entspricht einem Gauß-Bündel.

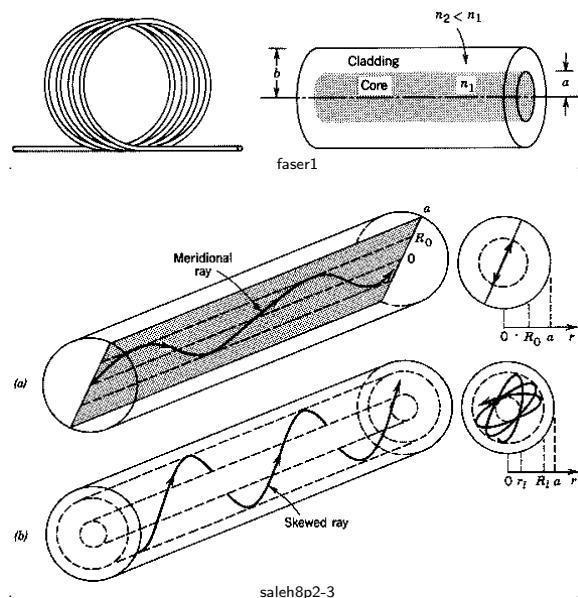
### 3.2.3 Streifenwellenleiter

Der Brechindex hat innerhalb eines Streifens der Breite  $W$  und der Höhe  $h$  den hohen Wert  $n_f$ , in der Umgebung ist er überall  $n_s < n_f$ .

Der effektive Brechindex hängt jetzt auch vom Verhältnis  $W/h$  ab. Für  $W/h \rightarrow \infty$  ergeben sich die Verhältnisse des symmetrischen planaren Wellenleiters. Dies ist in der Abbildung für die Grundmode dargestellt. Mit abnehmendem Seitenverhältnis  $W/h$  nimmt auch der effektive Index ab – das Feld wird dabei zusehends aus dem Wellenleiter herausgedrängt.



### 3.2.4 Fasern



Grundelement der Datenautobahnen des Internet.

Zylindersymmetrisch, aus verschiedenen Gläsern (Quarzen) ein Kern mit hohem Brechindex ist eingebettet in einen Mantel mit geringerem, ganz außen Luft.

Polarisationsverhältnisse im allgemeinen recht kompliziert.

Ich erinnere nur an die Meridional- und Schraubenwellen, die bereits im Kapitel 1, Abschnitt GRIN-Fasern diskutiert wurden.

Meist aber schwache Wellenführung,  $n_1 \approx n_2$ , dann linear polarisierte Transversalwellen  $LP_{l\nu}$ :

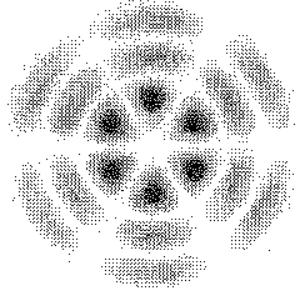
Wegen Zylindersymmetrie für jede Feldkomponente

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(r, \varphi, z) &= u(r)e^{il\varphi+i\beta z} \\ \Rightarrow \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( n^2 k_0^2 - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) u &= 0 \\ \Rightarrow u_l(r) &\sim \begin{cases} J_l(k_t r) & r < a \quad k_t^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2 \\ K_l(\gamma r) & r > 0 \quad \gamma^2 = \beta^2 - n_2^2 k_0^2 \end{cases}\end{aligned}$$

Stetigkeitsbedingungen, schwache Wellenführung:

(a)

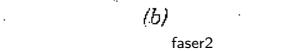
$LP_{01}$



(b)

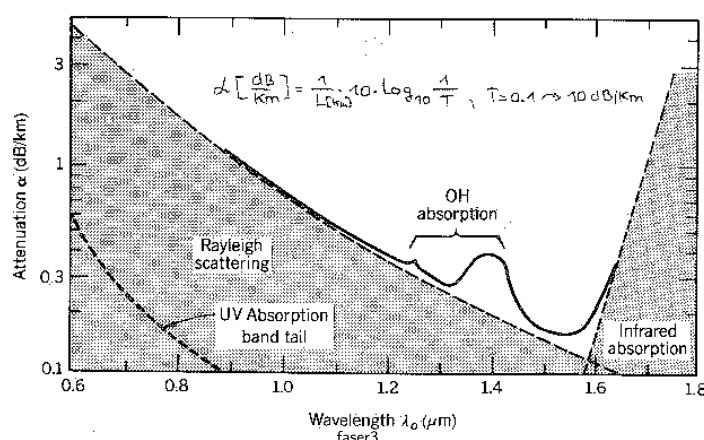
faser2

$LP_{34}$



Das ist analog zum planaren Wellenleiter, nur tauchen wegen der Zylindersymmetrie jetzt Besselfunktionen auf.

Das Bild links zeigt oben die entsprechende Grundmode, unten den Realteil der Amplitude einer höhere Mode mit  $l = 3$  Knotenlinien im Azimutalwinkel  $\varphi$  und  $\nu - 1 = 3$  Knoten in radialer Richtung.



Absorption und Streuung des Lichtes in der Faser führen zu optischen Verlusten. Dadurch nimmt die Intensität entlang der Faser exponentiell ab,  $I(z) \sim e^{-\alpha z}$  mit dem Dämpfungskoeffizienten  $\alpha$ .

Diese Verluste sind wellenlängenabhängig, die üblichen Glasfasern haben etwa bei  $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$  minimale Verluste. Deshalb wird Langstreckenübertragung in diesem Wellenlängenbereich betrieben.

### 3.3 Einkopplung von Licht in Wellenleiter

Für die Einkopplung von Licht in Wellenleiter gibt es verschiedene Methoden. Einige davon sind in der Abbildung skizziert.

Dabei werden gewöhnlich mehrere Wellenleitermoden angeregt, bei ebenen Wellenleitern

$$E(x, z) = \sum_{\nu} c_{\nu} u_{\nu}(x) e^{i \beta_{\nu} z}.$$

Die Koeffizienten  $c_{\nu}$  ergeben sich entsprechend

$$c_m = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x) u_m(x),$$

aus der Amplitude  $E_0(x)$  des eingestrahlten Feldes in der Eintrittsebene.

Weil die Moden  $\nu$  verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $\omega / \beta_{\nu}$  haben, ändert sich die Phasenbeziehung zwischen ihnen und die Feldamplitude variiert entlang des Wellenleiters.

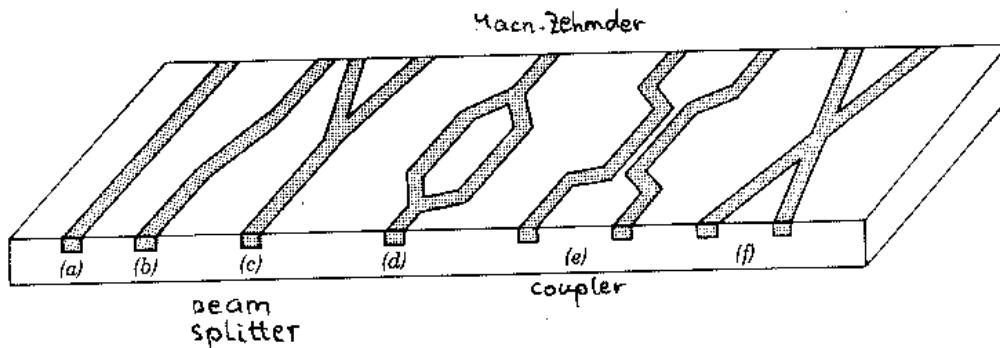
Dies ist in der Abbildung rechts unten für den Fall von 2 angeregten Moden skizziert. In diesem Falle wandert das Intensitätsmaximum periodisch im Wellenleiter hin und her. Die Periodenlänge ist entsprechend  $L = 2\pi / |\Delta\beta|$  umgekehrt proportional zum Unterschied zwischen den Ausbreitungskonstanten der beiden Moden.

Dieser Effekt kann dazu genutzt werden, Licht zwischen Wellenleitern hin und herzuschalten. Mit solchen gekoppelten Wellenleitern wollen wir uns im folgenden befassen.

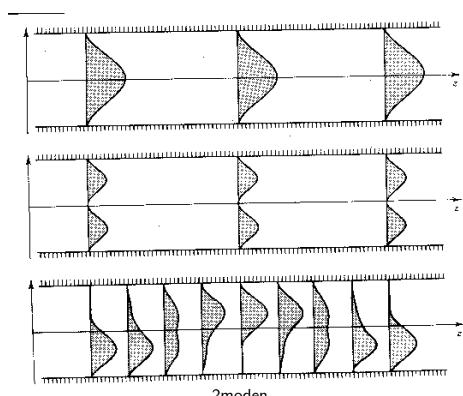
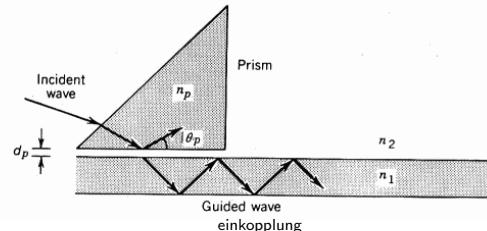
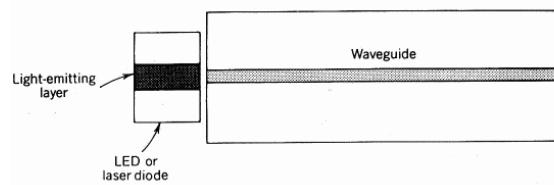
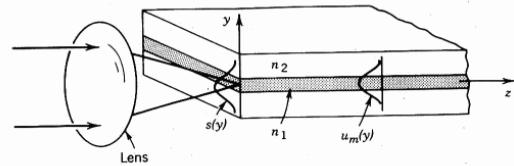
Zuvor noch: das vom Ende eines endlich langen Wellenleiters abgestrahlte Licht ist entsprechend den Prinzipien der Fourieroptik durch die Amplitudenverteilung in der Endfläche vollständig bestimmt. Wenn das Feld dort infolge Modenüberlagerung asymmetrisch ist, ergibt sich im allgemeinen eine schräge Abstrahlung.

### 3.4 Gekoppelte Wellenleiter

#### 3.4.1 Motivation



Die Abbildung zeigt Funktionselemente der integrierten Optik. In einem (coupler) werden 2 Wellenleiter



eine gewisse Strecke lang parallel in geringem Abstand nebeneinander her geführt. Wir werden uns jetzt mit solchen gekoppelten Wellenleitern befassen.

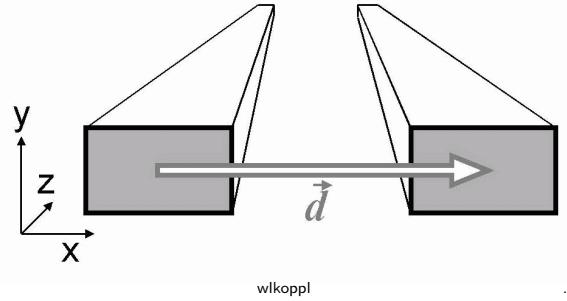
### 3.4.2 Moden schwach gekoppelter Wellenleiter

Betrachten 2 identische WL im Abstand  $d$ .

Das Gesamtsystem ist wieder ein Wellenleiter.

Seine Modenfelder haben die Form

$$E(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{\rho}) e^{i(\beta z - \omega t)} \quad \vec{\rho} = (x, y) \quad (3.16)$$



und sind Lösungen von

$$[\Delta_t + q_1(\vec{\rho}) + q_2(\vec{\rho})] \Phi(\vec{\rho}) = K^2 \Phi(\vec{\rho}) \quad q_m(\vec{\rho}) = \begin{cases} k_0^2(n_f^2 - n_s^2) & \text{im WL } m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad K^2 = \beta^2 - k_0^2 n_s^2 \quad (3.17)$$

Jeder einzelne Wellenleiter  $m = 1, 2$  habe nur eine geführte Mode  $\varphi_m(\vec{\rho})$ , gegeben durch

$$[\Delta_t + q_m(\vec{\rho})] \varphi_m(\vec{\rho}) = k^2 \varphi_m(\vec{\rho}). \quad (3.18)$$

Offensichtlich gilt  $\varphi_2(\vec{\rho}) = \varphi_1(\vec{\rho} + \vec{d})$ , wenn  $\vec{d}$  der Abstandsvektor vom WL1 zum WL2 ist.

Bei hinreichend großen Abständen  $d$  werden sich die beiden Wellenleiter kaum stören.

Man erwartet die Existenz von je einer geführten Mode  $\varphi_m(\vec{\rho})$  für jeden Wellenleiter. Jede dieser beiden Moden hat den gleichen Eigenwert  $k^2$ , sie sind entartet.

Das ist der Grenzfall ungekoppelter Wellenleiter,  $d \rightarrow \infty$ .

Verringert man den Abstand, so werden sich beide Wellenleiter gegenseitig beeinflussen, wenn sich ihre beiden Felder zu überlappen beginnen. Wie in der Quantenmechanik kommt es dadurch zu einer Aufspaltung des entarteten Eigenwertes.

Wir berechnen nun diese Aufspaltung für den Fall kleinen Überlaps. Dann kann man das Feld der Gesamtmoden in guter Näherung als Linearkombination beider ungestörter Moden ansetzen:

$$\Phi(\vec{\rho}) = \sum_{m=1,2} a_m \varphi_m(\vec{\rho}). \quad (3.19)$$

Wir setzen das in (3.17) ein, eliminieren  $\Delta_t$  mit Hilfe von (3.18), multiplizieren einmal mit  $\varphi_1(\vec{\rho})$  und einmal mit  $\varphi_2(\vec{\rho})$  und integrieren über  $\vec{\rho}$ . Das gibt zunächst

$$(k^2 - K^2)a_1 + \int d^2\vec{\rho} [q_2 a_1 \varphi_1^2 + (k^2 - K^2 + q_1)a_2 \varphi_1 \varphi_2] = 0 \quad \text{und analog mit } 1 \leftrightarrow 2.$$

Nun beachten wir, daß  $q_m$  und  $\varphi_m$  im WL  $m$  "lokalisiert" sind.  $q_m$  verschwindet außerhalb und  $\varphi_m$  klingt nach außen hin exponentiell ab.

Bei hinreichend großem Abstand  $d$  ist deshalb das gesamte Integral eine kleine Größe, weil es nur Produkte von Funktionen enthält, die in verschiedenen Wellenleitern lokalisiert sind.

Vernachlässigt man es ganz (nullte Ordnung im Überlapp), bleibt nur der erste Term, also  $a_m \neq 0$  nur wenn  $K^2 = k^2$ . Das liefert die ungekoppelten Moden.

Nun berücksichtigen wir das Integral in erster Ordnung im Überlapp.  $q_2\varphi_1^2$  ist zweiter Ordnung und kann weggelassen werden. Gleches gilt für  $(k^2 - K^2)\varphi_1\varphi_2$ , weil  $(k^2 - K^2)$  in nullter Ordnung verschwindet. Damit bleibt in erster Ordnung das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} k^2 - K^2 & \kappa^2 \\ \kappa^2 & k^2 - K^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \kappa^2 = \int d^2\vec{\rho} q_m \varphi_1 \varphi_2. \quad (3.20)$$

Eine nichtriviale Lösung erfordert Verschwinden der Systemdeterminante, also

$$K^2 - k^2 = \pm \kappa^2 \text{ bzw. } \boxed{\beta = \sqrt{\beta_\infty^2 \pm \kappa^2} \approx \beta_\infty \pm \gamma \text{ with } \gamma = \frac{\kappa^2}{2\beta_\infty}} \quad (3.21)$$

$$\text{und } a_1 = \pm a_2 \text{ bzw. } \boxed{\Phi(\vec{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(\vec{\rho}) \pm \varphi_2(\vec{\rho})].} \quad (3.22)$$

**Fazit:** zwei gekoppelte einmodige Wellenleiter haben zwei geführte Moden, eine symmetrische und eine antisymmetrische. Die Ausbreitungskonstante  $\beta_+$  der symmetrischen Mode ist um  $2\gamma$  größer als jene  $\beta_-$  der antisymmetrischen Mode.

