

OPTIK / PHOTONIK II

Nichtlineare Optik und Laserphysik
– Sommersemester 2005 –

von

Hans-Jürgen Wünsche

Institut für Physik der Humboldt-Universität zu Berlin
Newtonstr. 15

Tel: 2093 7649
email: Wünsche: ede@physik.hu-berlin.de

web address: photonik.physik.hu-berlin.de

6. Juli 2005

Worwort

Sinn der Skripte: dem Studierenden eine Kontrolle seiner Mitschriften zu ermöglichen. Ich werde nach jeder Vorlesung den behandelten Stoff als entsprechendes Teilskript ins Netz stellen. Die Skripte basiert auf Vorlesungen Photonik II, die von Prof. F. Henneberger in den letzten Jahren des vergangenen Jahrhunderts entwickelt und nach 2001 von mir gehalten wurden. Der Inhalt variiert von Jahr zu Jahr etwas, die alten Skripte stehen auch im Netz.

Die Vorlesung behandelt vorwiegend nichtlinear optische Effekte. In einem nichtlinearen optischen Element führt die Überlagerung zweier Wellen zu mehr als der schlichten Addition ihrer Amplituden. Damit kann man vielfältige interessante und praktisch bedeutsame Effekte erzeugen. Zum Beispiel können eigentlich undurchsichtige Medien plötzlich durchsichtig werden (induzierte Transparenz), oder der Lichtstrahl schnürt sich von selbst auf einen extrem dünnen Kanal ein (Selbstfokussierung), oder es breiten sich nur Lichtpulse bestimmter Energie und Form verlustfrei aus (Solitonen), oder es entstehen zusätzlich neue Wellen, deren Wellenänge verschieden ist von denen der Primärwellen (Frequenzwandlung), oder es kommt hochkohärentes intensives Licht heraus, ohne daß man welches einstrahlt (Laser).

Solche nichtlinear optischen Effekte werden durch die Wechselwirkung Licht-Materie verursacht. Licht allein verhält sich linear. Photonen wechselwirken untereinander nicht. Sie können aber auf anderer Materie einwirken, die ihrerseits auf die Photonen zurückwirkt. Dadurch können die Nichtlinearitäten entstehen. Die Elemente dieses Wechselspiels werden im ersten Kapitel für ein möglichst einfaches Modellsystem erarbeitet. Resultat ist ein fundamentales Gleichungssystem, die Maxwell-Bloch-Gleichungen. Darauf aufbauend werden dann in den Folgekapiteln einige wichtige nichtlinear-optische Szenarien behandelt.

Die vorgesehene Gliederung ist wie in Photonik II von 2004:

- **Wechselwirkung von Atomen und Photonen**
Feld – Polarisation – Inversion, Maxwell-Bloch-Gleichungen, Phasen- und Energierelaxation
- **Inkohärentes Regime – Nichtlineare Optik**
Intensitätsabhängige Absorption und Brechung, Optische Bistabilität, Selbstfokussierung, Mehr-Wellen-Prozesse
- **Optischer Verstärker**
Gewinn und Gewinnsättigung, 3- und 4-Niveau-Verstärker, Lasermaterialien
- **Laser**
Resonator und Photonenlebensdauer, Schwelle, Relaxationsoszillationen, nichtlineare Dynamik, gepulste Laser
- **Kohärente Effekte – Ultrakurze Impulse**
Optische Nutation, freier Induktionszerfall, Photon-Echo, Impulsausbreitung

Die Vorlesung kann auch ohne Teil I verstanden werden, natürlich geht es mit Vorbildung leichter.

Es gibt viele Bücher zum Thema, die Vorlesung ist an keines enger gekoppelt, zusätzlich zur Literatur von Teil I möchte ich (HJW) empfehlen:

Literatur

[1] Hermann Haken, "Licht und Materie", Bände I und II, Wissenschaftsverlag

Inhaltsverzeichnis

1 Wechselwirkung von Atomen und Photonen	5
1.1 Modellsystem	5
1.2 Induzierte Polarisation	6
1.3 Lichtinduzierte Änderung der Besetzungszahlen	8
1.4 Lichtfeld	9
1.5 Maxwell-Bloch-Gleichungen	9
1.6 Ergänzung zu den Relaxationszeiten	9
2 Inkohärentes Regime	12
2.1 Begriffsbildung	12
2.2 Adiabatische Abkopplung der Polarisation	12
2.3 Konsequenzen für Feldgleichung (1.18)	12
2.3.1 Absorptionskoeffizient	13
2.3.2 Induzierter Brechungsindex	13
2.4 Konsequenzen für Inversionsgleichung (1.17)	13

2.4.1 Quasi-stationärer Fall	14
2.4.2 Nichtstationärer Fall	16
2.5 "Power Broadening"	17
2.6 Nichtlinearer Brechungsindex & Lichtgeschwindigkeit	17
2.7 Nichtlineares Absorptionsgesetz	18
2.8 Anwendungen	19
2.8.1 Sättigbare Absorber	19
2.8.2 Optische Bistabilität	19
2.8.3 Cavity Solitons	21
2.8.4 Inhomogene Verbreiterung	21
2.8.5 Selbstfokussierung (oder -defokussierung)	22
2.8.6 Vier-Wellen-Mischen (FWM = Four Wave Mixing)	23
2.9 Strahlende Lebensdauer	24
2.9.1 Zusammenhang mit Absorptionsquerschnitt	24
2.9.2 Strahlende Lebensdauer Freiraum	26
2.9.3 Strahlende Lebensdauer im Resonator	26
3 Der optische Verstärker	27
3.1 Grundlegende Charakteristika	27
3.2 Nichtlinearität und Gewinnsättigung	29
3.3 Der inhomogen verbreiterte Verstärker	31
3.4 Optisches Pumpen	32
3.4.1 2-Niveau-Pumpschema	32
3.4.2 3-Niveau-Pumpschema	32
3.4.3 4-Niveau-Pumpschema	33
4 Der Laser	34
4.1 Einführung	34
4.2 Die Lasermoden	34
4.3 Modenabstand	37
4.4 Stationäres Regime: die Schwellenbedingung	38
4.5 Die Bilanzgleichungen (in Einmoden-Approximation)	39
4.6 Stationäres Regime: typische Kennlinie eines Lasers	39
4.7 Spektren im stationären Regime	40
4.7.1 Homogene Verbreiterung	40
4.7.2 Inhomogene Verbreiterung	41
4.8 Relaxationsoszillationen (Laser über der Schwelle)	41
4.9 Erzeugung kurzer Pulse	43
4.10 Laserklassen	43
4.11 Lasermaterialien und -typen	46

5 Kohärente Effekte – Ultrakurze Impulse	50
5.1 Material-Gleichungen im kohärenten Regime	50
5.2 Resonante Kopplung $\omega = \Omega$	51
6 Photonenecho	56
6.1 Was ist das?	56
6.2 Vorbetrachtung1: Auswirkung einer endlichen Resonanzverstimmung	57
6.3 Vorbetrachtung2: Auswirkung der inhomogenen Verbreiterung	57
6.4 Wirkung des $\pi/2$ -Pulses	58
6.5 Was passiert zwischen den Pulsen?	59
6.6 Wirkung des π -Pulses	59
6.7 Was passiert nach dem π -Puls?	59
7 Selbstinduzierte Transparenz	61
7.1 Beschreibung des Phänomens	61
7.2 Theoretische Analyse der Pulsausbreitung in einer dicken Probe	62
7.2.1 Qualitative Analyse mit der Bloch-Kugel	62
7.2.2 Flächentheorem	62
7.2.3 Invariante Pulse	63
7.2.4 Rechnungen und Beweise	64
A Herleitung der inhomogenen Wellengleichung	66

1 Wechselwirkung von Atomen und Photonen

Wie im Vorwort angedeutet, können nichtlineare optische Effekte nur durch die Wechselwirkung zwischen Photonen und anderer Materie entstehen. Natürlich hängt das Ergebnis sehr von der Art der Materie ab. Wir werden mit einem einfachen Modellsystem für ein Gas beginnen, das von Licht durchstrahlt wird.