### 3.4.3 Konsequenzen für die Wellenleitung

Nehmen wir an, bei  $z = 0$  wird nur ein Wellenleiter angeregt (o.B.d.A.  $m = 1$ ).

Das optische Feld ist dann dort  $\sim \varphi_1(\vec{\rho})$ .

Wie breitet es sich aus?

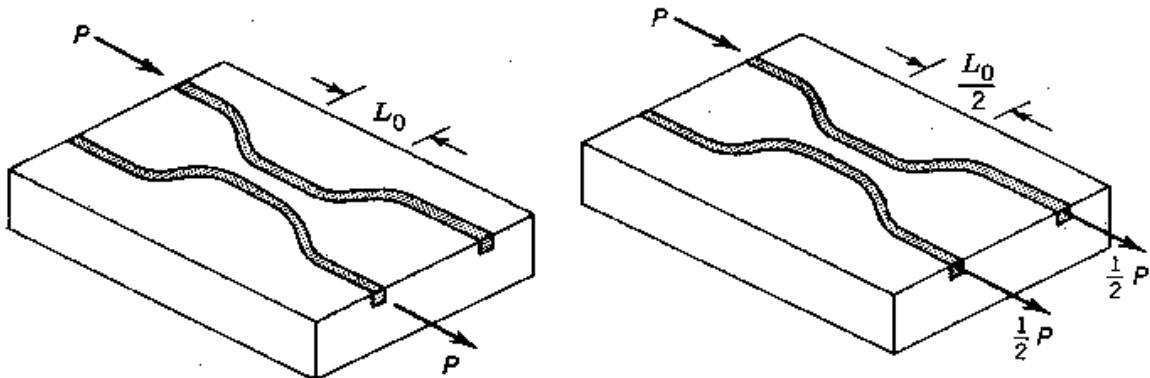
Darstellen als Linearkombination von Moden:  $\text{Feld}(z = 0) \sim \Phi_+ + \Phi_-$ , also

$$E(\vec{r}, t) \sim \Phi_+(\vec{\rho}) e^{i(\beta_+ z - \omega t)} + \Phi_-(\vec{\rho}) e^{i(\beta_- z - \omega t)} \sim [\varphi_1(\vec{\rho}) \cos(\gamma z) + i\varphi_2(\vec{\rho}) \sin(\gamma z)] e^{i(\beta_\infty z - \omega t)} \quad (3.23)$$

$$\text{Intensität: } |E|^2 \sim \varphi_1^2(\vec{\rho}) \cos^2(\gamma z) + \varphi_2^2(\vec{\rho}) \sin^2(\gamma z) \quad (3.24)$$

- das ist eine Welle mit veränderlicher Amplitude ( eckige Klammer ).
- bei  $z = 0$  ist wie vorausgesetzt nur die Mode in WL 1 angeregt,
- nach der Strecke  $L_0 = \pi/2\gamma$  nur die Mode in WL 2,
- nach  $2L_0$  wieder nur die Mode in WL 1.
- die Intensität hat die Periode  $2L_0$ .
- Das Licht schwappt also periodisch zwischen den Wellenleitern hin und her.
- Die Länge  $L_0$  kann makroskopisch groß werden, wenn man die Kopplung schwach lässt.

Führt man die beiden Wellenleiter nach  $L_0/2$  auseinander, wird also die in 1 eingekoppelte Intensität zu gleichen Teilen auf die beiden Wellenleiter aufgeteilt, das ist ein sogenannter 3dB-Koppler.



Führt man sie nach  $L_0$  auseinander, wird das Licht in den jeweils anderen Wellenleiter übergekoppelt.

## 4 Photonische Kristalle

### 4.1 Allgemeine Charakterisierung

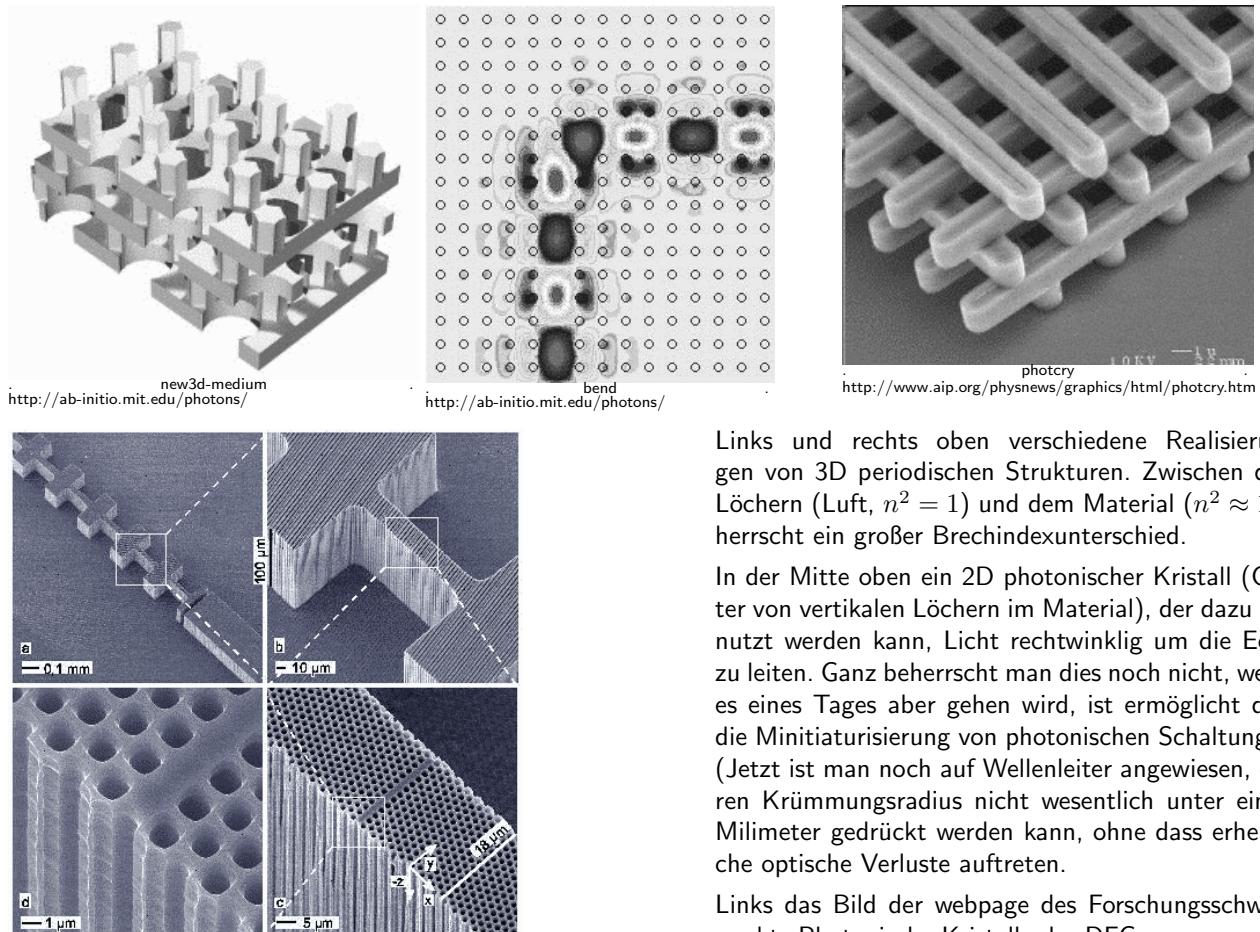
Photonische Kristalle sind nicht etwa Kristalle aus Photonen, sondern Materialien mit periodisch strukturiertem Brechungsindex.

Da die Wellengleichung zur Schrödinger-Gleichung korrespondiert, wobei der Brechungsindex die Rolle des Potentials spielt, sind solche Materialien optische Analoga zu kristallinen Festkörpern.

Insbesondere kann das periodische "Potential" eine "Bandlücke" hervorrufen: für einen gewissen endlichen Bereich der Wellenlänge kann sich keine Welle in diesem Material ausbreiten.

Die Analogie zu Elektronenwellen in Festkörpern ist allerdings begrenzt. Der Vektorcharakter des Lichtfeldes und seine lineare Dispersion erzeugen u.a. Besonderheiten, die im Detail noch nicht vollständig verstanden sind.

Photonische Kristalle in 2D und 3D sind Gegenstand der aktuellen Forschung. Hier zunächst einige Streiflichter zusammen mit den web-Addressen, wo man sie finden kann.



Links und rechts oben verschiedene Realisierungen von 3D periodischen Strukturen. Zwischen den Löchern (Luft,  $n^2 = 1$ ) und dem Material ( $n^2 \approx 10$ ) herrscht ein großer Brechindexunterschied.

In der Mitte oben ein 2D photischer Kristall (Gitter von vertikalen Löchern im Material), der dazu genutzt werden kann, Licht rechtwinklig um die Ecke zu leiten. Ganz beherrscht man dies noch nicht, wenn es eines Tages aber gehen wird, ist ermöglicht dies die Miniaturisierung von photischen Schaltungen (Jetzt ist man noch auf Wellenleiter angewiesen, deren Krümmungsradius nicht wesentlich unter einem Millimeter gedrückt werden kann, ohne dass erhebliche optische Verluste auftreten).

Links das Bild der webpage des Forschungsschwerpunkts Photonische Kristalle der DFG.

Am einfachsten zu verstehen und von bisher größter praktischer Bedeutung sind eindimensionale photonische Kristalle, auf die ich nun ausschließlich eingehen will.

## 4.2 1D: Wellenleiter mit verteilter Rückkopplung (Distributed Feedback, DFB)

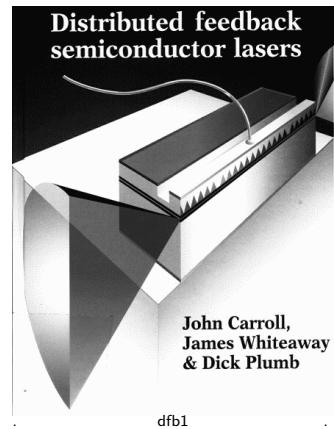
Bisher haben wir nur Wellenleiter betrachtet, bei denen der Brechindex längs des Wellenleiters konstant ist.

Manchmal nutzt man auch Wellenleiter, bei denen der Brechungsindex entlang des Wellenleiters mit einer Periode  $\Lambda$  schwach variiert.

Dies wird insbesondere in den sogenannten DFB-Lasern genutzt.

Die Abbildung rechts ist die Titelseite eines Buches über solche Laser.

Wir werden uns nun mit solchen DFB-Wellenleitern befassen.



### 4.2.1 Grundprinzip (qualitativ)

- In jeder Periode des Indexgitters wird ein winziger Prozentsatz  $r$  des hinlaufenden Lichts reflektiert.
- In jeder Periode wird so eine rückwärtslaufende Partialwelle erzeugt.
- Die gesamte rücklaufende Welle ist eine Superposition aller dieser Partialwellen.
- Die Phasendifferenz zwischen zwei Partialwellen aus aufeinanderfolgenden Perioden ist  $\Delta\varphi = \beta \cdot 2\Lambda$ .
- Konstruktive Überlagerung der Partialwellen nur, wenn  $\Delta\varphi = n \cdot 2\pi$ , bzw

$$\boxed{\beta = n \frac{\pi}{\Lambda} \quad \text{Bragg-Bedingung}} \quad \text{Ordnung } n \text{ ganz} \quad (4.1)$$

Wenn diese Bragg-Bedingung erfüllt ist, kann man eine starke rücklaufende Welle erwarten, auch wenn die Reflektivität  $r$  einer einzelnen Gitterperiode winzig ist.

In der Praxis ist  $\Lambda$  durch den Aufbau des Wellenleiters fixiert, so daß dies eine Bedingung für  $\beta$  bzw. wegen  $\beta = \beta(\omega)$  für die Lichtfrequenz bzw. Wellenlänge ist.

Solche DFB-Wellenleiter sind also wellenlängenselektiv.

Wenn eine starke rücklaufende Welle entsteht, wird diese natürlich auch am Gitter reflektiert. Man muß Mehrfachreflektionen berücksichtigen.

Dies erlauben die sogenannten Coupled-Wave Gleichungen<sup>9</sup>.

### 4.2.2 Coupled-Wave Gleichungen

Es ist klar, daß die Bragg-Bedingung wenigstens annähernd erfüllt sein muß, wenn ein nennenswerter Effekt auftreten soll. Wir setzen also

$$\beta = \beta_0 + \delta \quad \text{mit } \beta_0 = \frac{\pi}{\Lambda} \quad \& \quad |\delta| \ll \beta_0. \quad (4.2)$$

*Schritt 1:* idealer Wellenleiter

Die Feldamplitude ist im allgemeinen eine beliebige Überlagerung aus hin- und rücklaufender Welle:

$$E(z) = A_+ e^{i\beta z} + A_- e^{-i\beta z} = a_+(z) e^{i\beta_0 z} + a_-(z) e^{-i\beta_0 z} \quad \text{mit } a_{\pm}(z) = e^{\pm i\delta z}. \quad (4.3)$$

<sup>9</sup>Leider fällt mir kein geeigneter deutscher Begriff ein. Gleichungen gekoppelter Wellen klingt irgendwie unschön, also bleibe ich beim Halbenglisch.

Man kann dies als zwei gegenläufige Wellen mit exakt der Bragg-Wellenlänge auffassen, deren Amplituden  $a_{\pm}(z)$  langsam im Vergleich zur Wellenlänge variieren. Offensichtlich genügen diese beiden Amplituden den Differentialgleichungen  $\mp i da_{\pm}/dz = \delta a_{\pm}$ .

*Schritt 2:* schwache Rückkopplung durch das Gitter

Wenn pro Gitterperiode  $\Lambda$  der Anteil  $r$  einer einlaufenden Welle in die andere Richtung reflektiert wird, so ist das der Anteil  $r/\Lambda$  pro Längeneinheit. Also muß man die Gleichungen für die langsam variierten Amplituden wie folgt ergänzen:

$$\mp i \frac{da_{\pm}(z)}{dz} = \delta a_{\pm}(z) + \kappa a_{\mp}(z) \quad \text{Coupled-Wave Gleichungen}$$

$$\kappa = \frac{r}{\Lambda} \quad \text{Koppelkonstante.} \quad (4.4)$$

Natürlich ist das keine strenge Herleitung. Die sparen wir uns zugunsten der Diskussion der Lösungen.

#### 4.2.3 Lösungen der Coupled-Wave Gleichungen

Wie üblich Exponentialansatz:

$$\begin{pmatrix} a_+(z) \\ a_-(z) \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} e^{iqz}. \quad (4.5)$$

Ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} (\delta - q) & \kappa \\ \kappa & (\delta + q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ ra_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.6)$$

Verschwinden der Systemdeterminante erfordert

$$q = \pm \gamma \quad \text{mit } \gamma = \sqrt{\delta^2 - \kappa^2}$$

$$\Rightarrow r(q) = \frac{q - \delta}{\kappa} = -\frac{\kappa}{q + \delta} = \frac{1}{r(-q)} \quad (4.7)$$

Damit allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} a_+(z) &= a_0 \exp(i\gamma z) + r(\gamma)b_0 \exp(-i\gamma z) \\ a_-(z) &= r(\gamma)a_0 \exp(i\gamma z) + b_0 \exp(-i\gamma z) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Alles weitere braucht konkrete Randbedingungen.

#### Unendlich langer DFB-Wellenleiter

Physikalisch sinnvoll sind nur solche Lösungen (4.8), die für  $z \rightarrow \pm\infty$  endlich bleiben.

$$\text{Das erfordert reelle } \gamma, \text{ also } \kappa < |\delta| = |\beta(\omega) - \beta_0| \approx \frac{|\omega - \omega_b|}{v_g} \quad \omega_b : \beta(\omega_b) = \beta_0. \quad (4.9)$$

Der Frequenzbereich, in dem es keine beschränkten Lösungen gibt, heißt

$$\boxed{\text{Stopband: } \omega_b - \kappa v_g < \omega < \omega_b + \kappa v_g} \quad (4.10)$$

Das Stopband ist das Analogon zur Bandlücke in Kristallen.

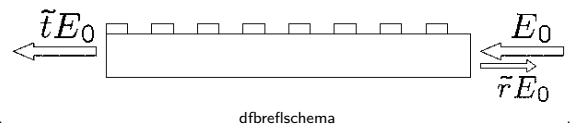
In beiden Fällen ist die Periodizität des "Potentials" die Ursache.

Infofern kann man einen DFB-Wellenleiter als einen eindimensionalen "photonischen Kristall" betrachten.

## Reflektivität einer DFB-Sektion endlicher Länge

Die Existenz eines Stopbandes bzw. "photonic band gaps" zeigt sich auch im Reflexionsspektrum von endlich langen DFB-Wellenleitern.

Wenn man auf einer Seite die Amplitude  $E_0$  einstrahlt, kommt nur ein gewisser Teil  $\tilde{t}E_0$  auf der anderen Seite wieder raus und ein Teil  $\tilde{r}E_0$  wird reflektiert.



Die Berechnung des Amplitudenreflektionskoeffizienten  $\tilde{r}$  ist ganz einfach.

Auf einer Seite (o.B.d.A.  $z = 0$ ) setzt man die einlaufende Amplitude null,  $a_+(0) = 0$ . Dann gilt

$$\tilde{r} = \frac{a_+(L)}{a_-(L)} = \frac{r(\gamma)b_0(e^{-i\gamma L} - e^{i\gamma L})}{b_0(e^{-i\gamma L} - r^2(\gamma)e^{i\gamma L})} = r(\gamma) \frac{1 - e^{2i\gamma L}}{1 - r^2(\gamma)e^{2i\gamma L}}. \quad (4.11)$$

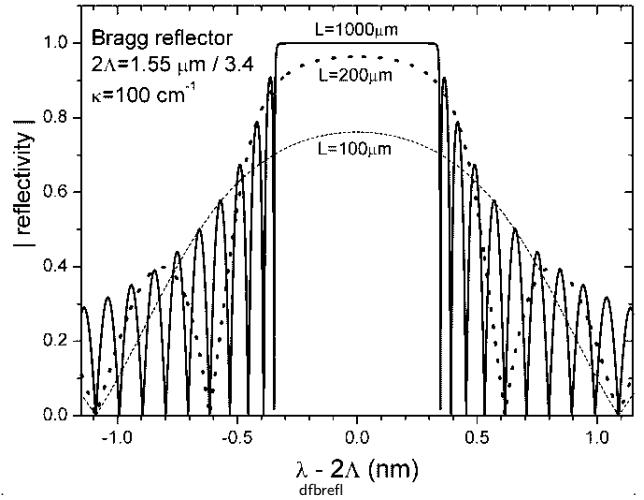
Der Betrag dieser Reflektivität ist rechts als Funktion der Wellenlänge dargestellt. Die Parameter entsprechen der typischen Situation in  $1.55\mu\text{m}$  Halbleiter-DFB-Lasern.

Deutlich ist die hohe Reflektivität innerhalb des Stopbandes zu sehen.

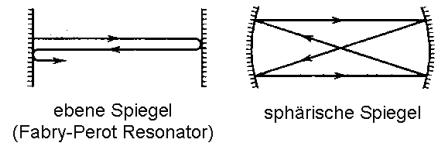
In der Mitte ist  $\delta = 0 \Rightarrow \gamma = i\kappa \Rightarrow r(\gamma) = i$ , mithin

$$|\tilde{r}| = \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa L)}{1 + \exp(-2\kappa L)}}. \quad (4.12)$$

Für  $\kappa L \gg 1$  ist das fast 1 (nahezu Totalreflexion).



## 5 Resonatoren



passiv: Einstrahlung (Etalon, Interferometer)

aktiv: Laser

einige Resonatortypen s. rechts.

Wir werden folgende Resonatortypen behandeln:

Erstens zwei unendlich ausgedehnte planparallele Spiegel (Fabry-Perot<sup>10</sup> Resonator). Dies ist Basiswissen und wird ausführlich dargestellt.

Zweitens Resonatoren mit sphärischen Spiegeln. Dies ist eine Anwendung für Gauß'sche Strahlen und wird größtenteils in der nächsten Übung behandelt.

Drittens realistischere dreidimensionale Resonatoren, (z.B. Laserrrohr). Dies kann nur gestreift werden.

### 5.1 Eindimensionaler Fabry-Perot Resonator

2 planparallele Spiegel  $s = 1, 2$  im Abstand  $L$

unendlich ausgedehnt

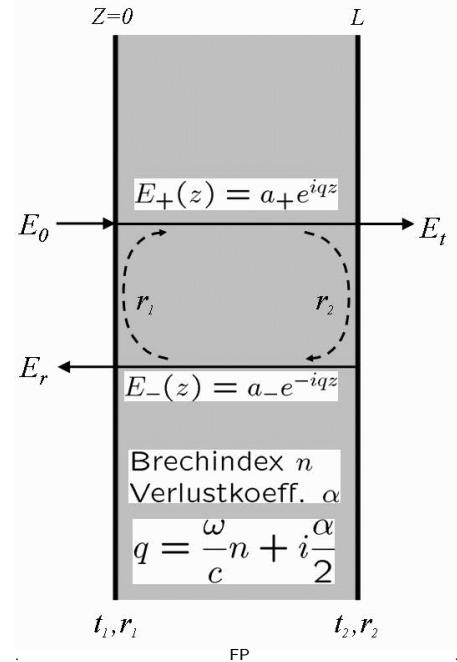
(Modell für: Ausdehnung groß gegen Abstand)

senkrechte Einstrahlung ebener Welle mit Ampl.  $E_0$

Transmissionsvermögen Einzelspiegel:  $t_s$  (Amplitude)

Reflexionsvermögen Einzelspiegel:  $r_s = -\sqrt{R_s}$  (Amplitude)

Amplitude zwischen den Spiegeln ist Superposition hin- und rücklaufender Welle:



$$E(z) = E_+(z) + E_-(z) \text{ mit } E_{\pm}(z) = a_{\pm} e^{\pm iqz} \quad \left[ \begin{array}{l} q = k + i \frac{\alpha}{2}, k = \frac{2\pi n}{\lambda} \\ n - \text{Brechindex} \\ \alpha - \text{Verlustkoeffizient (Absorption, Streuung)} \end{array} \right] \quad (5.1)$$

Koeffizienten  $a_{\pm}$  aus den Randbedingungen an den beiden Spiegeln:

$$\begin{aligned} E_+(0) &= t_1 E_0 + r_1 E_-(0) & \& E_-(L) &= r_2 E_+(L) \\ \Rightarrow a_+ &= t_1 E_0 + r_1 a_- & \& a_- &= r_2 e^{2iqL} a_+ \\ \Rightarrow a_+ &= \frac{t_1 E_0}{1 - r_1 r_2 e^{2iqL}} \end{aligned}$$

Mit dem

$$\text{Resonatorfaktor } A_{\text{FP}} = \frac{1}{1 - \mathcal{R} e^{2ikL}} \quad \mathcal{R} = r_1 r_2 e^{-\alpha L} \quad (5.2)$$

<sup>10</sup>Die französischen Physiker Charles Fabry (1867-1945) und Alfred Perot (1863-1925) konstruierten 1896 den ersten Resonator dieses Typs.

ergibt sich kurz und bündig

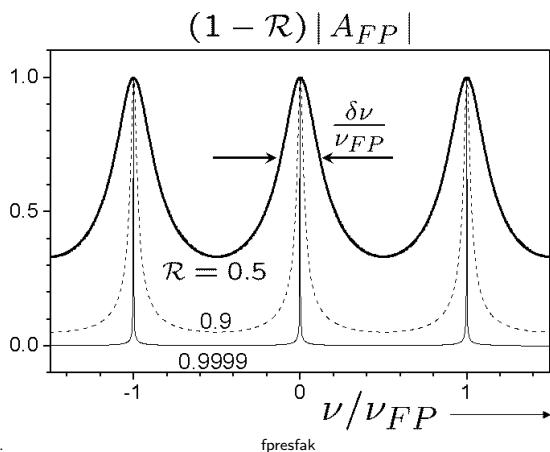
$$\boxed{E_+(z) = t_1 E_0 A_{\text{FP}} e^{iqz} \quad \& \quad E_-(z) = t_1 E_0 r_2 e^{2iqL} A_{\text{FP}} e^{-iqz}} \quad (5.3)$$

Der Resonatorfaktor geht als Faktor in beide Wellen ein. Damit ist das Gesamtfeld im Resonator ihm proportional, wie auch die Amplituden der nach außen abgestrahlten Wellen  $E_r$  und  $E_t$ . Dieser Faktor hat Resonanzen bei  $kL = m\pi$  ( $m$  ganz), deren Wert  $1/(1 - \mathcal{R})$  sehr groß werden kann, wenn  $\mathcal{R}$  nahe bei eins liegt. Schauen wir uns den Betrag im Detail an.

### Betrag des Resonatorfaktors

$|1 - \mathcal{R}e^{2ikL}|^2 = 1 + \mathcal{R}^2 - 2 \cos 2kL = (1 - \mathcal{R})^2 + 2\mathcal{R}(1 - \cos(2kL)) = (1 - \mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R} \sin^2(kL)$ . Weiterhin  $kL = \omega n L / c = 2\pi\nu n L / c = \pi\nu / \nu_{\text{FP}}$ . Also

$$\boxed{|A_{\text{FP}}| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R} \sin^2(\pi \frac{\nu}{\nu_{\text{FP}}})}} \quad \text{mit der Resonatorfrequenz } \nu_{\text{FP}} = \frac{c}{2nL} = \frac{1}{\tau_{\text{roundtrip}}} \quad (5.4)}$$



$|A_{\text{FP}}|$  hängt von 2 Parametern ab:  $\mathcal{R}$  und  $\nu$ .

Periode bezüglich der Frequenz  $\nu_{\text{FP}}$ .

Lage der Maxima:  $\nu = m \cdot \nu_{\text{FP}}$ . ( $m$  ganz)

Höhe der Maxima:  $\max(|A_{\text{FP}}|) = 1/(1 - \mathcal{R})$ .

Breite der Maxima: definiert durch  $|A_{\text{FP}}|^2 = 1/2$

$$\delta\nu = \frac{2\nu_{\text{FP}}}{\pi} \arcsin \left( \frac{1 - \mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}} \right) \stackrel{\mathcal{R} \approx 1}{\approx} \nu_{\text{FP}} \frac{(1 - \mathcal{R})}{\pi\sqrt{\mathcal{R}}} \quad (5.5)$$

Zahlenbeispiele:

$$L = 1.5 \text{ m}, \tau_{\text{roundtrip}} = 3 * 10^2 \text{ cm} / 3 * 10^{10} \text{ cm s}^{-1} = 10 \text{ ns} \Rightarrow \nu_{\text{FP}} = 100 \text{ MHz}$$

$$L = 15 \mu\text{m}, \tau_{\text{roundtrip}} = 100 \text{ fs} \Rightarrow \nu_{\text{FP}} = 10 \text{ THz}.$$

### Vereinfachung: identische, dünne und verlustfreie Spiegel

Ab jetzt  $r_l = -\sqrt{\mathcal{R}}, t_l = \sqrt{1 - \mathcal{R}}$ , wobei  $R$  die Intensitätsreflektivität der Spiegel ist.

### Durchlässigkeit des Resonators

$$T_{\text{FP}} = \left| \frac{E_t}{E_0} \right|^2 = |1 - R|^2 \cdot e^{-\alpha L} \cdot |A_{\text{FP}}|^2.$$

Ihre Frequenzabhängigkeit wird vor allem durch den Faktor  $|A_{\text{FP}}|^2$  bestimmt. Bei großer Resonatorgüte  $\mathcal{F} \gg 1$  ist sie praktisch nur bei den Resonanzfrequenzen von null verschieden. Man kann also mit einem FP-Resonator bestimmte Frequenzen aus dem einfallenden Licht herausfiltern.

$$\text{Maximum} = \left( \frac{1 - R}{1 - \mathcal{R}} \right)^2 e^{-\alpha L} \quad \begin{aligned} &\text{bei den Resonanzen von } |A_{\text{FP}}| (\text{s.o.}). \\ &\text{Ohne innere Verluste } \alpha = 0 \text{ ist das immer 1.} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Bei endlichen Verlusten immer  $< 1$ .  
Bei Verstärkung (Laser)  $> 1$ .

$$\text{Minimum} = \left( \frac{1 - R}{1 + \mathcal{R}} \right)^2 e^{-\alpha L} \quad \text{in der Mitte zwischen den Resonanzen.} \quad (5.8)$$

### Resonator-Moden

= Eigenschwingungen des Resonators.

= Nichtverschindendes Feld ohne Einstrahlung, d.h. für  $E_0 \rightarrow 0$ .

Entsprechend (5.3) erfordert das

$E_0 A_{\text{FP}} = \text{endlich}$  für  $E_0 \rightarrow 0$ ,

bzw.  $A_{\text{FP}} \rightarrow \infty$ ,

bzw.  $0 = \frac{1}{A_{\text{FP}}} = 1 - Re^{2iqL} = 1 - e^{2iqL + \ln(R)}$ ,

bzw.  $2iqL + \ln(R) = 2\pi Ni$  ( $N$  ganz), bzw.

$$q = N \frac{\pi}{L} + \frac{i}{2L} \ln R \quad \text{Modenbedingung} \quad (5.9)$$

Wegen  $q = \omega n/c + i\alpha/2$  ist das bei gegebenem  $\alpha$  eine Gleichung für die Kreisfrequenz  $\omega$ .

Genauer: eine komplexe Gleichung. Diese hat im allgemeinen nur komplexe Lösungen.

Konsequenz einer komplexen Frequenz:

$$|E(t)|^2 \sim |e^{-i\omega t}|^2 = |e^{-i\Re(\omega)t}|^2 |e^{\Im(\omega)t}|^2 = e^{2\Im(\omega)t}$$

Imaginärteil beschreibt exponentielles Abklingen der Modenamplitude mit der "Photonenlebensdauer"  $\tau_p$ ,

$$\frac{1}{\tau_p} := -2\Im(\omega). \quad (5.10)$$

Die Modenbedingung (5.9) bedeutet also

$$\omega = 2\pi\nu_N - \frac{i}{2\tau_p} \quad (5.11)$$

$$\boxed{\text{Modenfrequenz: } \nu_N = N \cdot \nu_{\text{FP}}} \quad (5.12)$$

$$\boxed{\text{Photonenlebensdauer: } \tau_p = \frac{nL}{c} \left( \alpha L + \ln \frac{1}{R} \right)^{-1}} \quad (5.13)$$

Die Frequenzen der Resonatormoden entsprechen genau den Resonanzfrequenzen des Resonators.

Die Photonen haben in allen Moden die gleiche "Lebensdauer". Diese hängt eng mit der Breite der Resonanzen zusammen. Bei "guten" Resonatoren ( $|1 - \mathcal{R}| \ll 1$ ) ist dieser Zusammenhang einfach:

$$\tau_p = \frac{1}{2\nu_{\text{FP}} \ln 1/\mathcal{R}} \approx \frac{1}{2\nu_{\text{FP}}(1 - R)} \approx \frac{\pi\sqrt{\mathcal{R}}}{2\pi\nu_{\text{FP}}(1 - R)} = \frac{\mathcal{F}}{2\pi\nu_{\text{FP}}} = \frac{1}{2\pi\delta\nu} = \frac{1}{\delta\omega}. \quad (5.14)$$

Die Linienbreite des Resonators ist durch die inverse Photonenlebensdauer gegeben.

### Resonatorqualität

Je schärfere die Resonanzmaxima, desto höher ist die Resonatorqualität.

Je nach Kontext werden folgende 2 Maßzahlen für die Charakterisierung der Resonatorqualität genutzt:

$$\text{Finesse } \mathcal{F} = \frac{\text{Resonanzabstand}}{\text{Resonanzbreite}} = \frac{\nu_{\text{FP}}}{\delta\nu} = \frac{\pi\sqrt{\mathcal{R}}}{1 - \mathcal{R}} \quad (5.15)$$

$$\text{Güte (quality) } Q = \frac{2\pi \times \text{gespeicherte Energie}}{\text{Energieverlust pro Umlauf}} = \omega\tau_p = \frac{\nu}{\delta\nu} = N\mathcal{F} \quad \text{N: Nummer d. Mode} \quad (5.16)$$

### Schwellenbedingung Laser

In Laserresonatoren mit Besetzungsinvolution kann  $\alpha$  negativ werden (Verstärkung statt Absorption).