1.1 Modellsystem

Licht gehe durch Gas aus Atomen (bzw. Molekülen) der Dichte n_0 .

Vernachlässigbare Wechselwirkung zwischen den Atomen.

halbklassische Beschreibung:

- Licht als klassische elektromagn. Welle, nahezu monochromatisch mit Zentralfrequenz ω
- Atom quantenmechanisch, 1-Teilchen-Näherung, nur 2 resonante Energieniveaus E_1, E_2 wesentlich.

einzelnes Atom:

$$\text{Hamiltonian: } H = H_0 + H_w \quad \text{freies Atom + Wechselwirkung mit Licht} \quad (1.1)$$

$$\text{freies Atom: } H_0 \varphi_k(\vec{r}) = E_k \varphi_k(\vec{r}) \quad k = 1, 2 \quad (1.2)$$

$$\text{WW mit Licht: } H_w = -e \vec{r} \vec{E}(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dipolnäherung} \\ \text{Wellenlänge des Lichtes groß gegen die Ausdehnung} \\ \text{des Atoms, so daß die räumliche Variation des elek-} \\ \text{trischen Feldes } \vec{E} \text{ der Lichtwelle vernachlässigbar} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Licht: wirkt über elektrisches Feld.

Schnell oszillierend mit Grundfrequenz ω und langsam veränderlicher Amplitude $\mathcal{E}(t)$:

$$\vec{E}(t) = \operatorname{Re} \left(\vec{\mathcal{E}}(t) e^{-i\omega t} \right) = \underbrace{\frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}}(t) e^{-i\omega t}}_{\vec{E}^+(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}}^*(t) e^{+i\omega t}}_{\vec{E}^-(t)} \quad (\omega > 0) \quad \left| \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right| \ll \omega |\mathcal{E}| \quad (1.4)$$

zeitliche Entwicklung der atomaren Wellenfunktion

Wellenfunktion des 2-Niveau-Atoms bei Anwesenheit des Feldes allgemein

$$|\varphi\rangle = \sum_{k=1,2} c_k(t) e^{-i\omega_k t} |\varphi_k\rangle \quad (\omega_k = E_k/\hbar, \quad \text{schwache WW: } |c_k| \ll |\omega_k c_k|) \quad (1.5)$$

$|c_k|^2$: Wahrscheinlichkeit, Atom im Zustand k zu finden. Zeitliche Entwicklung durch Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi\rangle = (H_0 + H_w) |\varphi\rangle. \quad (1.6)$$

Einsetzen von (1.5) u. skalare Multiplikation von links mit $\langle \varphi_m | e^{i\omega_m t}$ gibt zunächst

$$i\hbar \dot{c}_m + E_m c_m = E_m c_m + \sum_k e^{i(\omega_k - \omega_m)t} H_w^{mk} c_k.$$

Dabei sind $H_w^{mk} = \langle \varphi_m | H_w | \varphi_k \rangle = -e \langle \varphi_m | \vec{r} | \varphi_k \rangle \cdot \vec{E}(t)$ die Matrixelemente des Wechselwirkungsoperators. Da die Diagonalelemente aus Symmetriegründen¹ verschwinden, bleibt letztlich

¹ $\varphi_m^2(\vec{r})$ inversionssymmetrisch, \vec{r} nicht

$i\hbar\dot{c}_1 = -\vec{d}_{12} \cdot \vec{E}(t) e^{-i\Omega t} c_2$
$i\hbar\dot{c}_2 = -\vec{d}_{12}^* \cdot \vec{E}(t) e^{+i\Omega t} c_1$

$\vec{d}_{12} = e \int dV \varphi_1^*(\vec{r}) \vec{r} \varphi_2(\vec{r})$

Dipolmatrixelement

$\Omega = \omega_2 - \omega_1$

Übergangsfrequenz

(1.7)

Lösung dieser Gleichungen in der Übung. Zur Vorbereitung Übungsaufgabe 1.

Übungsaufgabe 1:

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{c}_1 &= -\vec{d}_{12} \cdot \vec{E}(t) e^{-i\Omega t} c_2 \\ i\hbar\dot{c}_2 &= -\vec{d}_{12}^* \cdot \vec{E}(t) e^{+i\Omega t} c_1 \end{aligned}$$

für ein resonantes harmonische Lichtfeld ($\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ und $\omega = \omega_2 - \omega_1$) unter Vernachlässigung von Termen, die mit der doppelten Lichtfrequenz oszillieren (man nennt das "rotating wave approximation"). Anfangsbedingung sei $c_1 = 1, c_0 = 0$ (Atom im Grundzustand). Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeiten $|c_i(t)|^2$ und interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch. Unter welcher Bedingung war die Vernachlässigung der schnell oszillierenden Terme richtig?

Wir werden nun aus (1.7) Konsequenzen für die zeitliche Entwicklung folgender makroskopischen Größen ziehen:

- lichtinduzierte Polarisation des Gases und
- lichtinduzierte Änderung der Zahl der Atome im angeregten Zustand.

1.2 Induzierte Polarisation

Polarisation = Dipolmoment pro Volumeneinheit,

in unserem Gas w-freier Atome der Dichte n_0 mit gleichen Wellenfunktionen $|\varphi\rangle$ also

$$\vec{P} = n_0 \langle \varphi | -e\vec{r} | \varphi \rangle = \underbrace{-\vec{d}_{12} e^{-i\Omega t} c_1^* c_2 n_0}_{=: \vec{P}^+ \text{ für später merken!}} + h.c. = \vec{P}^+ + \vec{P}^- \quad (1.8)$$

Bewegungsgleichung für positiven Frequenzanteil:²

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}^+ &= -i\Omega \vec{P}^+ + n_0 \vec{d}_{12} e^{-i\Omega t} \frac{\partial}{\partial t} (c_1^* c_2) \\ \text{NR: } \frac{\partial}{\partial t} (c_1^* c_2) &= \dot{c}_1^* c_2 + c_1^* \dot{c}_2 \stackrel{(1.7)}{=} \frac{\vec{d}_{12} \vec{E}}{i\hbar} \{ |c_1|^2 - |c_2|^2 \} e^{i\Omega t} \\ &= -i\Omega \vec{P}^+ - \frac{i}{\hbar} \vec{d}_{12} (\vec{d}_{12}^* \cdot \vec{E}) \{ n_0 |c_1|^2 - n_0 |c_2|^2 \}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Das ist die Rohform der Bewegungsgleichung für die Polarisation.

Diskussion und Verfeinerung von Formel (1.9):

- Treibende Kraft

Der letzte Term ist proportional zur Lichtamplitude \vec{E} .

Er ist die treibende Kraft für die Polarisation.

²der negative ist einfach konjugiert komplex

- **Ergänzung durch Dämpfungsterm**

Ohne Licht ($\vec{E} = 0$) ist die Lösung $\vec{P}^+ = P_0 e^{-i\Omega t}$ mit beliebigem P_0 , d.h.
die makroskopischen Polarisation $\vec{P}^+ + \vec{P}^-$, schwingt harmonisch mit der Übergangs-Frequenz Ω .
Reale Polarisationen klingen ohne Lichtfeld allmählich mit der Zeit ab.
Wir erreichen das phänomenologisch, indem wir rechts einen Zerfalls-Term $-\vec{P}^+/\tau_p$ hinzufügen.
Die Abklingzeit τ_p der Polarisation nennen wir **Phasenrelaxationszeit**.

- **Quasiresonanz – rotating wave approximation**

Große nichtlineare Effekte erhält man vor allem im Resonanzfall $\omega \approx \Omega$.³
Es braucht dann nur der resonante Anteil der treibenden Kraft berücksichtigt zu werden,
also \vec{E}^+ in der Gleichung für \vec{P}^+ und \vec{E}^- in der für \vec{P}^- .
Das ist die sogenannte Näherung rotierender Phasen (rotating wave approximation).

- **Einführung mittlerer Dichten**

$n_1 = n_0 |c_1|^2$ = mittlere Dichte von Atomen im Grundzustand,
 $n_2 = n_0 |c_2|^2$ = mittlere Dichte von Atomen im angeregten Zustand.

- **Richtung der induzierten Polarisation**

In einem isotropen Gas ist die induzierte Polarisation parallel \vec{E} .
In (1.9) jedoch ist die treibende Kraft parallel zum atomaren Dipolmoment \vec{d}_{12} .
Die induzierte Polarisation damit auch.
Das ist nur scheinbar ein Widerspruch:
Damit $\vec{d}_{12} \neq 0$, muss wenigstens eines der beiden E-Niveaus entartet sein.⁴
Wir hätten also z.B. mehrere angeregte Zustände mitnehmen müssen.
Es sei denn, nur einer davon koppelt an das Licht,
also alle anderen haben ein Dipolmatrixelement senkrecht zu \vec{E} .
Dann ist das Dipolmatrixelement des restlichen aus Symmetriegründen parallel zu \vec{E} ,
damit auch die induzierte Polarisation.

Beispiel: Übergänge zwischen s und p-Zuständen. Letztere 3-fach entartet. Die 3 p-Zustände kann man so wählen, dass ihre Dipolmomente mit s orthogonal zueinander sind, zwei davon auch orthogonal zum elektrischen Feld der Lichtwelle, der dritte dann parallel dazu.

Wir können im 2-Niveau-Modell also setzen $\vec{d}_{12}(\vec{d}_{12}^* \cdot \vec{E}) = |\vec{d}_{12}|^2 \vec{E}$.

Die endgültige Bewegungsgleichung für die Polarisation lautet damit

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{P}^\pm = \left(\mp i\Omega - \frac{1}{\tau_p} \right) \vec{P}^\pm + \frac{|\vec{d}_{12}|^2}{i\hbar} (n_2 - n_1) \vec{E}^\pm \quad (1.10)$$

Schauen wir uns dies unter dem Gesichtspunkt "Nichtlinearität" an:

Bezüglich der Polarisation \vec{P} ist das eine lineare Gleichung.

Auch bezüglich des Lichtfeldes \vec{E} scheint das linear zu sein.

Jedoch, der Vorfaktor vor \vec{E} enthält die Dichtedifferenz $n_2 - n_1$.

Falls die n_k durch das Lichtfeld verändert werden, steckt hier eine Nichtlinearität.

Schauen wir uns also die zeitliche Entwicklung der Besetzungsgrößen näher an.

³Das periodische Lichtfeld verursacht natürlich erzwungene Schwingungen der Polarisationsoszillatoren aller nicht-verbotenen Übergänge in einem realen Atom. Ohne Resonanz bleiben die Amplituden klein und können durch lineare Suszeptibilitäten beschrieben werden. Ist das Licht aber resonant zu einem der vielen Übergänge, so kann dessen Polarisation riesig werden und sich nichtlinear verhalten. Genau dieser Übergang dominiert dann das Geschehen, es reicht, nur ihn zu betrachten. Insofern ist unser 2-Niveau-Modell ohnehin nur bei resonanter Einstrahlung ein gutes Modell für das Verhalten der realen Vielniveau-Atome.

⁴sonst sind beide Wellenfunktionen kugelsymmetrisch und das Matrixelement verschwindet.

1.3 Lichtinduzierte Änderung der Besetzungszahlen

Für die zeitliche Entwicklung der Dichten ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} n_2 &= n_0 \{ c_2^* c_2 + c_2^* \dot{c}_2 \} = n_0 \dot{c}_2^* c_2 + h.c. \\
 &\stackrel{(1.7)}{=} \frac{1}{i\hbar} \vec{E} n_0 \vec{d}_{12} e^{-i\Omega t} c_1^* c_2 + h.c. = \frac{1}{i\hbar} \vec{E} \vec{P}^+ + h.c. \\
 &= \frac{1}{i\hbar} (\vec{E}^+ + \vec{E}^-) \vec{P}^+ + h.c. = \frac{1}{i\hbar} (\vec{E}^+ \vec{P}^+ + \vec{E}^- \vec{P}^+) + h.c. \\
 &\text{Bei Integration über Zeiten groß gegen die Lichtperiode ist der Beitrag des ersten Terms} \\
 &\sim (\Omega + \omega)^{-1}, \text{ der des zweiten } \sim (\Omega - \omega)^{-1}. \text{ Im Resonanzfall wird der zweite groß und} \\
 &\text{der erste dagegen vernachlässigbar.} \\
 &= \frac{1}{i\hbar} \vec{E}^- \vec{P}^+ + h.c. = \frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} \vec{E}^- \vec{P}^+. \tag{1.11}
 \end{aligned}$$

Diskussion und Verfeinerung:

- **Vergleich mit klassischer E-Dynamik**

Hier ist $\bar{u} = \langle \vec{E} \partial_t \vec{P} \rangle$ die Energie, die im Zeitmittel vom Feld an das Medium abgegeben wird. Bei harmonischer Polarisation gilt $\partial_t \vec{P} = -i\Omega \vec{P}^+ + h.c.$, also

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= -i\Omega \langle \vec{E} \vec{P}^+ \rangle + h.c. \stackrel{\substack{\text{Mittelung lässt nur reso-} \\ \text{nanten Term übrig}}}{=} -i\Omega \vec{E}^- \vec{P}^+ + h.c. = 2\Omega \operatorname{Im} \vec{E}^- \vec{P}^+. \\
 \Rightarrow \frac{\partial n_2}{\partial t} &= -\frac{\partial n_1}{\partial t} = \frac{\bar{u}}{\hbar\Omega} = \begin{cases} \text{die dem Feld pro Volumen entzogene Energie} \\ \text{geteilt durch die Energie eines Photons,} \\ \text{= Dichte der pro Zeiteinheit verschwindenden Photonen.} \\ \text{Sehr sinnvoll.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

- **Berücksichtigung endlicher Lebensdauer angeregter Zustände**

(1.11) \Rightarrow Ohne Licht bleibt n_2 konstant.

In realen Atomen: exponentielles Abklingen mit charakteristischen Lebensdauer τ .

Ursachen: spontane Emission und Wechselwirkungen.

Saubere Beschreibung erfordert quantentheoretische Behandlung auch des Lichtes.

Die endliche Lebensdauer kann aber durch Zerfallsterm $-n_2/\tau$ berücksichtigt werden:

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -\frac{\partial n_1}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} \vec{E}^- \vec{P}^+ - \frac{n_2}{\tau}.$$

Wir brauchen die beiden Dichten nicht einzeln, sondern nur ihre Differenz $\Delta n := n_2 - n_1$,

oft kurz bezeichnet als Inversion⁵.

Sie genügt der Inversionsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \Delta n = \frac{4}{\hbar} \operatorname{Im} \vec{E}^- \vec{P}^+ - \frac{n_0 + \Delta n}{\tau}.} \tag{1.12}$$

⁵wenn diese Differenz positiv ist, befinden sich mehr Atome im energetisch höheren Zustand 2, als im tieferen Zustand 1. Das ist eine Inversion der thermischen Besetzung, wo $n_2 = e^{(E_1 - E_2)/kT} n_1 < n_1$ (Boltzmann).

1.4 Lichtfeld

Bisher Lichtfeld als gegeben betrachtet.

Die von ihm induzierten Polarisationschwingungen generieren aber wieder Wellen, verändern also das Licht.

In unserem Modellgas genügt deren elektrische Feldkomponente der Wellengleichung (Details Anhang A)

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = \mu_0 \partial_t^2 \vec{P}.} \quad \text{inhomogene Wellengleichung} \quad (1.13)$$

\vec{P} ist dabei das von den 2-Niveau-Atomen erzeugte Polarisationsfeld.

Abgeschlossenes System von 3 gekoppelten Gleichungen: (1.10) für \vec{P} , (1.12) für Δn , (1.13) für \vec{E} .