Dadurch wächst die Photonenlebensdauer (5.13). Sie wird unendlich lang falls

$$\alpha = -\frac{1}{L} \ln \frac{1}{R} \quad \text{Schwellenbedingung} \quad (5.17)$$

Das heißt nichts anderes, als daß durch die Verstärkung alle Photonen wieder ersetzt werden, die durch die Verluste (Auskopplung aus dem Resonator) verloren gehen. Wir werden darauf im nächsten Semester im Detail eingehen.

### Intensitätsverteilung im Resonator

Beschränken uns auf die Resonatormoden.

In der Nähe der Resonanzfrequenzen und für  $R \approx 1$  liefern diese den Hauptbeitrag zum Feld.

Für Mode  $N$  gilt zuerst wegen (5.9):

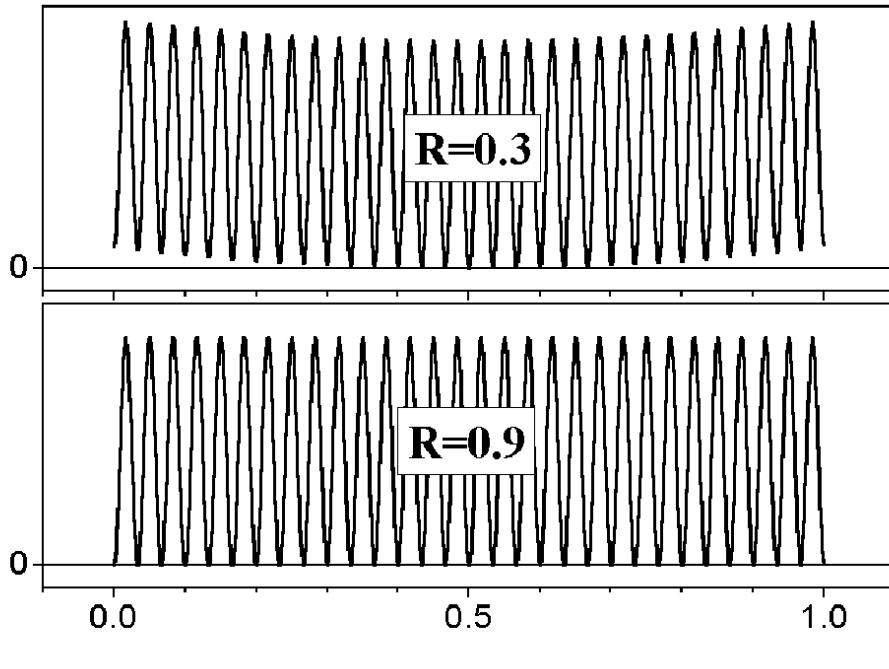
$$e^{\pm iqz} = e^{\pm iN\pi z/L} e^{\mp \alpha r L/2} \quad \text{mit } \alpha_r = \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R} \quad \text{und damit } a_- = -\sqrt{R} e^{2iqL} a_+ = -\frac{a_+}{\sqrt{R}}.$$

Kurze Rechnung analog zu früheren führt damit auf

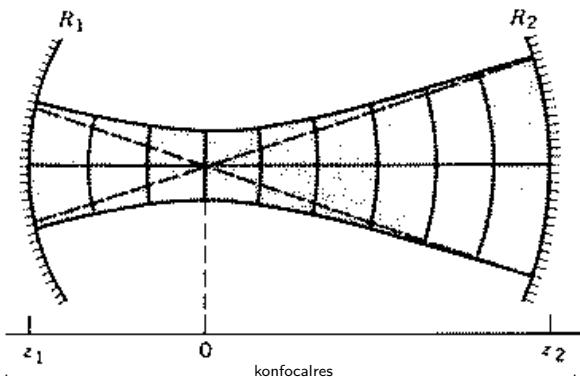
$$|E(z)|^2 \sim \cosh(\alpha_r [z - L/2]) + \cos\left(2\pi N \frac{z}{L}\right) \quad (5.18)$$

Das ist eine Hängebauchkurve (1.Term), die periodisch moduliert wird (2.Terme).

### **Intensitätsverteilung im FP-Resonator für Mode m=30**



## 5.2 Resonator mit sphärischen Spiegeln



Moden mit endlicher Taillenweite existieren nur für

**stabile Resonatoren:**

$$0 \leq \left(1 + \frac{d}{R_1}\right) \left(1 + \frac{d}{R_2}\right) \leq 1$$

Resonatormoden: Gauss-Hermite'sche Bündel  
(s. Kapitel 1, Formel 1.27)

Die Parameter der Bündel sind so zu wählen, dass die Spiegelflächen gerade Flächen konstanter Phase sind.

Dies durchzurechnen ist eine herrliche Wiederholung und Anwendung der Gauss-Bündel und wird in der Übung gemacht. Hier nur einige wesentliche Resultate.

*strahlenoptische Interpretation:* In einem stabilen Resonator bleibt ein achsennaher Strahl auch nach unendlich vielen Umläufen achsennah. Wenn er sich jedoch von Umlauf zu Umlauf immer weiter von der optischen Achse entfernt, spricht man von einem instabilen Resonator. ( $R_i < 0$  bei Spiegelkrümmung zum Resonator hin, wie in Abb.) (5.19)

**Modenfrequenzen:**

$$\nu_{N,l,m} = \left(N + (1 + m + l)\frac{\Delta\xi}{\pi}\right) \frac{c}{2dn}$$

hier sind  $N, l, m$  ganze Zahlen.  $N$  ist die longitudinale Moden-Nummer (Zahl der Knoten längs des Resonators),  $m, l$  die transversalen Modennummern (Zahl der Knoten im Drehwinkel um die Achse und radial von ihr weg). Die transversale Grundmode  $(m, l) = 0$  entspricht einem einfachen Gauss-Bündel.  $\Delta\xi$  ist die Phasenretardierung der Bündel (s. Kap. 1). (5.20)

*Verluste durch endliche Spiegelgröße.* 2 Effekte führen zu zusätzlichen Verlusten:

- a) der äußere Teil des Bündels wird nicht reflektiert, geht also bei jedem Umlauf verloren.
- b) dadurch hat die reflektierte Welle eine endliche Ausdehnung, divergiert infolge Beugung (s. Fourier-Optik) also stärker, als das unendlich ausgedehnte Gauss-Bündel, so dass der gegenüberliegende Spiegel noch schlechter ausgeleuchtet wird.

Beide Effekte sind am kleinsten für die transversale Grundmode  $(m, l) = (0, 0)$ , welche damit die kleinsten Zusatz-Verluste hat.

### 5.3 Dreidimensionale Resonatoren

Hier aus Zeitgründen nur Grobskizze weniger wesentlicher Punkte.

Im Idealfall ergeben sich die Resonatormoden aus der Randbedingung, dass das Feld am Rand des Resonators verschwinden muss (stehende Wellen).

Man numeriert sie (wie schon bei den Wellenleitern oder den sphärischen Spiegeln) mit den entsprechenden Knotenzahlen durch.

Der Vektorcharakter der Felder kann zu weiteren Modifikationen führen (wird nicht ausgeführt).

Ganz kurz 2 Beispiele:

geschlossene Resonatoren



Resonatorachse (z)

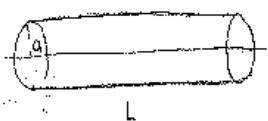
Resonatormoden:

$$\omega = CK = CT \sqrt{\left(\frac{N_x}{ra}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{rb}\right)^2 + \left(\frac{Q_z}{L}\right)^2} \quad N_x, M_y, Q_z = 0, 1, 2, \dots$$

Transversalmoden  
(TEM<sub>nmq</sub>)

Longitudinal- oder Axialmoden

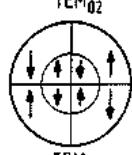
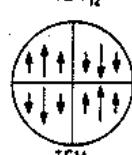
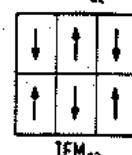
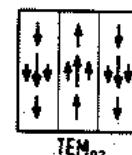
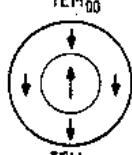
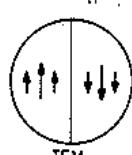
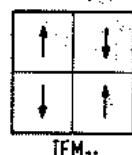
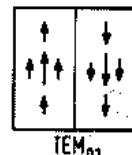
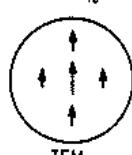
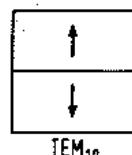
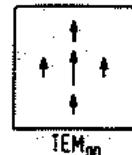
Laserrohr



$$\omega = C \sqrt{\left(\frac{Q_z}{L}\right)^2 + \frac{X_{NM}^2}{a^2}} \quad J_N(X_{NM})=0 \\ J_M'(X_{NM})=0 \\ X_{\min} = 1.84$$

Beachte: Ableitung üblicherweise für R=1 an allen Seiten  
(E<sub>trans</sub>=0 am Spiegel). In diesem Fall verschwindet Feld,  
wenn zwei Indizes gleichzeitig null. TEM<sub>000</sub> existiert also  
nicht. Bei R≠1 wird diese Bedingung aufgeweicht.

3dres



## 6 Optische Kohärenz



bisher: deterministisches Licht. Realität: Amplitude und Phase fluktuiieren (Rauschen)

Solches Licht kann mehr oder weniger kohärent sein.

qualitativ: Kohärenz von Licht = Interferenzfähigkeit

quantitatives Maß gesucht.

hängt davon ab, wie das Licht detektiert wird.

Gliederung: Detektion von Intensität, Spektrum und dann erst Kohärenz.

### 6.1 Intensität

Intensität = Energie, die pro Zeiteinheit durch Flächeneinheit strahlt = Energiedichte =  $|\vec{S}|$

$$= c\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 \quad (\text{für frei propagierende Felder, in Resonator z.B. komplizierter})$$

Wie werden Intensitäten gemessen? Mit einem Detektor  $D$  (z.B. Photodiode).

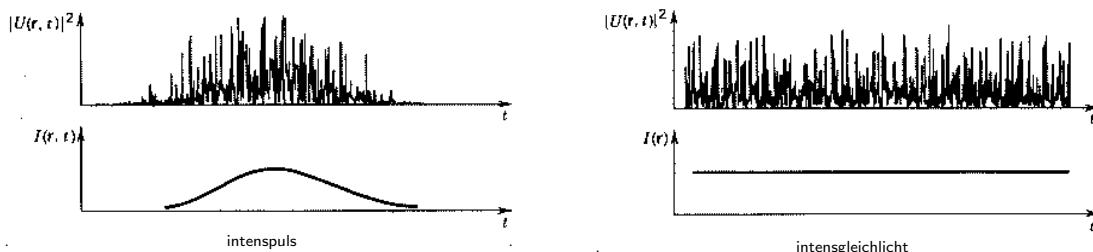
Falle auf diesen ein linear polarisierter Wellenzug  $E(t)$ .

Meßsignal  $\sim c\varepsilon_0 E^2 = U^2$ . Es ist sinnvoll, die Größe  $U = E/\sqrt{c\varepsilon_0}$  als Amplitude einzuführen, damit man nicht immer wieder das  $c\varepsilon_0$  mitschreiben muß.

aber nicht momentan, sondern gemittelt über eine endliche Integrationszeit  $T_D$

$$I(t) = \langle U^2(t) \rangle \quad \begin{aligned} \text{Hier und im folgenden symbolisiert } \langle f(t) \rangle \text{ die Mittelung der Funktion } f(t') \text{ über} \\ \text{vergangene Zeiten } t' < t. \text{ Wie das konkret geschieht brauchen wir nicht. Eine} \\ \text{Möglichkeit wäre zum Beispiel } \langle f(t) \rangle = \int_0^\infty dt' f(t-t') e^{-t'/T_D}. \text{ Hier wäre } T_D \text{ die} \\ \text{effektive Integrationszeit des Detektors.} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Veranschaulichung für ungemittelte und gemittelte Intensitäten eines Lichtpulses und von Gleichlicht:



Auch verrausches Licht belegt nur schmales Frequenzband um eine Trägerfrequenz  $\omega$  herum. Also gilt

$$U(t) = U^+(t) + U^-(t) \quad U^+ = \frac{1}{2}\mathcal{U}(t)e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0) \quad U^- = (U^+)^* \quad (6.2)$$

$\mathcal{U}(t)$  – komplexe Amplitude, moduliert die Trägerschwingungen, langsam veränderlich.

Zerlegung in reelle Amplitude u. Phase

$$U(t) = A(t)e^{-i\Phi(t)} \implies \boxed{U(t) = A(t) \cos(\omega t + \Phi(t))} \quad (6.3)$$

Momentanfrequenz:  $\omega(t) = \omega + \dot{\Phi}(t)$ . Die Frequenzschwankung heißt Chirp.

Setzen wir dies in (6.1) ein:

$$\langle U^2 \rangle = \langle (U^+ + U^-)^2 \rangle = \langle (U^+)^2 + (U^-)^2 + 2U^+U^- \rangle = \frac{1}{4} \langle \mathcal{U}^2 e^{-2i\omega t} + \text{h.c.} + 2|\mathcal{U}|^2 \rangle$$

Die ersten beiden Terme schwingen mit der doppelten Lichtfrequenz.

Sie verschwinden bei der Mittelung, weil  $T_D$  immer lang gegenüber der Schwingungsperiode des Lichtes ist. Also

$$I(t) = 2\langle U^+(t)U^-(t) \rangle = 2\langle |U^+(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2}\langle |\mathcal{U}(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2}\langle A^2(t) \rangle \quad (6.4)$$

Hier geht nur die Amplitude ein, die Phaseninformation geht bei einer Intensitätsmessung verloren.

Bei Pulsen muß  $T_D$  hinreichend kurz sein (sonst keine sinnvolle Messung).

## 6.2 Frequenzspektrum

Theoretisch durch Fouriertransformation

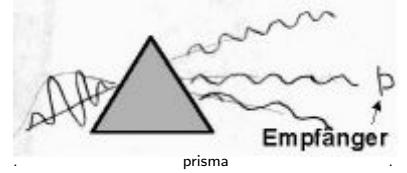
$$U^\pm(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' U^\pm(\omega') e^{\mp i\omega' t} \quad \text{bzw.} \quad U^\pm(\omega') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt U^\pm(t) e^{\pm i\omega' t} \quad (6.5)$$

$$\Rightarrow U^\pm(\omega') = \frac{1}{2} \mathcal{U}(\pm[\omega' - \omega]). \quad (6.6)$$

Beachte:  $\omega$  war die feste Zentrfrequenz,  $\omega'$  ist Laufvariable.

**Experiment:** Spektralzerlegung, z.B. mit Prisma

Im Idealfall fallen nur Fourierkomponenten  $E^\pm(\omega')$  der gegebenen Frequenz  $\omega'$  auf den Detektor.



Das erfordert aber entsprechend (6.5), daß  $U^\pm(t)$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  verarbeitet wird

Reale Spektrometer verarbeiten  $U^\pm(t)$  nur aus einem endlichen Zeitintervall  $T$ .

Das gibt nur genäherte Fourierkomponenten, z.B.

$$U_T^\pm(\omega', t_0) = \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} e^{\pm i\omega' t'} U^\pm(t') dt' \quad (t_0 - \text{Mittelpunkt des "Verarbeitungsintervalls"}) \quad (6.7)$$

Die mittlere spektrale Intensität während dieses Zeitintervalls ist dann

$$S_T(\omega', t_0) = \frac{1}{T} \langle |U_T^+(\omega', t_0)|^2 \rangle. \quad (6.8)$$

Natürlich hängt das Ergebnis von  $T$  ab und ändert sich mit  $t_0$ .

Als Funktion von  $t_0$  ist es glatt über Zeiten klein gegen  $T$ .

Als Funktion von  $\omega'$  ist es glatt über Spektralintervalle klein gegen  $2\pi/T$ .

Zeitaufgelöste Spektren erfordern also kleine  $T$ . Sie sind breit und unscharf in  $\omega'$ .