Nun noch Beschränkung auf:

ebene Wellen entlang o.B.d.A. z , lin. entl. \vec{e} polarisiertes Licht, langsam variierende Amplituden,

$$\vec{E}^+(\vec{r}, t) = \frac{\vec{e}}{2} \mathcal{E}(z, t) e^{i(kz - \omega t)}; \quad \vec{P}^+(\vec{r}, t) = \frac{\vec{e}}{2} \mathcal{P}(z, t) e^{i(kz - \omega t)}; \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (1.14)$$

Einsetzen in Wellengleichung, Mitnahme nur der höchsten Potenzen in k bzw. ω gibt (s. Anhang A)

$$\mathcal{E}' + \frac{1}{c} \dot{\mathcal{E}} = \frac{i}{2} \mu_0 c \omega \mathcal{P}. \quad (1.15)$$

Analog Einsetzen in die anderen beiden Gleichungen führt dann endgültig auf die

1.5 Maxwell-Bloch-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P} = \left[i(\omega - \Omega) - \frac{1}{\tau_p} \right] \mathcal{P} + \frac{|\vec{d}_{12}|^2}{i\hbar} \Delta n \mathcal{E} \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta n = \frac{1}{\hbar} \operatorname{Im}(\mathcal{E}^* \mathcal{P}) - \frac{n_0 + \Delta n}{\tau} \quad (1.17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E} = \frac{i}{2} \mu_0 \omega c_p \mathcal{P} \quad (1.18)$$

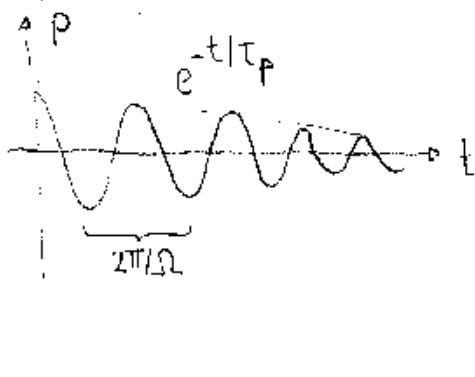
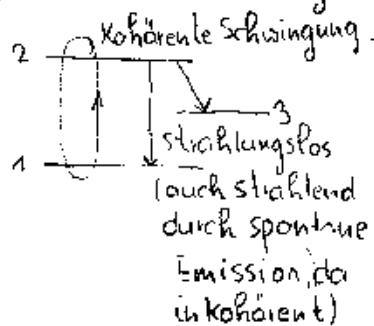
Für den Fall, daß die Atome mit den resonanten Übergängen in ein Medium eingebettet sind, wurde hier noch zwischen der Gruppengeschwindigkeit c_g und der Phasengeschwindigkeit c_p des Lichts im Medium unterschieden (s. Anhang A).

1.6 Ergänzung zu den Relaxationszeiten

Die Phasenrelaxationszeit τ_p (Abklingzeit der Polarisierung) und die Lebensdauer τ der Atome im angeregten Zustand sind nicht völlig unabhängig voneinander.

Ursachen f. Phasenrelaxation

a) Lebensdauer (Energietransfer)



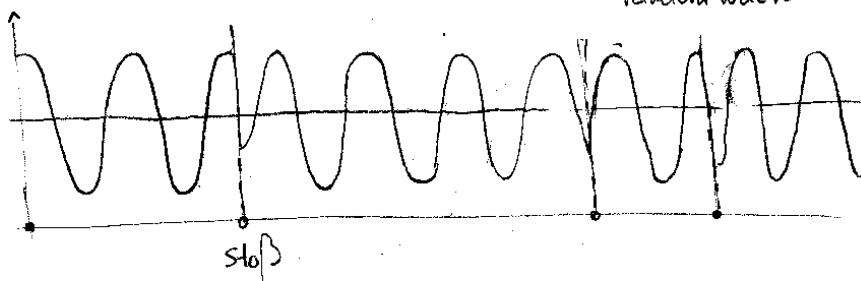
tau1a

In diesem Falle (ohne Stöße) $|\mathcal{P}|^2 \sim n_2 \sim e^{-t/\tau} \Rightarrow \mathcal{P} \sim e^{-t/2\tau} \Rightarrow \tau_p = 2\tau$.

Zusätzlich ändern aber elastische Stöße die Richtungen einzelner atomarer Dipole. Dies verringert das mittlere Dipolmoment, verkürzt also τ_p . Die Dichte der angeregten Atome n_2 – und damit τ – wird durch elastische Stöße nicht geändert.

b) Elastische Stöße (d. Atome untereinander o. mit anderen Elementaranregungen)

random walk

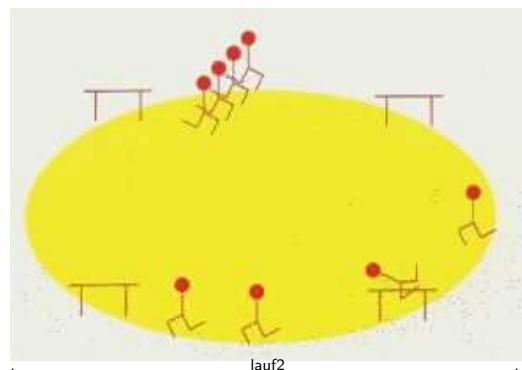
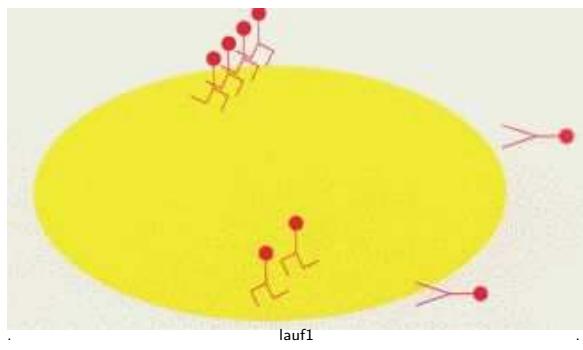


Nach einer mittleren Zeit T_{col} ist Phase der Dipolschwingung verschiedene Atome völlig statistisch \rightarrow kein makroskopisches Dipolmoment (Veranschaulichungsbispiel: Läufer)

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{1}{2\tau} + \frac{1}{T_{\text{col}}}$$

tau2a

Man kann sich die Verhältnisse mit einem Pulk von Läufern auf einem Rundkurs veranschaulichen.



Der Vektor von der Platzmitte zu einem Läufer repräsentiert einen atomaren Dipol, das makroskopische Polarisationsfeld entspricht dem Mittelwert aller Vektoren.

Links: kurz nach dem Start sind alle Läufer gleich auf (oben), die Polarisierung ist maximal. Dann halten einige Läufer die Anstrengung nicht aus und kippen aus dem Rennen (endliche Lebensdauer τ). Dadurch reduziert sich die Zahl der Läufer, die Polarisierung nimmt ab, obwohl die verbleibenden Läufer noch einen Pulk bilden (unten).

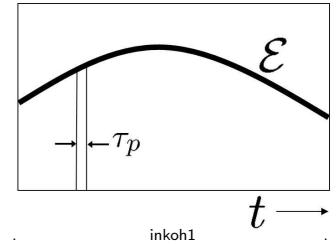
Rechts: stellt man noch Hürden in den Weg, so stolpern einige Läufer (Stöße) und kommen dabei unterschiedlich lange aus dem Tritt. Dadurch zieht sich das Läuferfeld auseinander, die mittlere Polarisierung nimmt ab, weil die Vektoren in verschiedene Richtungen zeigen (außer Phase sind). Das entspricht der Phasenrelaxation durch elastische Stöße.

2 Inkohärentes Regime

2.1 Begriffsbildung

Zeitliche Änderung der optischen Amplitude langsam gegen Phasenrelaxationszeit: $|\dot{\mathcal{E}}| \ll |\mathcal{E}|/\tau_p$

\mathcal{P} reagiert dann innerhalb der kurzen Zeit τ_p auf jede Änderung des Feldes, es folgt instantan (oder adiabatisch) dem \mathcal{E} .



2.2 Adiabatische Abkopplung der Polarisation

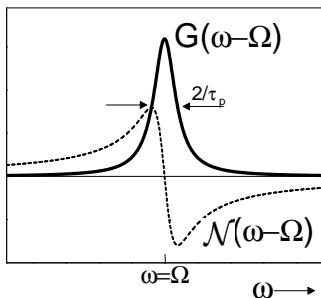
Annahme: Polarisationsamplitude ändert sich auch langsam⁶, $|\partial_t \mathcal{P}| \ll \mathcal{P}/\tau_p$.