Hohe spektrale Auflösung verlangt umgekehrt große  $T$  auf Kosten der zeitlichen Auflösung.

Maximale spektrale Auflösung bietet der Limit  $T \rightarrow \infty$ :

$$S(\nu') = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \langle |U_T^+(\omega', t_0)|^2 \rangle \quad \text{spektrale Leistungsdichte}$$

Diese üblicherweise benutzte Größe ist auf die Frequenz  $\nu' = \omega'/2\pi$  bezogen und nicht auf die Kreisfrequenz  $\omega'$ , daher der Faktor  $2\pi$ . Ihre Dimension ist  $[S] = \text{Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$ . (6.9)

hängt nicht von  $t_0$  ab – keinerlei Zeitauflösung – gut für Gleichlicht – langsamer Detektor reicht.

Vereinfachung für Gleichlicht und  $T_D \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \langle |U_T^+(\omega', t_0)|^2 \rangle &= \left\langle \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} e^{i\omega' t'} U^+(t') dt' \right|^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} e^{-i\omega'(t_2-t_1)} \langle U^-(t_1) U^+(t_2) \rangle dt_1 dt_2 \\ &\quad \text{Gleichlicht \& } T_D \rightarrow \infty : \langle U^-(t_1) U^+(t_2) \rangle \text{ nur v. } t_2 - t_1 \text{ abhängig} \\ &\xrightarrow{T_D \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} e^{-i\omega'\tau} \langle U^-(t_0) U^+(t_0 + \tau) \rangle d\tau \end{aligned}$$

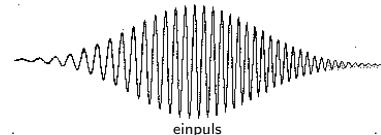
also

$$S(\nu') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega'\tau} G(\tau) d\tau \quad \text{Wiener-Khinchin-Theorem} \quad (6.10)$$

$$G(\tau) = \lim_{T_D \rightarrow \infty} \langle U^-(t_0) U^+(t_0 + \tau) \rangle \quad \text{zeitliche Korrelationsfunktion} \quad (6.11)$$

### 6.3 Pulsbreiten

Natürlich kann man das zeitintegrierte Spektrum (6.10) auch für einzelne Lichtpulse endlicher Länge bestimmen (das wird im Labor sogar sehr oft gemacht, weil viel einfacher als zeitaufgelöst).



Dessen spektrale Breite  $\Delta\nu$  und die zeitlich Breite  $\Delta t$  des Intensitätspulses  $I(t)$  sind nicht unabhängig.

Die Schwarz'sche Ungleichung liefert

Mathe, analog zu Unschärferelation in Quantenmechanik

$$\Delta\nu \cdot \Delta t \geq \frac{1}{4\pi} \quad \text{Gleichheitszeichen: bandbreitenbegrenzte Impulse (engl.: transform limited)} \quad (6.12)$$

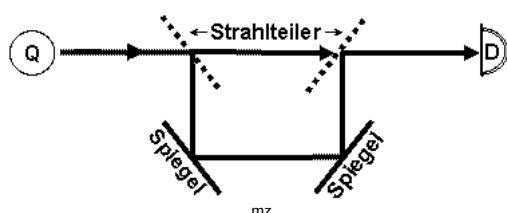
Dabei

$$\text{Zeit: } \Delta t^2 = \bar{t}^2 - \bar{t}^2 \quad \text{dabei Zeitmittel: } \bar{t} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) I(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dt I(t)} \quad (6.13)$$

$$\text{Frequenz: } \Delta\nu^2 = \bar{\nu}^2 - \bar{\nu}^2 \quad \text{dabei Frequenzmittel: } \bar{\nu} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\nu g(\nu) S(\nu)}{\int_{-\infty}^{\infty} d\nu S(\nu)} \quad (6.14)$$

### 6.4 Interferenz: Kohärenz 1. Ordnung

#### 6.4.1 Zeitliche Kohärenz



Die Feldamplitude wird geteilt  
eine Hälfte über einen Umweg  $l$  geführt  
beide Teilamplituden dann wieder überlagert.  
Die Laufzeitdifferenz ist  $\tau = l/c$ .

Intensität am Detektor (langsam, große Integrationszeit  $T_D$ ):

$$I(\tau) = 2 \left\langle \frac{1}{2} [U^-(t) + U^-(t + \tau)] \cdot \frac{1}{2} [U^+(t) + U^+(t + \tau)] \right\rangle = G(0) + \Re[G(\tau)]$$

Hier taucht wieder die Korrelationsfunktion  $G(\tau)$  auf. Einsetzen von (6.2) in (6.11) gibt

$$G(\tau) = \langle \mathcal{U}^-(t)\mathcal{U}^+(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} = G(0)g(\tau)e^{-i\omega\tau} \quad (6.15)$$

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)} = \frac{\langle \mathcal{U}^-(t)\mathcal{U}^+(t+\tau) \rangle}{\langle |\mathcal{U}^+(t)|^2 \rangle} \quad \text{komplexer Korrelations- bzw. Kohärenzgrad} \quad (6.16)$$

$e^{-i\omega\tau}$  – Phasenfaktor, variiert schnell mit  $\tau$  (mit Lichtfrequenz  $\omega$  !)

$g(\tau)$  – im Vergleich dazu langsam in  $\tau$  veränderlich

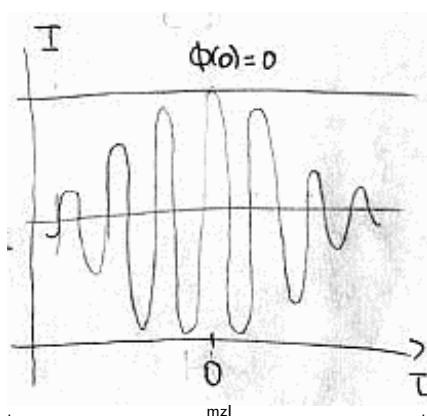
immer  $|g(\tau)| \leq 1$

$\tau \rightarrow 0: g(\tau) \rightarrow 1$

$\tau \rightarrow \infty: g(\tau) \rightarrow 0$ , weil bei realem Licht die Amplituden-Phasen bei  $t$  und bei  $t + \tau$  in diesem Limit statistisch unkorreliert sind, was bei der Mittelung null gibt.

Damit wird die hinter dem MZ-Interferometer gemessene Intensität

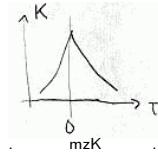
$$I(\tau) = G(0) [1 + |g(\tau)| \cos(\omega\tau + \varphi(\tau))] \quad (\varphi - \text{Phase von } g) \quad (6.17)$$



- Oszilliert um Mittelwert
- Kontrast der Oszillationen gleich Kohärenzgrad

$$K(\tau) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = |g(\tau)| \quad (6.18)$$

- $\Rightarrow$  Kontrast klingt gewöhnlich mit  $\tau$  ab:



vollständig kohärentes Licht ( $K(\tau) \equiv 1$ ) nur wenn  $G(\tau) = G(0)e^{i\omega t} \stackrel{(6.10)}{\Rightarrow} S(\nu') \sim \delta(\nu' - \nu)$ .

Gleichlicht ist nur dann vollständig kohärent, wenn es monochromatisch ist.

Partiell kohärentes Licht hat gewöhnlich eine endliche Kohärenzzeit, gegeben durch den Abfall von  $|g(\tau)|$ .

Kohärenzzeit:  $\tau_c := \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)|^2 d\tau$

(6.19)

Zusammenhang mit spektraler Breite:

Einsetzen von  $G(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu e^{-i\omega\tau} S(\nu)$  [Umkehrung von (6.10)]

$$\begin{aligned} \tau_c &= \frac{1}{G^2(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} S(\nu)S(\nu') \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i(\omega-\omega')\tau} && \Big| \text{ Einsetzen von } \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} = 2\pi\delta(\omega) \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu S^2(\nu)}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu S(\nu)\right)^2} \end{aligned}$$

Also finally

$\tau_c \cdot \Delta\nu = 1$

mit der spektralen Breite

$$\Delta\nu = \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu S(\nu)\right)^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu S^2(\nu)}$$

(6.20)

Die Tabelle gibt spektrale Breiten und die daraus resultierenden Kohärenzzeiten, bzw. Kohärenzlängen  $l_c = c\tau_c$  für einige repräsentative Lichtquellen an.

Sind in einer optischen Anordnung alle relevanten Wege kürzer als  $l_c$ , so ist das Licht kohärent.

Durch spektrales Filtern (verschmälern des Spektrums) kann die Kohärenz von Licht verbessert werden.

	$\Delta\nu[\text{Hz}]$	$\tau$	$l_c$	$l_c/\lambda$
Sonne	$5 \cdot 10^{14}$	0.6 fs	200 nm	$\approx 1$
Interferenzfilter, $\Delta=1\text{nm}$	$5 \cdot 10^{11}$	600 fs	200 μm	$\approx 1000$
spektral lampe	$10^9$	300 ps	10 cm	$\approx 5 \cdot 10^5$
Laser	$\approx 10^3$	300 μs	100 km	$\approx 5 \cdot 10^{11}$

tkohtab

Beispiel einer atomaren Lorentz-Linie: Übungsaufgabe

### Ergänzung

Wir betrachten die Überlagerung mehrerer vollständig kohärenter (also ideal monochromatischer) Lichtwellen verschiedener Wellenlängen, z.B.  $U^+(t) = \sum_k u_k e^{-i\omega_k t}$ . Die Intensität  $I(t) = \sum_{k,l} u_l^* u_k \langle e^{-i\omega_{kl} t} \rangle$  wird zeitunabhängig (Gleichlicht), wenn alle wesentlichen Schwebungsfrequenzen  $\omega_{kl} = \omega_k - \omega_l$  groß gegen die inverse Integrationszeit  $1/T_D$  des Detektors sind. Die Schwebungsterme mitteln sich dann heraus und es bleibt  $I = \sum_k |u_k|^2$ . Für die Kohärenzfunktion ergibt sich analog  $G(\tau) = \sum_{kl} u_l^* u_k e^{-i\omega_{kl}\tau} \langle e^{-i\omega_{kl}\tau} \rangle = \sum_k e^{-i\omega_k \tau} |u_k|^2$ . Folglich ist das Spektrum eine entsprechende Überlagerung ideal scharfer Linien,  $S(\nu) = \sum_k |u_k|^2 \delta(\nu - \nu_k)$ . Für den Interferenzkontrast ergibt sich  $K(\tau) = \sum_{k,l} |u_l|^2 |u_k|^2 e^{-i\omega_{kl}\tau} / I^2 = \sum_{k,l} |u_l|^2 |u_k|^2 \cos(\omega_{kl}\tau) / I^2$ .

Wegen der periodischen Mischterme  $k \neq l$  ist dies keine Konstante wie im Falle ideal kohärenten (monochromatischen) Lichts, fällt aber für  $\tau \rightarrow \infty$  auch nicht notwendig auf null, wie bei realem Licht endlicher Linienbreite.

z.B. im Spezialfall von 2 gleichstarken monochromatischen Wellen bleibt  $K(\tau) = \cos^2(2\omega_{12}\tau)$ , eine periodische Funktion mit der Schwebungs-Periode  $4\pi/\omega_{12}$ .

## 6.4.2 Räumliche Kohärenz

räumlich ausgedehnte Lichtquellen

betrachten nur Beispiel rechts

Lichtquelle enthält viele Quellpunkte  $Q_i$

das Licht jedes  $Q_i$  sei zeitlich kohärent

es erzeuge Interferenzbild  $I(Q_i)$  auf Schirm

verschiedene Quellpunkte unkorreliert

$\Rightarrow$  Interferenzbilder  $I(Q_i)$  addieren sich

Verwaschung, wenn gegenseitige Verschiebung größer als Abstand der Maxima

Betrachten Quellpunkt in Abstand  $L$  von Mittelachse.

Entscheidend ist der Gangunterschied zu den beiden Spalten

$$r_2 - r_1 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2} + L\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2} - L\right)^2} \xrightarrow{R \gg L, d} d \frac{L}{R} \quad (6.21)$$

Das muß über die Quelle hinweg um weniger als  $\frac{\lambda}{2}$  schwanken. Es muß also gelten  $L/R \ll \lambda/2d$ , wenn jetzt  $L$  die Abmessung der Quelle ist. Weil  $\theta = L/R$  dann der Winkel ist, unter dem man von der Blende aus die Quelle sieht, ergibt sich

$$\text{Sichtwinkel Quelle } \theta \ll \theta_c = \frac{\lambda}{d} \quad \text{Bedingung für räumliche Kohärenz} \quad (6.22)$$

Eine ausgedehnte Lichtquelle erzeugt nur unter dieser Bedingung ein Interferenzbild.

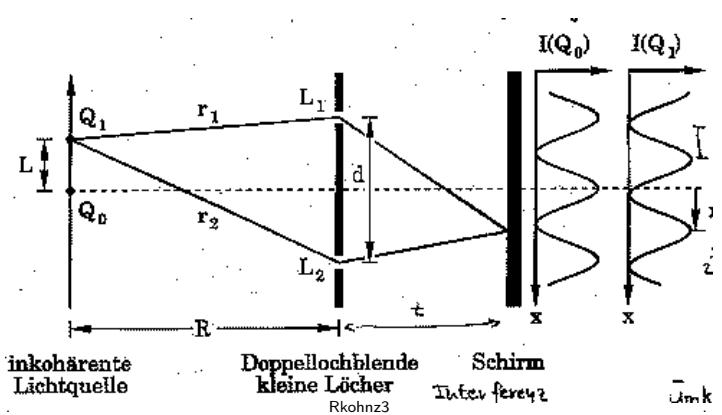
Man muß sie also hinreichend weit wegschieben (Abstand  $R$  groß), um Interferenzbild zu erhalten.

Bei astronomischen Objekten (Sonne, Sterne) geht das nicht. Da muß man  $d$  hinreichend klein machen,  $d \ll \lambda/\theta$  (Achtung: Winkel in Bogenmaß, nicht etwa Grad!).

Sonne:  $\theta \approx 0.5^\circ \approx 0.01$ . Für  $\lambda = 500\text{nm}$  (gelbgrün, Farbfilter) folgt  $d \ll 0.2\text{mm}$ .

Fixsterne haben um Größenordnungen kleinere Sehwinkel, das kritische  $d$  ist hier im Meterbereich (oder größer).

Die Variation von  $d$  bis zum Verschwinden der Interferenz kann hier umgekehrt genutzt werden, um den Sehwinkel überhaupt erst zu bestimmen.



## 6.5 Intensitäts- bzw. Photonenstatistik: Kohärenz 2. Ordnung

Typische Messanordnung

(Hanbury-Brown & Twiss – Experiment):

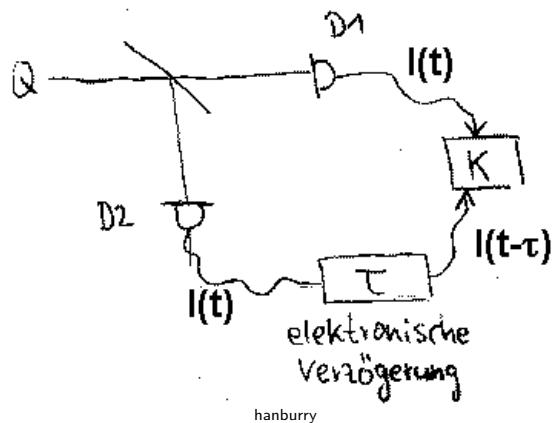
2 Detektoren messen jeweils  $I(t)$   
(erste Zeitmittelung, wie bisher)

Ein Signal wird direkt auf Korrelator  $K$  gegeben

das andere um die Zeit  $\tau$  verzögert

Korrelator  $K$  mißt Schwankungen v.  $I(t) + I(t - \tau)$   
dabei zweite Zeitmittelung über  $t$

Aus Messignal bestimmbar:



$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t - \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}$$

Kohärenz- bzw. Korrelationsgrad 2. Ordnung

(6.23)

Ideal kohärentes Licht (monochromatisch):  $I = \text{const.} \Rightarrow g^{(2)}(\tau) \equiv 1$ .