Konsequenz: die Zeitableitung in der Polarisationsgleichung (1.16) ist vernachlässigbar.

Umstellen nach \mathcal{P} gibt

$$\mathcal{P}(t) = \varepsilon_0 \chi(\omega, \Delta n(t)) \mathcal{E}(t) \quad \text{mit} \quad \chi(\omega, \Delta n) = \Delta n \frac{\frac{d^2}{\varepsilon_0 \hbar}}{\omega - \Omega + i/\tau_p} \quad (2.1)$$

- Polarisation wird durch momentane optische Amplitude bestimmt (kein Gedächtnis)
- die Suszeptibilität $\chi(\omega, \Delta n)$ bestimmt die optischen Eigenschaften
- sie ist $\sim \Delta n$, das ist eine Quelle für Nichtlinearität
- sie hat eine gedämpfte Resonanz bei $\omega = \Omega$.
- Trennung Real- u Imaginärteil ($\frac{1}{x+i} = \frac{x}{x^2+1} - i \frac{1}{x^2+1}$) liefert



$$\chi(\omega, \Delta n) = \frac{d^2}{\hbar \varepsilon_0} \cdot (-\Delta n) \cdot [\mathcal{N}(\omega - \Omega) + i\pi G(\omega - \Omega)] \quad (2.2)$$

$$\mathcal{N}(\omega - \Omega) = \frac{\Omega - \omega}{(\omega - \Omega)^2 + 1/\tau_p^2} \quad (2.3)$$

$$G(\omega - \Omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1/\tau_p}{(\omega - \Omega)^2 + 1/\tau_p^2} \quad (2.4)$$

$G(\omega - \Omega)$ ist eine normierte Lorentzkurve, es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega - \Omega) d\omega = 1$.

im Nenner fehlt der Faktor $n_b^2 = (c_0/c_p)^2$. Das setzt sich an den grünen Stellen fort.

2.3 Konsequenzen für Feldgleichung (1.18)

Wir schreiben $\mathcal{E} = \text{const.} \sqrt{I} e^{i\Phi}$, wobei $I = \text{Intensität}$. Einsetzen, Division durch \mathcal{E} :
 $(\partial_z + c_g^{-1} \partial_t) [\frac{1}{2} \ln I + i\Phi] = \frac{i}{2} \mu_0 \omega c_p \varepsilon_0 \chi = \frac{i}{2} \frac{\omega}{c_p}$ Trennen Real- u. Imaginärteil:

$$(\partial_z + c_g^{-1} \partial_t) I = -\frac{\omega}{c_p} \text{Im} \chi \cdot I \quad (\partial_z + c_g^{-1} \partial_t) \Phi = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c_p} \text{Re} \chi \quad (2.5)$$

⁶Das ist naheliegend. Eine strenge Herleitung aus der Langsamkeit der optischen Amplitude kenne ich allerdings nicht.

2.3.1 Absorptionskoeffizient

Der Proportionalitätsfaktor in der Intensitätsgleichung ist der Absorptionskoeffizient,

$$\alpha(\omega, \Delta n) = \frac{\omega}{c_p} \text{Im}\chi(\omega, \Delta n) = -\Delta n \cdot \sigma(\omega) \quad \text{Absorptionskoeffizient} \quad (2.6)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\omega}{c_p} \frac{\pi d^2}{\hbar \varepsilon_0} G(\omega - \Omega) \quad \text{Übergangsquerschnitt} \quad (2.7)$$

- Die Frequenzabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten wird durch den Übergangsquerschnitt bestimmt.
- In unserem Modellfall identischer Atome ist das eine Lorentz-Linie.
Halbwertsbreite $= \gamma = 1/\tau_p = \text{homogene Linienbreite}$.
- α ist proportional zur Besetzungsinvolution. Absorption für $\Delta n < 0$ ($n_2 < n_1$). Umgekehrt Verstärkung des Lichts für $\Delta n > 0$.

2.3.2 Induzierter Brechungsindex

Die Phasengleichung (2.3), $\Phi' = \frac{\omega}{2c_p} \text{Re}\chi$, liefert eine Korrektur zum Brechungsindex.

Bei monochromatischer Einstrahlung mit Frequenz ω ist \mathcal{E} und damit Φ zeitunabhängig.

Also $\Phi = \omega z \cdot \text{Re}\chi / 2c_p$. Damit Gesamtfeld:

$$E(z, t) = \frac{1}{2} E_0 e^{i\omega([1+\text{Re}\chi/2]z/c_p - t)} + h.c. \\ \Rightarrow \text{veränderte Phasengeschwindigkeit: } \tilde{c}_p = \frac{c}{\bar{n}(\omega)} \quad (2.8)$$

$$\text{Brechungsindex: } \bar{n}(\omega) = \bar{n}_\infty + \bar{n}_{res}(\omega) \quad (2.9)$$

$$\text{nichtresonant: } \bar{n}_\infty = c/c_p \quad (2.10)$$

$$\text{resonant: } \bar{n}_{res}(\omega) = \bar{n}_\infty \frac{1}{2} \text{Re}\chi = -\Delta n \cdot \frac{d^2 \bar{n}_\infty}{2\varepsilon_0 \hbar} \mathcal{N}(\omega - \Omega). \quad (2.11)$$

Die Dispersion des Brechungsindex wird durch die Funktion $\mathcal{N}(\omega - \Omega)$ bestimmt (s. Bild oben).

Im Gebiet der Absorptionslinie hat man anomale Disperion (solange $\Delta n < 0$).

2.4 Konsequenzen für Inversionsgleichung (1.17)

Die Inversionsgleichung (1.17) wird unter diesen Bedingungen zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta n = \frac{\varepsilon_0}{\hbar} \text{Im}\chi |\mathcal{E}|^2 - \frac{n_0 + \Delta n}{\tau} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Im}\chi = c_p \alpha / \omega \\ I = c_g \varepsilon_0 \overline{E^2} = c_g \varepsilon_0 |\mathcal{E}|^2 / 2 \Rightarrow |\mathcal{E}|^2 = 2I/c_g \varepsilon_0 \end{array} \right. \\ \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \Delta n = 2\alpha(\Delta n) \frac{I}{\hbar \omega} - \frac{n_0 + \Delta n}{\tau}} \quad (2.12)$$

- Da sich Gruppen- und Phasengeschwindigkeit meist wenig unterscheiden, hier und im weiteren $c_p/c_g = 1$.
- Die Inversion wird durch die Intensität gesteuert, nicht wie im kohärenten Regime durch die Feldstärke.
- $\alpha I / \hbar \omega =$ Zahl der Photonen, die pro Volumen- und Zeiteinheit absorbiert werden.
- Der Faktor 2 weil $\Delta n = n_2 - n_1$: jedes absorbierte Photon reduziert die Zahl von Atomen im Grundzustand um 1 und erhöht gleichzeitig die Zahl von Atomen im angeregten Zustand um 1, so daß sich $\Delta n \cdot V$ um 2 ändert.

2.4.1 Quasi-stationärer Fall

Falls Pulsdauer groß gegen τ

ist $\partial_t \Delta n$ vernachlässigbar klein gegen $\Delta n/\tau$, setzen also links $\partial_t \Delta n = 0$:

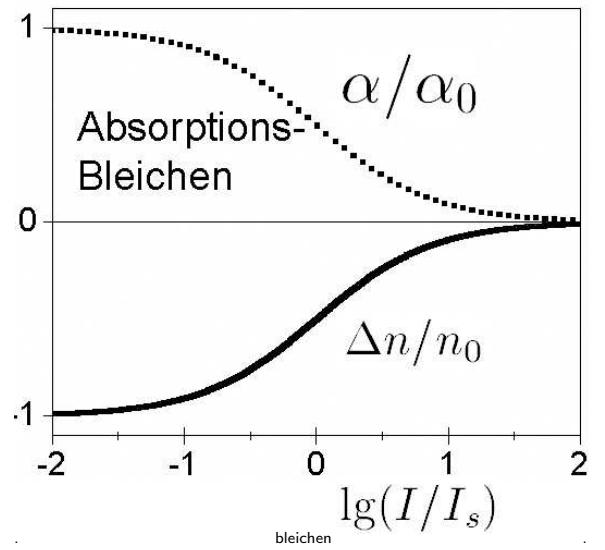
$$0 = 2\alpha \frac{I}{\hbar\omega} - \frac{n_0 + \Delta n}{\tau} = \left(-\frac{2\sigma(\omega)I}{\hbar\omega} - \frac{1}{\tau} \right) \Delta n - \frac{n_0}{\tau} \Rightarrow \Delta n = \frac{-n_0}{1 + \frac{2\sigma(\omega)\tau}{\hbar\omega} I} \quad \text{bzw.}$$

$$\Delta n = \frac{-n_0}{1 + I/I_s}$$

dabei $I_s = \frac{\hbar\omega}{2\sigma(\omega)\tau} = \text{Sättigungsintensität}$