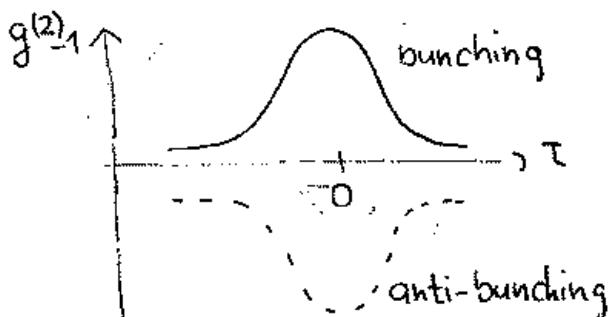
Thermisches Licht:  $g^{(2)}(\tau) \rightarrow 1$  für  $\tau \rightarrow \infty$ , weil Intensitäten in diesem Limit nicht korreliert, d.h.  
Mittelwert des Produktes im Zähler = Produkt der Mittelwerte = Nenner.

Messung für endliche  $\tau$  ergab:  $g^{(2)}(\tau)$  hat Maximum  $> 1$  bei  $\tau = 0$ .

Quantenoptische Interpretation: Photonenklumpen (bunching).

Das wird uns noch beschäftigen.

Im Labor kann man auch Licht herstellen, bei dem  $g^{(2)}(\tau)$  ein Minimum  $< 1$  hat (Anti-Bunching).



erhöhte Kohärenz bei  $\tau=0$ : Ist ein Photon registriert, so besteht erhöhte Wahrscheinlichkeit, daß zweiter Photon am Detektor eintritt  $\rightsquigarrow$  Photonen Klumpen  $\rightsquigarrow$  Widerspiegelung des Bosonen-Charakters, aber auch Gegen Teil f. nichtklassisches Licht  $\rightsquigarrow$  Quantenoptik

bunching

## 7 Quantenoptik

### 7.1 Photonen

Photonen sind Schwingungsquanten des Strahlungsfeldes.

Erfordert Quantenfeldtheorie, konkret QED = QuantenElektroDynamik.

Die Feldquantisierung ist im Prinzip völlig analog zur gewöhnlichen Quantemechanik:

- drücke die Felder durch geeignete verallgemeinerte Koordinaten aus,
- bestimme die zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse,
- schreibe die Hamilton-Funktion hin
- ersetze Koordinaten und Impulse durch Operatoren, die entsprechend  $[p, q] = i\hbar$  kommutieren.

Im Detail tauchen ein paar Schwierigkeiten auf, z.B. Kontinuum von Freiheitsgraden etc.

*Hier einfachster Fall:* 1D, idealer Resonator mit nur 1 linear polarisierten Mode<sup>11</sup>

#### 7.1.1 Klassische Lichtmode als idealer harmonischer Oszillatior

Ausgangspunkt ist die allgemeine Form des elektrischen Feldes einer Resonatormode:

$$\vec{E}(z, t) = d_0 \ q(t) \ u(z) \ \vec{e}_x$$

Mode = Feld mit unveränderlicher räumlicher Intensitätsverteilung  
 $d_0$ : Konstanter Dimensionsfaktor, wird später geeignet festgelegt.  
 $u$  sinnvollerweise im Resonatorvolumen  $V$  normiert:  $\int_V u^2(z) \ dV = 1$ .  
 $\vec{e}_x$  – Polarisations-Einheitsvektor, o.B.d.A in x-Richtung.

(7.1)

Jede Feldkomponente muß der Wellengleichung  $\Delta E = \ddot{E}/c^2$  genügen, daraus folgt

$$u''(z) + k^2 u(z) = 0$$

Die Wellenzahl  $k$  der Mode muß so gewählt werden daß die Resonator-Randbedingungen erfüllt sind. Im einfachsten Fall z.B.  $k = m\pi/L$ ,  $m$  ganz,  $L$  Resonatorlänge.

(7.2)

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \text{ mit } \omega = ck$$

Das ist die Gleichung eines idealen harmonischen Oszillators. Seine Frequenz ist eindeutig durch die Wellenzahl  $k$  der Mode festgelegt.

(7.3)

Das zugehörige Magnetfeld folgt aus den MGI. z.B. durch Zeitintegration von  $\nabla \times \vec{E} = -\vec{B}$ :

$$\vec{B} = - \int dt \ \nabla \times \vec{E} = - \int dt \ d_0 q(t) \ \nabla u(z) \times \vec{e}_x = - \int dt \ \frac{-d_0 \ddot{q}}{\omega^2} \ u'(z) \vec{e}_z \times \vec{e}_x = d_0 \frac{\dot{q}(t)}{\omega^2} u'(z) \vec{e}_y.$$

Aha:

Das elektromagnetische Feld der Resonatormode hat nur einen Freiheitsgrad.  
 $q(t)$  ist eine geeignete verallgemeinerte Koordinate.

Mehr noch: diese Koordinate bewegt sich exakt wie ein klassischer idealer harmonischer Oszillator.

Damit kennen wir auch den zugehörigen Impuls und die Hamiltonfunktion:

$$p = m\dot{q} \quad H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2.$$

<sup>11</sup> letzteres heute insbesondere mit HL-Mikroresonatoren realisierbar.

Den "Masselfaktor"  $m$  gewinnen wir durch Vergleich mit der Feldenergie im Resonatorvolumen:

$$H = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) = \frac{\epsilon_0}{2} d_0^2 \left( q^2 + \dot{q}^2 \frac{1}{c^2} \int_V dV u'(z)^2 \right) = \frac{\epsilon_0}{2} d_0^2 \left( q^2 + \frac{\dot{q}^2}{\omega^2} \right) \Rightarrow m = \frac{\epsilon_0 d_0^2}{\omega^2}.$$

Man soll sich das Leben einfach machen, wir erreichen  $m = 1$  durch  $d_0 = \omega / \sqrt{\epsilon_0}$ . Damit

$\vec{E} = q \cdot \omega \epsilon_0^{-1/2} u(z) \vec{e}_x$ $\vec{B} = p \cdot \omega^{-1} \epsilon_0^{-1/2} u'(z) \vec{e}_y$	Hamiltonian: $H(q, p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$	(7.4)
--	--	-------

Die elektrische Feldamplitude  $q$  und die magnetische Feldamplitude  $p$  verhalten sich wie Ort und Impuls eines harmonischen Oszillators mit der Modenfrequenz  $\omega$  und der angegebenen Hamilton-Funktion.

### 7.1.2 Quantisieren der Resonatormode

Feldquantisierung ist nun Ersetzen des klassischen Oszillators durch den quantenmechanischen:<sup>12</sup>

$q$ und $p$ werden hermitesche Operatoren mit der Vertauschungsrelation $[q, p] := qp - pq = i\hbar$ .	(7.5)
--	-------

Entsprechend werden die Felder Operatoren und Meßwerte für die Amplituden  $q, p$  streuen (im allgemeinen).

Worauf wirken diese Operatoren?

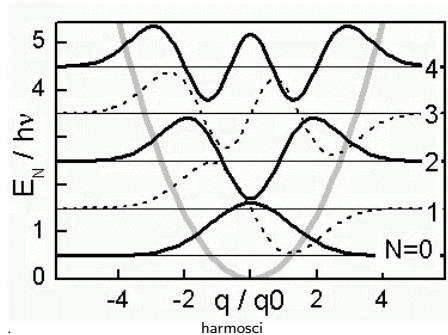
auf Zustände  $|\Psi\rangle$ , d.h. Zustandsfunktionen  $\Psi(q)$ , deren Betragsquadrat die Wahrscheinlichkeit<sup>13</sup> ist, bei einer Messung der elektrischen Feldstärke die Amplitude  $q$  zu finden.

Beachte: die Variable  $q$ , von der die Zustandsfunktion abhängt, ist nicht der Ort, wie oft in der gewöhnlichen QM, sondern die (geeignet normierte) Amplitude des elektrischen Modenfeldes, welches ganz wohlbestimmt wie  $u(z)$  vom Ort abhängt. Entsprechend ist  $p$  kein richtiger Impuls, sondern representiert entsprechend die Amplitude einer kanonisch konjugierten Feldamplitude.

Eigenwerte und -funktionen des harmonischen Oszillators (7.4) sind wohlbekannt:

$$E_N = \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right), \quad N > 0 \text{ ganz}, \quad |N\rangle = H_N(q/q_0) e^{-q^2/2q_0^2}, \quad \langle N|N' \rangle = \delta_{NN'} \quad (7.6)$$

mit  $q_0 = \sqrt{\hbar/\omega}$ , und den HERMITESchen Polynomen  $H_N(x)$ .



Einige Eigenwerte und -Funktionen sind links skizziert.

Abstand der Eigenwerte: Energiequant  $\hbar\omega \hat{=} 1$  Photon.

Zustand  $|N\rangle$  enthält also  $N$  Photonen.

$|0\rangle$  enthält kein Photon = Photonenvakuum.

Hat trotzdem Energie  $E_0 = \hbar\omega/2$  (Nullpunktsenergie)

und endliche Wahrscheinlichkeit für endliche Feldamplitude  $q$  = Fluktuationen des Photonenvakuums.

<sup>12</sup>Das ist einleuchtend, aber nicht herleitbar, es wird einfach postuliert, die experimentelle Bestätigung der Konsequenzen rechtfertigt das Vorgehen, wie so oft in der Physik.

<sup>13</sup>pro  $q$ -Intervall

### 7.1.3 Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren

Wie bei den klassischen Feldern ist es sinnvoll, diese nach positiven und negativen Frequenzen zu zerlegen. Das gelingt mit der Transformation

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a + a^\dagger) \quad (7.7)$$

$$p = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}i(a^\dagger - a) \quad (7.8)$$

rückwärts:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}(\omega q + ip) \quad (7.9)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}(\omega q - ip) \quad (7.10)$$

Die beiden neuen Operatoren sind nicht selbstadjungiert, sondern  $a^\dagger$  ist der zu  $a$  adjungierte Operator.

$$\text{Vertauschungsrelationen: } [a, a^\dagger] = \frac{1}{2\hbar}([q, -ip] + [ip, q]) = \frac{-i}{\hbar}[q, p], \text{ also } [a, a^\dagger] = 1 \quad (7.11)$$

Weiterhin:  $p^2 + \omega^2 q^2 = \frac{\hbar\omega}{2}[-(a^\dagger - a)^2 + (a^\dagger + a)^2] = \hbar\omega(a^\dagger a + aa^\dagger) = \hbar\omega(2a^\dagger a + 1)$ , also

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

Hamilton-Operator einer Mode

(7.12)

Die Wirkung der  $a$ -Operatoren auf die Eigenzustände lässt sich leicht ermitteln:

$$H|0\rangle = \hbar\omega(a^\dagger a|0\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle) \stackrel{!}{=} \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle \Rightarrow a|0\rangle = 0. \text{ Damit auch } \langle 0|a^\dagger = 0.$$

$$\begin{aligned} H(a^\dagger)^N|0\rangle &= \hbar\omega \left( a^\dagger a (a^\dagger)^N|0\rangle + \frac{1}{2}(a^\dagger)^N|0\rangle \right) \\ &= \hbar\omega \left( a^\dagger \left[ a, (a^\dagger)^N \right]|0\rangle + \frac{1}{2}(a^\dagger)^N|0\rangle \right) \quad \text{Nebenrechnung: } \left[ a, (a^\dagger)^N \right] = N(a^\dagger)^{(N-1)} \\ &= \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right) \cdot (a^\dagger)^N|0\rangle \quad \text{Aha: } (a^\dagger)^N|0\rangle \text{ ist ein } N\text{-Photonenzustand, } |N\rangle = c_N(a^\dagger)^N|0\rangle. \\ &\quad \text{Proportionalitätsfaktor } c_N \text{ aus Norm bestimmbar:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \langle N|N\rangle = |c_N|^2 \langle 0|a^N(a^\dagger)^N|0\rangle = |c_N|^2 \langle 0|a^{N-1}\left[a, (a^\dagger)^N\right]|0\rangle = N|c_N|^2 \langle 0|a^{N-1}(a^\dagger)^{N-1}|0\rangle \\ &= N(N-1)|c_N|^2 \langle 0|a^{N-2}(a^\dagger)^{N-2}|0\rangle = \dots = N!|c_N|^2 \langle 0|0\rangle = \dots = N!|c_N|^2 \Rightarrow c_N = 1/\sqrt{N!}. \end{aligned}$$

Also finally

$$|N\rangle = \frac{(a^\dagger)^N}{\sqrt{N!}}|0\rangle$$

$$\begin{aligned} a^\dagger|N\rangle &= \sqrt{N+1}|N+1\rangle \\ a|N\rangle &= \sqrt{N}|N-1\rangle \end{aligned}$$

$$a^\dagger a|N\rangle = N|N\rangle \quad (7.13)$$

$a^\dagger$  – Photonenerzeuger,  $a$  – Photonenvernichter,  $a^\dagger a$  – Photonenzahloperator.

$|N\rangle$  – Fockzustände (scharfe Photonenzahl). Bilden Orthonormalbasis.

$$\text{Beliebiger Feldzustand: } |\Psi\rangle = \sum_N c_N|N\rangle. \text{ Mittl. Photonenanzahl: } \overline{N} = \langle \Psi | a^\dagger a | \Psi \rangle = \sum_N |c_N|^2 N. \quad (7.14)$$

$|c_N|^2$  ist die Wahrscheinlichkeit, im Zustand  $|\Psi\rangle$  gerade  $N$  Photonen zu finden. (7.7) in (7.4) gibt für die

Feldoperatoren:

$$\begin{aligned} E &= \mathcal{E}u(z)(a + a^\dagger) \\ B &= \mathcal{B}u'(z)(a - a^\dagger) \end{aligned}$$

$$(\mathcal{E} = \sqrt{\hbar\omega/2\varepsilon_0}, \mathcal{B} = \mathcal{E}/i\omega) \quad (7.15)$$

Damit:  $\langle N|E|N\rangle = 0$  und  $\langle N|B|N\rangle = 0$ .

Zustände mit scharfer Photonenzahl haben kein makroskopisches Feld!

Zeitliche Änderung der Operatoren (Heisenbergbild):  $\dot{a} = \frac{1}{i\hbar}[a, H] = -i\omega[a, a^\dagger a] = -i\omega[a, a^\dagger]a = -i\omega a$ .

Also  $a(t) = a(0)e^{-i\omega t}$  und entsprechend  $a^\dagger(t) = a^\dagger(0)e^{i\omega t}$ .

Die Zerlegung des Feldoperators in positive und negative Frequenzterme ist also

$$E = E^{(-)} + E^{(+)} \quad \text{mit} \quad E^{(-)} = \mathcal{E} u \ a^\dagger \quad \text{und} \quad E^{(+)} = \mathcal{E} u \ a. \quad (7.16)$$

#### 7.1.4 Verallgemeinerung auf 3D-Resonator mit mehreren Moden

Völlig problemlos.  $u(z) \rightarrow u_k(\vec{r})$  ( $k$  – Modenindex).

Feld  $\sim \sum_k q_k(t)u_k(\vec{r})$ , MaxwellGleichungen linear  $\Rightarrow$

- ungekoppelte Oszillatoren,
- $\ddot{q}_k + \omega_k q_k = 0$  für jede Mode  $k$
- jede Mode für sich quantisierbar
- jede Mode hat ihre eigenen Photonen

$$H = \sum_k \hbar\omega_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2} \quad [a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl} \quad [a_k, a_l] = 0. \quad (7.17)$$

Anmerkung: der letzte Term ist eine additive Konstante, kann weggelassen werden (Wahl Energienullpunkt).

#### 7.1.5 Verallgemeinerung auf freie Felder

Modenbasis jetzt ebene Wellen,  $u_k(\vec{r}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$ , Modenindex  $k = (p, \vec{k})$ ,  $p$  – Polarisation.

Problem: Eigentlich Kontinuum von Moden.

Trick: zunächst endliches Periodizitätsvolumen  $V = L^3$

$\Rightarrow \vec{k} = (m_x, m_y, m_z) \frac{2\pi}{L}$  diskreter Satz

ganz zum Schluß bei Dichten  $L \rightarrow \infty$ .

Feld klassisch  $\sim \sum_k \vec{e}_k (A_k e^{-i\omega t}) e^{i\vec{k}\vec{r}} + \vec{e}_k^* (A_k^* e^{+i\omega t}) e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ . (jetzt  $k = (p, \vec{k})$  mit Polarisationsindex  $p$ )

Quantisierung: Klammern durch Operatoren  $a_k$  und  $a_k^\dagger$  ersetzen. Gibt letztlich z.B. für das elektrische Feld

$$\vec{E}^{(+)} = \sum_k \vec{e}_k \mathcal{E}_k e^{+i\vec{k}\vec{r}} a, \quad \vec{E}^{(-)} = \sum_k \vec{e}_k \mathcal{E}_k e^{-i\vec{k}\vec{r}} a^\dagger, \quad \mathcal{E}_k = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \quad \text{und} \quad H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k. \quad (7.18)$$

### 7.1.6 Intensität

Beschränken uns ab jetzt wieder auf eine Mode, z.B. des freien Raumes. Lassen Modenindex weg.

Klassisch war die Intensität (s. voriges Kapitel)  $I = 2c\varepsilon_0 E^{(-)} E^{(+)}$ . Das bleibt so,

$$\text{Intensität: } I = 2c\varepsilon_0 E^{(-)} E^{(+)} = 2c\varepsilon_0 \mathcal{E}^2 a^\dagger a = \frac{c \hbar\omega}{V} a^\dagger a = c \cdot \hbar\omega \cdot \frac{a^\dagger a}{V}. \quad (7.19)$$

Interpretation: letzter Term = Photonenzahl/Volumen = Photonendichte, dies mal Energie pro Photon gibt Energiedichte, dies mal Lichtgeschwindigkeit gibt Energieflußdichte.

Erwartungswert bei scharfer Photonenzahl  $N$ :  $\bar{I} = \hbar\omega cN/V$ .

Zustände mit scharfer Photonenzahl besitzen makroskopische Intensität.

allgemeiner: Photonenensemble  $\leftrightarrow$  Quantenstatistik:

statistischer Operator:  $\rho$  mit  $\text{Sp}\rho = 1$ .

Dichtematrix:  $\rho_{NN'} = \langle N | \rho | N' \rangle$  mit  $\sum_N \rho_{NN} = 1$

Wahrscheinlichkeit  $N$  Photonen zu messen:  $P(N) = \rho_{NN}$ .

Mittelwerte beliebiger Observable  $A$ :

$$\langle A \rangle = \text{Sp}(\rho \cdot A) = \sum_{N,N'} \rho_{NN'} \langle N' | A | N \rangle. \quad (7.20)$$

## 7.2 Kohärenzfunktionen

Die Kohärenzfunktionen für klassisches Licht hatten wir in Kap. 6 diskutiert.

Quantenoptisch: Felder durch Operatoren ersetzen,<sup>14</sup> Mittelung  $\langle \dots \rangle = \text{Sp}(\rho \dots)$ .

Wir beschränken uns auf 1 Mode, ohne wesentliche Wechselwirkung mit Restwelt.

Dann  $E^{(-)}(t) \sim a^\dagger(t) = e^{i\omega t} a^\dagger$ ,  $E^{(+)} \sim a(t) = e^{-i\omega t} a$ .

$$\text{Kohärenzfaktor 1.Ordnung: } g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle a^\dagger a(\tau) \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle} = e^{-i\omega\tau}. \quad \begin{aligned} &\text{Das bedeutet: ein Einmodenfeld ist} \\ &\text{monochromatisch und in 1.Ordnung} \\ &\text{voll kohärent – unabhängig vom} \\ &\text{Quantenzustand } \rho. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Interessanter ist der Kohärenzfaktor 2.Ordnung:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a^\dagger(\tau) a^\dagger a a(\tau) \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} = \frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} = \frac{\langle (a^\dagger a)^2 \rangle - \langle a^\dagger a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} = \frac{\langle N^2 \rangle}{\langle N \rangle^2} - \frac{1}{\langle N \rangle}$$

Oder, noch anders ausgedrückt:

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{\langle N \rangle^2} - \frac{1}{\langle N \rangle}$$

(7.22)

Für unser wechselwirkungsfreies Einmodenfeld ist das natürlich zeitlich konstant.<sup>15</sup>

<sup>14</sup>Dabei kommt es auf die Reihenfolge der Operatoren an. Bei der Detektion von Licht werden gewöhnlich Photonen vernichtet (Absorption). Deswegen müssen in den von uns betrachteten Fällen die Vernichtungsoperatoren rechts stehen. Auf eine detaillierte Begründung der Reihenfolge kann hier aus Zeitgründen nicht eingegangen werden.

<sup>15</sup>Man kann sich aber vorstellen, daß es langsam zeitlich variiert, wenn man dem Feld Leistung zu- oder abführt. Wir werden uns deshalb folgend auf  $\tau = 0$  konzentrieren, wo diese Prozesse noch keine Rolle spielen.

Aber der Wert weicht von 1 nach oben (Richtung Photonenklumpung) durch das relative Schwankungsquadrat der Photonenzahl ab und nach unten (Richtung Antiklumpung) durch den letzten Term, der insbesondere bei kleinen Photonenzahlen merklich beitragen kann.

Wir werden das nun für verschiedene Quantenzustände monochromatischen einmodigen Lichtes genauer betrachten.

### 7.3 Thermisches Licht

Maxwellgleichungen linear  $\Rightarrow$  keine Wechselwirkung der Photonen untereinander, thermodynamisches Gleichgewicht durch sehr schwache Wechselwirkung mit Resonatorwand (Absorptions- u. Emissionsprozesse)  $\Rightarrow$  ideales Gas mit variabler Teilchenzahl  $\Rightarrow \mu = 0$ :

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Sp}(e^{-\beta H})} \quad (\beta = \frac{1}{kT}) \quad (7.23)$$

$$\text{Dichtematrix: } \rho_{NN'} = \frac{e^{-\beta \hbar \omega (N+1/2)} \delta_{NN'}}{\sum_N e^{-\beta \hbar \omega (N+1/2)}} = \left(1 - e^{-\beta \hbar \omega}\right) e^{-\beta \hbar \omega N} \delta_{NN'} = P(N) \delta_{NN'} \quad (7.24)$$

$$\Rightarrow \langle a \rangle = \sum_N P(N) \langle N | a | N \rangle = 0 \Rightarrow \text{kein makroskopisches Feld!} \quad (7.25)$$

Wahrscheinlichkeit  $N$  Photonen zu finden:

$$\boxed{P(N) = (1 - e^{-x}) e^{-Nx}} \quad (x = \beta \hbar \omega = \frac{\hbar \omega}{kT}) \quad (7.26)$$

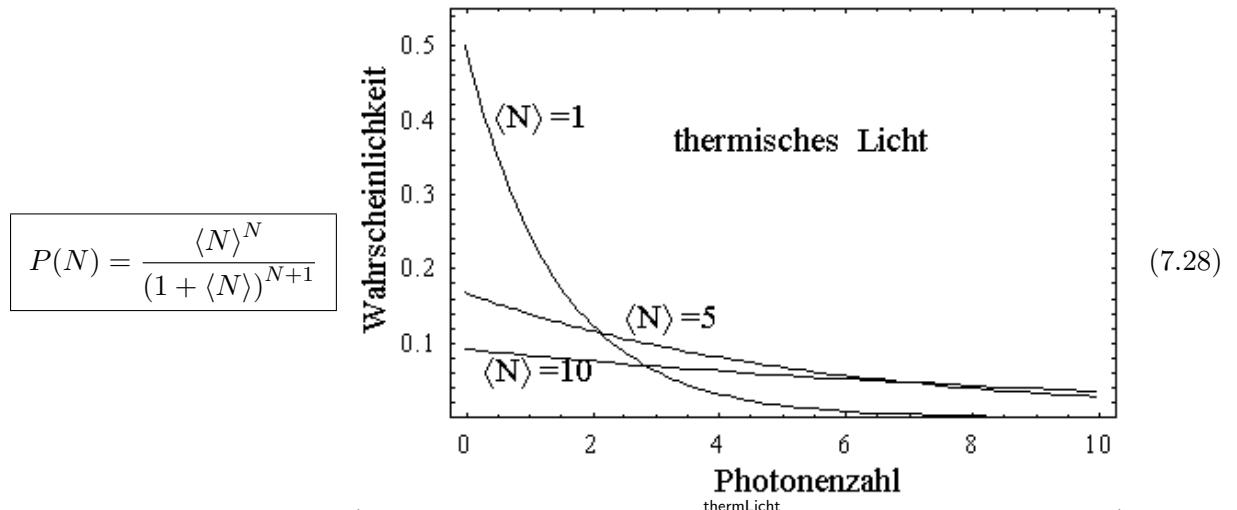
mittlere Photonenzahl:

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \sum_N N P(N) = (1 - e^{-x}) \left(-\frac{d}{dx}\right) \sum_N e^{-Nx} = (1 - e^{-x}) \left(-\frac{d}{dx}\right) (1 - e^{-x})^{-1} \\ &= (1 - e^{-x}) \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1} \end{aligned}$$

Das ist die bekannte

$$\boxed{\text{Planck-Formel} \quad \langle N \rangle = \frac{1}{e^x - 1}} \quad x = \frac{\hbar \omega}{kT} \quad (7.27)$$

Damit  $e^x = 1 + 1/\langle N \rangle$ , also



Grünes Licht:  $\hbar \omega \approx 2.5 \text{ eV}$ ,  $kT \approx 25 \text{ meV}$  bei Raumtemperatur  $\Rightarrow \langle N \rangle \approx e^{-x} \ll 1$ .

Klassischer Grenzfall:  $\hbar\omega \ll kT$  (Mikrowellen)  $\Rightarrow \langle N \rangle \approx 1/x \gg 1$ :

$$P(N) \xrightarrow{\langle N \rangle \rightarrow \infty} \frac{1}{\langle N \rangle} \left( \frac{1}{\underbrace{(1 + 1/\langle N \rangle)^{\langle N \rangle}}_e} \right)^{N/\langle N \rangle} = \frac{1}{\langle N \rangle} e^{-N/\langle N \rangle}. \quad (7.29)$$

- der wahrscheinlichste Wert ist hier nicht  $\langle N \rangle$ , sondern  $N = 0$ .
- bei höheren  $\langle N \rangle$  treten 0,1,2,... Photonen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf, also Klumpen.

Zurück zum allgemeinen thermischen Licht:

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle &= \sum_N N^2 P(N) = (1 - e^{-x}) \partial_x^2 (1 - e^{-x})^{-1} = (1 - e^{-x}) \partial_x [-e^{-x} (1 - e^{-x})^{-2}] \\ &= (1 - e^{-x}) [e^{-x} (1 - e^{-x})^{-2} + 2e^{-2x} (1 - e^{-x})^{-3}] \\ &= e^{-x} (1 - e^{-x})^{-1} + 2(e^{-x} (1 - e^{-x})^{-1})^2 = \langle N \rangle + 2 \langle N \rangle^2 \end{aligned} \quad (7.30)$$

Also mit Blick auf (7.22)

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\langle (\Delta N)^2 \rangle}{\langle N \rangle^2} - \frac{1}{\langle N \rangle} = 1 + \frac{\langle N \rangle + 1}{\langle N \rangle} - \frac{1}{\langle N \rangle} = 2 \quad (7.31)$$

Thermisches Licht klumpt, dies erklärt das Hanbury-Brown & Twiss – Experiment mit thermischen Licht.

## 7.4 Scharfe Photonenzahl

natürlicher Zustand der Theorie,  $P(N) = \delta_{NN_0} \Rightarrow$

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{N_0^2 - N_0^2}{N_0^2} - \frac{1}{N_0} = 1 - \frac{1}{N_0} \quad (7.32)$$

Das ist der Fall der Antiklumping (anti bunching), die Photonen "halten Abstand", Quanteneffekt.

Im Experiment ist scharfe Photonenzahl nicht erzeugbar.

Nachweis von Antibunching an einzelnen Atomen und Molekülen: nach Abstrahlung muß das Atom erst erneut angeregt werden  $\Rightarrow$  Totzeit  $\Rightarrow$  Wahrscheinlichkeit für gleichzeitige Registrierung zweier Photonen sehr gering.

Die Abbildung zeigt ein Beispiel aus der Halbleiterphysik.

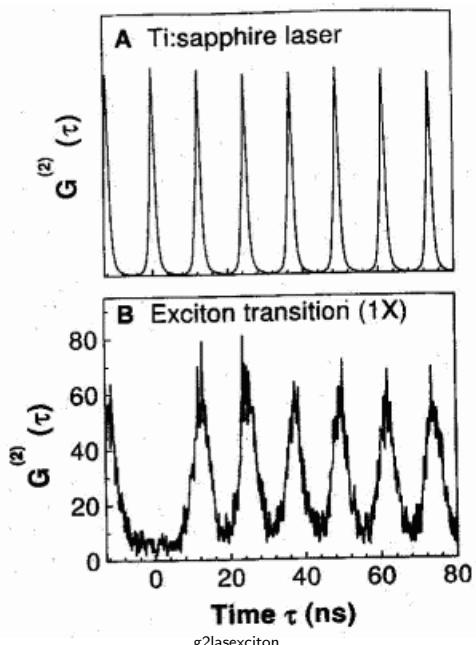
Ein Quantenpunkt (künstliches Atom) wird mit einem mode-locked Ti-Saphir-Laser angeregt.

Der Laser sendet eine periodische Pulsfolge aus, die sich im gemessenen  $G^{(2)}(\tau)$  wiederholt.

Es wird das  $G^{(2)}(\tau)$  der vom Quantenpunkt emittierten Strahlung analysiert.

Bei  $\tau = 0$  fehlt das Signal, weil vom Quantenpunkt nicht gleichzeitig 2 Photonen (gleicher Polarisation) emittiert werden können.

Bei höheren  $\tau$  gibt es wieder ein Signal, entsprechend der Emission je eines Photons in verschiedenen Anregungsperioden.



## 7.5 Kohärente Photonenzustände

Das sind reine Eigenzustände des Vernichtungsoperators  $a$  (d.h. von  $E^{(+)}$  u.  $B^{(+)}$ ).

$$\text{Ansatz in Besetzungszahldarstellung: } |\alpha\rangle = \sum_N c_N |N\rangle \quad (7.33)$$

Die Koeffizienten so zu bestimmen, daß  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ , wobei  $\alpha$  komplexe Zahl (Eigenwert):

$$a|\alpha\rangle = \sum_{N=1}^{\infty} c_N \sqrt{N} |N-1\rangle \stackrel{!}{=} \alpha|\alpha\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} c_N \alpha |N\rangle = \sum_{N=1}^{\infty} c_{N-1} \alpha |N-1\rangle$$

Koeffizientenvergleich:  $c_N = c_{N-1} \cdot \alpha / \sqrt{N} \Rightarrow c_N = c_0 \alpha^N / \sqrt{N!}$

Norm:  $1 \stackrel{!}{=} \langle \alpha | \alpha \rangle = |c_0|^2 \sum_N (|\alpha|^2)^N / N! = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2} \Rightarrow c_0 = e^{-|\alpha|^2/2}$

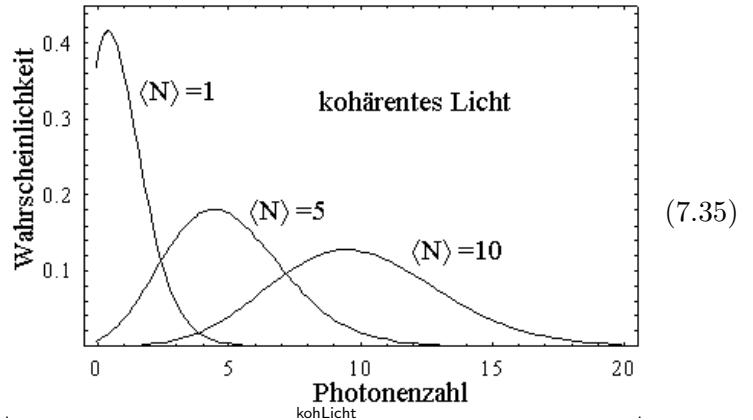
Photonenzahl:  $\langle N \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = |\alpha|^2$ , also

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_N \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle \quad \text{Glauber-Zustände} \quad (7.34)$$

Solche Zustände werden in guter Näherung durch Laserlicht realisiert.