(2.13)

- Mit zunehmender Intensität wächst die (negative) Besetzungsinversion.
- Für $I \rightarrow \infty$ geht sie gegen null, wird aber nie positiv.
- Da $\alpha = -\sigma \Delta n$, bedeutet dies eine Abnahme der Absorption mit zunehmender Intensität
= **Bleichen** bzw. **Sättigung** der Absorption.
- Im Limit $I \gg I_s$ stellt sich Gleichgewicht zwischen Absorption und stimulierter Emission ein.
- Sättigungsintensität = Intensität, bei der die Absorption auf die Hälfte gefallen ist, weil sich ein viertel der Atome im angeregten Zustand befindet.

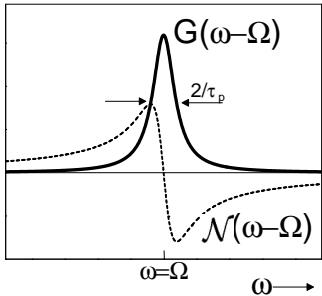


Einführung 27.04.2005. Das letzte mal:

Inkohärentes Regime

$$|\dot{\mathcal{E}}| \ll |\mathcal{E}|/\tau_p \Rightarrow \mathcal{P}(t) = \varepsilon_0 \chi \mathcal{E}(t)$$

$$\chi(\omega, \Delta n) = \frac{d^2}{\hbar \varepsilon_0} \cdot (-\Delta n) \cdot [\mathcal{N}(\omega - \Omega) + i\pi G(\omega - \Omega)]$$



$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\omega - \Omega) &= \frac{\Omega - \omega}{(\omega - \Omega)^2 + 1/\tau_p^2} \\ G(\omega - \Omega) &= \frac{1}{\pi} \frac{1/\tau_p}{(\omega - \Omega)^2 + 1/\tau_p^2}\end{aligned}$$

$$\alpha(\omega, \Delta n) = -\Delta n \cdot \sigma(\omega)$$

Absorptionskoeffizient

$$\sigma(\omega) = \frac{\omega}{c_p} \frac{\pi d^2}{\hbar \varepsilon_0} G(\omega - \Omega)$$

Übergangsquerschnitt

Jedes Atom schwächt den Lichtstrahl wie ein undurchsichtiges Objekt mit dieser Querschnittsfläche.

$$\bar{n}_{res}(\omega) = -\Delta n \cdot \frac{d^2 \bar{n}_\infty}{2 \varepsilon_0 \hbar} \mathcal{N}(\omega - \Omega)$$

resonanter Brechindex

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta n = 2\alpha(\Delta n) \frac{I}{\hbar \omega} - \frac{n_0 + \Delta n}{\tau}$$

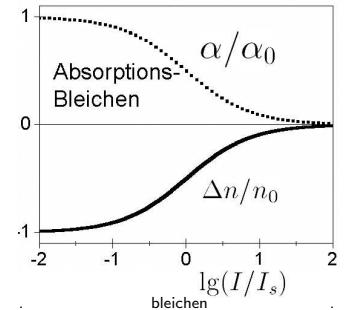
Inversionsgleichung

Quasistationärer Fall:

$$\Delta n = \frac{-n_0}{1 + I/I_s}$$

$$I_s = \frac{\hbar \omega}{2\sigma(\omega)\tau}$$

Sättigungsintensität



2.4.2 Nichtstationärer Fall

Die Inversionsgleichung (2.12) lautet mit den eingeführten Größen

$$\partial_t \Delta n = -\frac{I}{I_s} \frac{\Delta n}{\tau} - \frac{n_0 + \Delta n}{\tau}. \quad (2.14)$$

Behauptung: Diese lineare Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$\Delta n(t) = -n_0 \int_0^\infty \frac{dt'}{\tau} e^{-t'/\tau} \exp\left(-\frac{Q(t-t', t)}{Q_s}\right) \quad Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} I(t') dt', \quad Q_s = I_s \tau. \quad (2.15)$$

Beweis: Einfach ableiten:

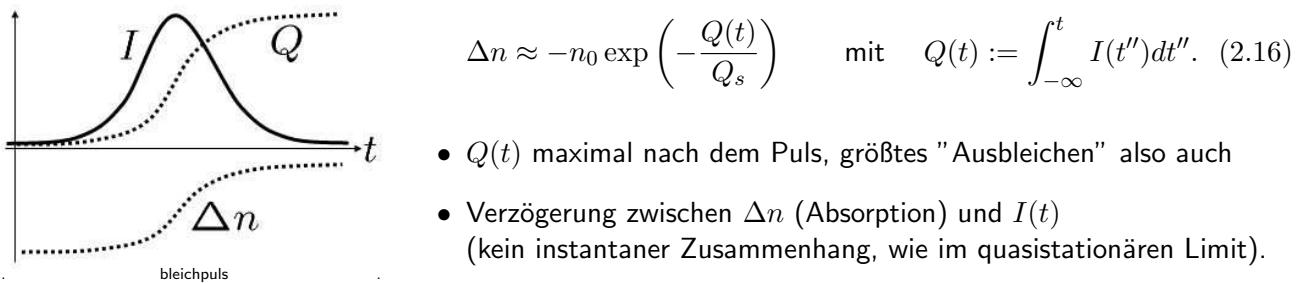
$$\begin{aligned} \partial_t \Delta n &= \dots \int_0^\infty dt' \dots \left[(\partial_{t_1} + \partial_{t_2}) \exp\left(-\frac{Q(t_1, t_2)}{Q_s}\right) \right]_{t_1=t-t', t_2=t} \\ &= \dots \int_0^\infty dt' \dots \left[-\partial_{t'} \exp\left(-\frac{Q(t-t', t)}{Q_s}\right) \right] - \frac{I}{Q_s} \Delta n \quad \text{nun partiell integrieren:} \\ &= \frac{n_0}{\tau} e^{-t'/\tau} \exp\left(-\frac{Q(t-t', t)}{Q_s}\right) \Big|_0^\infty - \frac{\Delta n}{\tau} - \frac{I}{I_s} \frac{\Delta n}{\tau} = -\frac{n_0}{\tau} - \frac{\Delta n}{\tau} - \frac{I}{I_s} \frac{\Delta n}{\tau} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Diskussion:

- die Eigenschaften der Lösung werden durch den Exponentialfaktor und das Integral Q bestimmt.
- Ohne Puls, $I \equiv 0$, gilt $Q \equiv 0$ und $\Delta n = -n_0 =$ maximale Absorption.
- Mit Puls verkleinert der Exponentialfaktor mit dem Q das Integral, $|\Delta n|$ wird kleiner, also auch der Absorptionskoeffizient α . = Ausbleichen der Absorption.
- aber: Generell $\Delta n < 0$, d.h. im inkohärenten Regime kann durch optische Anregung im 2-Niveau-System keine Besetzungsinvolution $\Delta n > 0$ erzeugt werden.
- Bei langsamem Pulsen $Q(t-t', t) \approx I(t)t'$, das gibt wieder den quasistationären Fall (2.13).

Kurze Pulse im Vergleich zu τ :

- untere Integrationsgrenze in Q durch $-\infty$ approximierbar. Also



Ab nun: Rückkehr zu stationären Verhältnissen.

2.5 "Power Broadening"

Betrachten Licht mit Frequenz ω und zeitlich konstanter Intensität I .

Welche Frequenzabhängigkeit hat der Absorptionskoeffizient?