Photonenzahlverteilung:

$$P(N) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2N}}{N!} = e^{-\langle N \rangle} \frac{\langle N \rangle^N}{N!}$$



Das ist eine Poisson-Verteilung, die Photonen sind statistisch unkorreliert.

Nun zum Kohärenzfaktor 2. Ordnung.

Zunächst  $\langle N^2 \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a a^\dagger a | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \langle \alpha | a a^\dagger | \alpha \rangle = \langle N \rangle \langle 1 + N \rangle = \langle N \rangle (1 + \langle N \rangle)$ . Damit

$$\boxed{\langle \Delta N^2 \rangle = \langle N \rangle} \quad \begin{aligned} &\text{Das Schwankungsquadrat der Photonenzahl ist gleich ihrem Mittelwert!} \\ &\text{Die relative Schwankung der Photonenzahl geht damit für } \langle N \rangle \rightarrow \infty \text{ wie} \\ &1/\sqrt{\langle N \rangle} \text{ gegen null.} \end{aligned} \quad (7.36)$$

Ergo, weiterhin

$$\boxed{g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\langle N \rangle}{\langle N \rangle^2} - \frac{1}{\langle N \rangle} \equiv 1} \quad (7.37)$$

**Feldstärkeschwankungen**

In kohärenen Zuständen verschwinden die Schwankungen der positiven Frequenzanteile der Feldstärken<sup>16</sup>.

Gleichtes gilt für die negativen Frequenzanteile<sup>17</sup>.

Die aus diesen zusammengesetzten Gesamtfeldern  $E \sim q = (a^\dagger + a)$  und  $B \sim p = i(a^\dagger - a)$  schwanken aber:

$$\frac{\langle \Delta E^2 \rangle}{\langle \Delta B^2 \rangle} \sim \pm \left\{ \langle (a^\dagger \pm a)^2 \rangle - \langle (a^\dagger \pm a) \rangle^2 \right\} = \langle [a, a^\dagger] \rangle = 1 \quad (7.38)$$

In kohärenen Zuständen schwanken beide Felder gleich stark (in gleichen Einheiten).

Man hat gequetschtes Licht, wenn eine Feldsorte weniger schwankt als die andere.

## 7.6 Gequetschtes Licht

Quantenmechanik, Unbestimmtheitsrelation für 2 beliebige Observablen  $A$  u.  $B$ :

$$\langle \Delta A^2 \rangle \langle \Delta B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2. \quad (7.39)$$

Felder (bis auf unwesentliche Vorfaktoren, die ich im folgenden weglasse)  $E = a + a^\dagger$ ,  $B = (a - a^\dagger)/i$ , also

$$[E, B] = -i[a + a^\dagger, a - a^\dagger] = -i(-[a, a^\dagger] + [a^\dagger, a]) = 2i, \text{ also} \quad \boxed{\langle \Delta E^2 \rangle \langle \Delta B^2 \rangle \geq 1} \quad (7.40)$$

Klassische Vorstellung: beide Felder schwanken identisch.

Quantenoptik: Schwankung eines Feldes kann auf Kosten des anderen klein gemacht werden.<sup>18</sup>

Gequetschtes Licht (squeezed light):	Felder mit $\langle \Delta E^2 \rangle < 1$ oder $\langle \Delta B^2 \rangle < 1$ .
--------------------------------------	---

Hat eminente Bedeutung z.B. für Messung Gravitationswellen oder Kommunikation.

Schauen wir uns die Schwankungen einzeln an:

$$\frac{\langle \Delta E^2 \rangle}{\langle \Delta B^2 \rangle} = \langle a^\dagger a + aa^\dagger \rangle - 2|\langle a \rangle|^2 \pm \left( \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2 + h.c. \right) \quad (7.41)$$

Aha: beide Schwankungen unterscheiden sich nur durch den Term in der runden Klammer.

Quetschen erfordert  $\langle a^2 \rangle \neq \langle a \rangle^2$ .

Bei Fock-Zuständen  $|N\rangle$  ist  $\langle a^2 \rangle = \langle a \rangle = 0$ .

Bei Glauber-Zuständen  $|\alpha^2\rangle = |\alpha\rangle^2 = \alpha^2$ .

Beide sind also nicht gequetscht.

Modellzustand für gequetschtes Licht:

$$|\beta\rangle = S(\beta)|0\rangle \quad \text{"Quetschoperator": } S(\beta) = e^{\beta A}, \quad \beta \text{ reell}, \quad A = a^2 - a^\dagger a^2 \quad (7.42)$$

Anmerkung: Operatorfunktionen sind durch ihre Taylorreihen definiert, z.B.  $e^A = \sum_n A^n/n!$ .

<sup>16</sup>weil sie Eigenzustände dieser Operatoren sind,  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ .

<sup>17</sup>weil  $\langle \alpha | a^\dagger = \alpha^* \langle \alpha |$ .

<sup>18</sup>Der Einfachheit betrachten wir nur Felder zu gleichen Zeiten. Wegen  $E(t) = ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}$  kommutieren die  $E$ -Feldoperatoren zu verschiedenen  $t$  nicht (analog  $B$ ). Insbesondere ist  $E(t)$  bei  $\omega t = \pi/2$  gleich  $B(0)$  (bis auf Zahlenfaktor). Siehe z.B. Rodney Loudon, The Quantum Theory of Light, chapter 5, Oxford Science Publications.

Der Quetschoperator ist unitär:  $S(\beta)^\dagger = e^{\beta A^\dagger} = e^{-\beta A} \Rightarrow S(\beta)^\dagger S(\beta) = 1$ .

Diese gequetschten Zustände sind nicht kohärent, weil wegen ungerader Anzahl von  $a$  bzw.  $a^\dagger$

$$\langle \beta | a | \beta \rangle = \langle \beta | a^\dagger | \beta \rangle = 0. \quad (7.43)$$

Damit bleibt für die Schwankungsquadrate zunächst

$$\frac{\langle \Delta E^2 \rangle}{\langle \Delta B^2 \rangle} = \gamma \pm \sigma \quad \text{mit} \quad \gamma = 1 + 2\langle \beta | a^\dagger a | \beta \rangle \quad \text{und} \quad \sigma = \langle \beta | a^2 | \beta \rangle + h.c.$$

Für die Berechnung der beiden Erwartungswerte ist es nützlich, sie zunächst nach  $\beta$  abzuleiten:

$$\partial_\beta \gamma \stackrel{(7.42)}{=} 2\partial_\beta \langle 0 | e^{-\beta A} a^\dagger a e^{\beta A} | 0 \rangle = 2 \langle \beta | [a^\dagger a, A] | \beta \rangle. \quad \text{analog} \quad \partial_\beta \sigma = \langle \beta | [a^2, A] | \beta \rangle + h.c.$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} [a^\dagger a, A] &= [a^\dagger a, a^2] - [a^\dagger a, a^{\dagger 2}] & \left| \begin{array}{lcl} [a^\dagger a, a^2] & = & a^\dagger a^3 - a a^\dagger a^2 + a a^\dagger a^2 - a^2 a^\dagger a \\ & = & [a^\dagger, a] a^2 + a [a^\dagger, a] a = -2a^2 \\ [a^\dagger a, a^{\dagger 2}] & = & -[a^\dagger a, a^2]^\dagger = 2a^\dagger \end{array} \right. \\ &= -2(a^2 + a^{\dagger 2}). \\ [a^2, A] &= -[a^2, a^{\dagger 2}] = [a^{\dagger 2}, a] a + a [a^{\dagger 2}, a] = -2(a^\dagger a + a a^\dagger) \end{aligned}$$

Also, dies in die Ableitungen eingesetzt und  $\sigma(0) = 0, \gamma(0) = 1$  beachtet:

$$\begin{aligned} \partial_\beta \gamma &= -4\sigma & \gamma(\beta) &= \cosh(-4\beta) \\ \partial_\beta \sigma &= -4\gamma & \sigma(\beta) &= \sinh(-4\beta) \end{aligned}$$

Dies in die Schwankungsquadrate der Felder eingesetzt ergibt endgültig

$$\boxed{\langle \Delta E^2 \rangle = e^{-4\beta} \quad \& \quad \langle \Delta B^2 \rangle = e^{+4\beta}} \quad (7.44)$$

Für  $\beta > 0$  wird also die Schwankung des  $E$ -Feldes unter 1 gedrückt.

Die Schwankung des  $B$ -Feldes geht dabei entsprechend hoch, das Produkt bleibt 1.

Für  $\beta < 0$  ist das umgekehrt.

Interessant ist noch der Zusammenhang mit der Photonzahl:

$$\gamma = 1 + 2 \langle N \rangle = \cosh(4\beta) \Rightarrow \boxed{\langle N \rangle = \frac{1}{2}(\cosh(4\beta) - 1) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{für } \beta \rightarrow 0 \\ \frac{1}{4}e^{4\beta} & \text{für } \beta \rightarrow \infty \end{cases}} \quad (7.45)$$

Für die üblicherweise großen  $\langle N \rangle$  ergibt das

$$\boxed{\langle \Delta E^2 \rangle = \frac{1}{4 \langle N \rangle} \quad \& \quad \langle \Delta B^2 \rangle = 4 \langle N \rangle} \quad (7.46)$$

Erste experimentelle Realisierung 1985, Vier-Wellen-Mischen (2-Photonenprozess), jedoch große Schwierigkeiten bei praktischer Anwendung, weil WW mit Atomen den 2-Photonenzustand zerstört.

Nichtsdestoweniger, wenn man im web stöbert, merkt man dass dies auch experimentell ein sehr aktives Forschungsfeld ist. So findet man z.B. dieses →

Also, selbst Lebewesen nutzen gequetschtes Licht! Wen es interessiert, der lese nach.

In Physics Letters A, 293 (1-2) (2002), pp 98-102

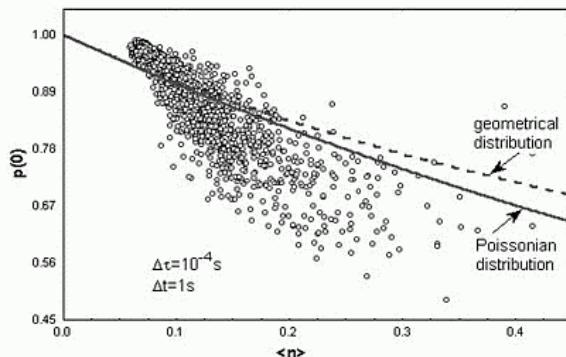
INTERNATIONAL INSTITUTE OF BIOPHYSICS

#### Evidence of Non-Classical (Squeezed) Light in Biological Systems

F.A. Popp<sup>1)</sup>, J.J. Chang<sup>1,2)</sup>, A. Herzog<sup>1)</sup>, Z. Yan<sup>1)</sup> and Y. Yan<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> International Institute of Biophysics (IIB), Raketenstation, Kapellener Straße o.N., D-41472 Neuss

<sup>2)</sup> Institute of Biophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing



Figs. 8a and 8b demonstrate that spontaneous emission of biological systems may also originate from squeezed states. The example concerns 35 000 *Gonyaulax Polyedra* (Dinoflagellates) at room temperature, kept in sea water in a 10 ml quartz cuvette.  
biosqueezed2

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Wellen und Strahlen (Eikonal)</b>	<b>3</b>
1.1 Maxwell'sche Gleichungen im Medium . . . . .	3
1.2 Repräsentative Wellenfelder . . . . .	4
1.2.1 Ebene Welle . . . . .	4
1.2.2 Kugelwelle . . . . .	4
1.2.3 Gauß'sche Bündel . . . . .	4
1.2.4 Weitere repräsentative Wellenfelder . . . . .	8
1.3 Wellenoptik einfacher Elemente . . . . .	9
1.3.1 Beispiel: dünne Linse . . . . .	9
1.3.2 Wirkung der Linse auf ein Gauss-Bündel . . . . .	9
1.3.3 Strahlenoptischer Grenzfall . . . . .	11
1.3.4 Gauss-Bündel durch beliebiges paraxiales optisches Element . . . . .	11
1.4 Inhomogene Medien (GRIN) – Grenzfall Strahlenoptik . . . . .	12
1.4.1 Wellenbild: Helmholtz-Gleichung für GRIN . . . . .	12
1.4.2 Übergang zur geometrischen bzw. Strahlenoptik (Eikonal) . . . . .	12
1.4.3 Strahlengleichung . . . . .	13
1.4.4 Paraxiale Näherung der Strahlengleichung . . . . .	13
1.4.5 Einige Beispiele . . . . .	13
1.4.6 Ergänzung: Beziehung zu Fermat-Prinzip . . . . .	14
<b>2 Fourier-Optik</b>	<b>15</b>
2.1 Prinzipien . . . . .	15
2.2 Vereinfachungen und Näherungen . . . . .	17
2.3 Fernfeld: Fraunhofer-Näherung . . . . .	19
2.4 Fouriertrafo mit Linsen und Blenden . . . . .	20
2.5 Holografie . . . . .	22
2.5.1 Vereinfachte Grundidee . . . . .	22
2.5.2 Holografische Kodierung . . . . .	23
2.5.3 Hologram einer schräg einfallenden ebenen Welle . . . . .	24
2.5.4 Hologramm eines punktförmigen Objekts . . . . .	24
2.5.5 Aufnahme von Hologrammen . . . . .	25
<b>3 Geführte Wellen</b>	<b>26</b>
3.1 Der symmetrische planare Schicht-Wellenleiter . . . . .	26
3.2 Weitere Geometrien . . . . .	31
3.2.1 Asymmetrischer planarer Wellenleiter . . . . .	31

3.2.2	Gradierte planare Profile . . . . .	32
3.2.3	Streifenwellenleiter . . . . .	32
3.2.4	Fasern . . . . .	32
3.3	Einkopplung von Licht in Wellenleiter . . . . .	34
3.4	Gekoppelte Wellenleiter . . . . .	34
3.4.1	Motivation . . . . .	34
3.4.2	Moden schwach gekoppelter Wellenleiter . . . . .	35
3.4.3	Konsequenzen für die Wellenleitung . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Photonische Kristalle</b>	<b>37</b>
4.1	Allgemeine Charakterisierung . . . . .	37
4.2	1D: Wellenleiter mit verteilter Rückkopplung (Distributed Feedback, DFB) . . . . .	38
4.2.1	Grundprinzip (qualitativ) . . . . .	38
4.2.2	Coupled-Wave Gleichungen . . . . .	38
4.2.3	Lösungen der Coupled-Wave Gleichungen . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Resonatoren</b>	<b>41</b>
5.1	Eindimensionaler Fabry-Perot Resonator . . . . .	41
5.2	Resonator mit sphärischen Spiegeln . . . . .	45
5.3	Dreidimensionale Resonatoren . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Optische Kohärenz</b>	<b>47</b>
6.1	Intensität . . . . .	47
6.2	Frequenzspektrum . . . . .	48
6.3	Pulsbreiten . . . . .	49
6.4	Interferenz: Kohärenz 1. Ordnung . . . . .	49
6.4.1	Zeitliche Kohärenz . . . . .	49
6.4.2	Räumliche Kohärenz . . . . .	52
6.5	Intensitäts- bzw. Photonenstatistik: Kohärenz 2. Ordnung . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Quantenoptik</b>	<b>54</b>
7.1	Photonen . . . . .	54
7.1.1	Klassische Lichtmode als idealer harmonischer Oszillat	54
7.1.2	Quantisieren der Resonatormode . . . . .	55
7.1.3	Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren . . . . .	56
7.1.4	Verallgemeinerung auf 3D-Resonator mit mehreren Moden . . . . .	57
7.1.5	Verallgemeinerung auf freie Felder . . . . .	57
7.1.6	Intensität . . . . .	58

7.2	Kohärenzfunktionen . . . . .	58
7.3	Thermisches Licht . . . . .	60
7.4	Scharfe Photonenzahl . . . . .	61
7.5	Kohärente Photonenzustände . . . . .	62
7.6	Gequetschtes Licht . . . . .	63