Im quasistationären Regime gilt

$$\alpha(\omega) = \frac{n_0\sigma(\omega)}{1 + I/I_s(\omega)} \quad \text{mit der Sättigungsintensität} \quad I_s(\omega) = \frac{\hbar\omega}{2\sigma(\omega)\tau}. \quad (2.17)$$

Erweitern mit I_s & Erinnern an $\hbar\omega \approx \hbar\Omega$ (nahezu resonante Einstrahlung) gibt

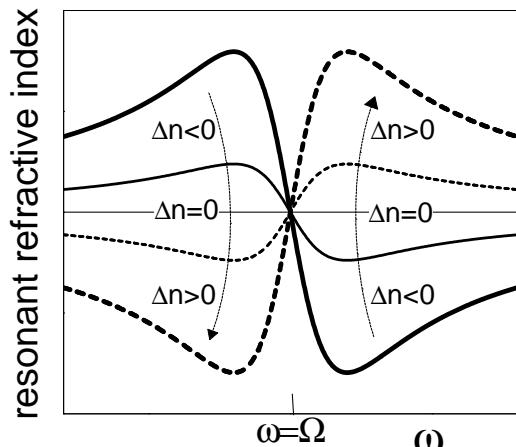
$$\alpha(\omega) = \frac{n_0\hbar\Omega}{2\tau} \frac{1}{I + I_s(\omega)} = \frac{n_0\hbar\Omega}{2\tau} \frac{\varkappa}{(\omega - \Omega)^2 + 1/\tau_p^2 + \varkappa \cdot I} \quad (2.18)$$

mit einer positiven Konstanten $\varkappa = 2d^2\tau/\hbar^2\varepsilon_0\tau_p c_p$.

Diskussion:

- α bleibt eine Lorentzkurve.
- ihre Halbwertsbreite ist $2/\tau_p^2 + \varkappa I$. **Hier fehlt die Wurzel.**
- sie wächst mit Intensität I an. Diesen Effekt nennt man "**power broadening**"⁷
- Analoges gilt für den resonanten Brechindex (gleicher Resonanznenner).

2.6 Nichtlinearer Brechungsindex & Lichtgeschwindigkeit



$$\bar{n}(\omega) = \bar{n}_\infty + \bar{n}_{\text{res}}(\omega, \Delta n) \quad (2.19)$$

- resonanter Beitrag hängt ab von Inversion Δn
- nimmt ab mit wachsendem Δn für $\omega < \Omega$
- nimmt zu mit wachsendem Δn für $\omega > \Omega$

Gruppengeschwindigkeit:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c_g} + \frac{\partial \omega \bar{n}_{\text{res}}(\omega, \Delta n)}{c \partial \omega} \quad (2.20)$$

Gruppengeschwindigkeit wird an Resonanz besonders stark modifiziert:

- verkleinert für $\Delta n < 0$ (anormale Dispersions bei normaler Besetzung)
- vergrößert für $\Delta n > 0$ (bei Inversion der thermischen Besetzung)

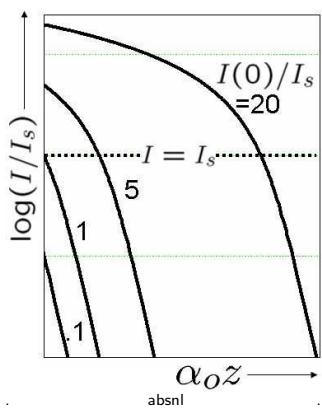
Manipulation der Gruppengeschwindigkeit ist ein hochaktuelles Forschungsgebiet ("Licht anhalten")⁸

s. z.B. E.A. Cornell, "Stopping light in its tracks", NATURE 409, 461 (2001)

⁷den deutschen Begriff kenne ich nicht.

⁸allerdings mit Mehrstrahl-Techniken, die etwas komplexer sind, als wir hier betrachten.

2.7 Nichtlineares Absorptionsgesetz



Ausbreitungsgleichung: $dI/dz = -\alpha I$.

$$\frac{dI}{dz} = -\frac{\alpha_0 I}{1 + I/I_s} = -\alpha_0 I_{red}, \quad I_{red} := \frac{I_s \cdot I}{I + I_s} \text{ "reduzierte Intensität"} \quad (2.21)$$

Schwache Intensität: $I \ll I_s \Rightarrow I_{red} \approx I$:

$$\frac{dI}{dz} \approx -\alpha_0 I \Rightarrow I(z) \sim e^{-\alpha_0 z} \text{ exponentielles Abklingen} \quad (I \ll I_s) \quad (2.22)$$

Hohe Intensität: $I \gg I_s \Rightarrow I_{red} \approx I_s$ kann als konstant behandelt werden:

$$\frac{dI}{dz} = -\alpha_0 I_{red} \stackrel{I_{red}=const}{\Rightarrow} I(z) = I(0) \left(1 - \frac{I_{red}}{I(0)} \alpha_0 z \right) \text{ schwaches lineares Abklingen} \quad (I \gg I_s) \quad (2.23)$$

Allgemeine Lösung von (2.21) durch Variablenseparation:

$$-\alpha_0 z = \int_{I(0)}^{I(z)} \left(\frac{1}{I} + \frac{1}{I_s} \right) dI = \ln \left(\frac{I(z)}{I(0)} \right) + \frac{I(0)}{I_s} \left(\frac{I(z)}{I(0)} - 1 \right) \quad (2.24)$$

S. Abbildung "absnl". Interpretation: wenn $I(0) > I_s$, Absorptionssättigung im vorderen Teil der Probe, hinten normales exponentielles Abklingen.

Phase: $\Phi' = \frac{\omega}{c_p} \bar{n}_{res} (1 + I(z)/I_s)^{-1} = -\alpha_0^{-1} \bar{n}_{res} \frac{\omega}{c_p} I'/I = \frac{\omega - \Omega}{2\gamma} \partial_z \ln(I) \Rightarrow$

$$\Phi(z) = -\frac{\Omega - \omega}{2\gamma} \ln \left(\frac{I(z)}{I(0)} \right) = \frac{\omega - \Omega}{2\gamma} z \begin{cases} 1 & I(0) \ll I_s \\ I_s/I(0) & I(0) \gg I_s \end{cases} \quad (2.25)$$

Die reale Vorlesung am 04.05. enthielt mehr als folgend dargestellt. Meine Zeit seitdem erlaubt aber nicht mehr als eine entsprechende Umstellung der Scriptabschnitte vom Vorjahr, um wenigstens die Gliederung zu erhalten. Sie haben hoffentlich gute Mitschriften.

2.8 Anwendungen

2.8.1 Sättigbare Absorber

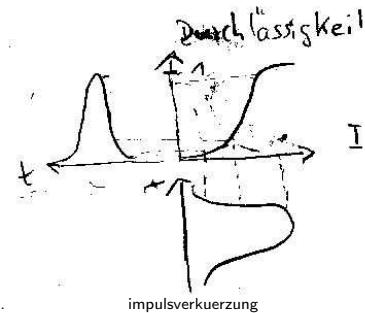
Die Sättigung der Absorption mit wachsender Intensität hat vielfältige Anwendungen. Hier folgende 2.

a) Impulsverkürzung

Die Durchlässigkeit einer Materialschicht mit sättigbarer Absorption steigt mit wachsender Intensität.

Schickt man einen optischen Puls hindurch, dessen Maximalintensität hinreichend viel größer ist, als die Sättigungsintensität I_s , so werden die Teile seiner Flanken mit Intensität $< I_s$ absorbiert, die intensive Mitte aber praktisch durchgelassen.

Das entspricht insgesamt einer Verkürzung des Pulses.^a

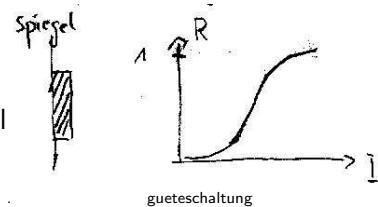


^aBeachten: inkohärentes Regime, also Pulsdauer groß gegen Phasenrelaxationszeit.

b) Güteschaltung

Ein Spiegel wird mit einer Schicht sättigbaren Absorbers beschichtet.

Für $I < I_s$ wird das Licht absorbiert, das Reflexionsvermögen ist null (klein).



Hohe Intensitäten werden gut reflektiert.

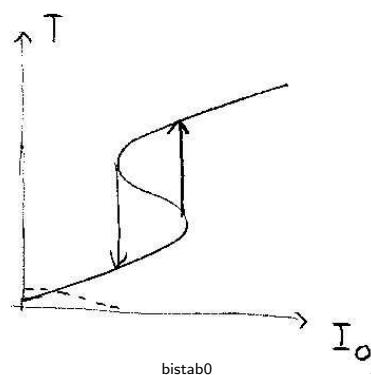
Anwendung insbesondere bei Resonatorspiegeln (Laser). Die Resonatorgüte steigt mit der Intensität des Lichts im Resonator an. Damit können kurze optische Impulse erzeugt werden ("passive Modensynchronisation", wird später bei Lasern behandelt.).

2.8.2 Optische Bistabilität

= Hysteresis im Transmissionsvermögen^a eines Fabry-Perot-Resonators als Funktion eingestrahlter Intensität,

wenn dieser geeignetes Medium mit nichtlinearem Brechindex \bar{n} enthält.

Anwendbar für digitale Optik (im Hysteresebereich 2 stabile Zustände: wenig oder viel Licht – an oder aus).



^aQuotient aus transmittierter Intensität I_T und einfallender Intensität I_0

Wie funktioniert das?

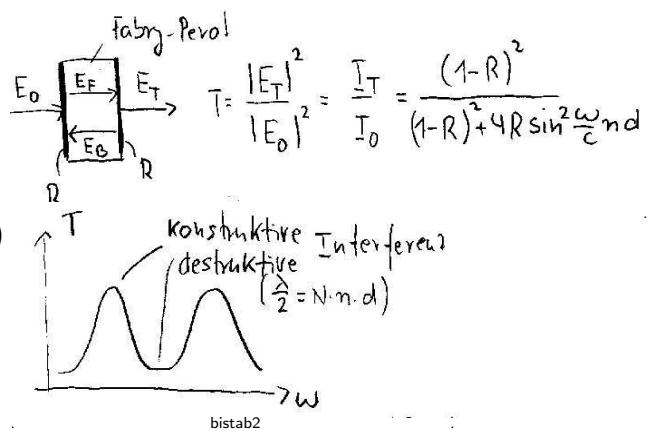
Transmissionsvermögen variiert periodisch mit ω .

Maxima (konstruktive Interferenz),
wenn optische Dicke $\bar{n}d$
= ganzzahliges Vielfaches halber Wellenlänge.

Nun Nichtlinearität:

für $I \ll I_s : \bar{n} \approx \bar{n}_1 - \bar{n}_2 \cdot I$. (= Kerr-Nichtlinearität)

Brechindex nimmt ab mit wachsender Intensität,
damit auch die optische Länge,
damit verschiebt sich die Transmissionskurve.



Intensität im FP:

$$\left. \begin{aligned} I &\approx I_F + I_B \\ I_B &\approx R I_F \\ I_T &\approx (1-R) I_F \end{aligned} \right\} I = \left(\frac{1+R}{1-R} \right) I_T$$

fpintens

Transmissionsvermögen:

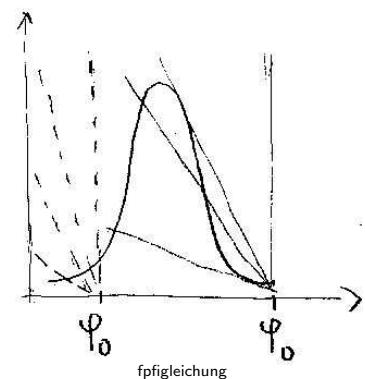
$$\frac{I_T}{I_0} = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \varphi(I_T)}$$

$$\varphi(I_T) = \underbrace{\frac{\omega_c d}{c}}_{\varphi_0 : \text{linearer Gangunterschied}} \left(n_1 - \frac{1+R}{1-R} n_2 I_T \right)$$

andere Schreibweise (I_T durch φ ersetzt.)

$$\frac{\varphi_0 - \varphi}{\frac{\omega_c d}{c} \left(\frac{1+R}{1-R} \right) n_2 I_0} = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \varphi}$$

fptransmiss



Rechte Seite: Funktion mit Periode π , Maximum = 1, Minimum = $[(1-R)/(1+R)]^2 \rightarrow 0$ für $R \rightarrow 1$.

Linke Seite: Gerade durch φ_0 , Steigung negativ $\sim 1/I_0$

kleine I_0 : Gerade praktisch vertikal \rightarrow nur eine Lösung $\varphi \approx \varphi_0$

geeignet große I_0 : Gerade kann die periodische Funktion mehrfach schneiden = Bistabilität.⁹

Dazu muß die Lineare Phase φ_0 geeignet gewählt werden (Wahl Wellenlänge).

⁹Der Kreuzungspunkt mit der abfallenden Flanke ist instabil, d.h., bei kleiner Fluktuation von Parametern oder der Intensität (in Praxis immer vorhanden) bewegt sich innere Intensität von diesem Punkte weg auf einen der beiden anderen Kreuzungspunkte zu, die stabil sind.

2.8.3 Cavity Solitons

Resonator-Solitonen sind momentan ein heisses Forschungsgebiet. Angeregt durch entsprechende Vortraege auf der Konferenz "Photonics Europe" vorige Woche, will ich hier ganz kurz die Idee der Sache skizzieren.

Ausgangspunkt ist die Hysteresekurve *bistab0* eines optisch bistabilen Resonators. Bei gleicher Eingangsintensität I_0 kann dieser entweder eine hohe oder eine kleine Transmission haben, je nach Vorgeschiichte. Zwischen beiden laesst sich mit kurzen Intensitätsvariationen hin und her schalten, wenn sie aus dem Hysteresebereich herausfuehren.

Nun haben solche Resonatoren immer eine endliche Ausdehnung in der Ebene senkrecht zur Resonatorachse (Ausbreitungsrichtung des Lichtes). Dann koennte im Prinzip jeder Punkt dieser Ebene entweder den einen oder den anderen Zustand einnehmen. Man koennte diese Flaeche also z.B. fuer optische Informationsspeicherung nutzen.

Solche Inhomogenitäten der Besetzungsinverson in dieser Fläche werden aber durch 2 Prozesse wieder abgebaut: "Diffusion" der Anregung im Stoff und Beugung des Lichts an ihnen.

Unter bestimmten Bedingungen sind aber kleine Inseln hoher Transmission in Bereichen niederer Transmission stabile Objekte, sogenannte räumliche Solitonen. Je nach Arbeitspunkt bilden sie sich spontan auch bei homogener Einstrahlung und formen interessante Muster oder sie müssen (können) durch einen weiteren gut fokussierten Lichtstrahl erzeugt (eingeschrieben) werden und bleiben nach dessen Abschaltung erhalten.

Fuer weiteres suche man im Internet nach "cavity soliton".

2.8.4 Inhomogene Verbreiterung

Bisher: Homogenes Atomensemble, d.h. alle Atome haben die gleiche Übergangsfrequenz Ω . Die entsprechende Breite $2\gamma = 2/\tau_p$ der Absorptionslinie heisst **homogene Linienbreite**.

in Realität: die Ω streuen über einen endlichen Bereich¹⁰

Verteilung: $\rho(\Omega)$ ($\rho(\Omega)d\Omega$ = Anteil der Atome im Intervall $\Omega \pm d\Omega/2$)

Dann wird z.B. Absorptionskoeffizient

$$\alpha(\omega) \sim \int d\Omega \rho(\Omega) G(\omega - \Omega) \quad (2.26)$$

Das inhomogene Atom-Ensemble erfährt eine Verbreiterung der Absorptionslinie, die **inhomogene Linienverbreiterung**.

Grenzfälle für die Breite $\Delta\Omega$ der Verteilungsfunktion $\rho(\Omega)$:

- $\Delta\Omega \ll G$ kann aus dem Integral gezogen werden, $\alpha \sim G(\omega - \bar{\Omega})$, homogene Breite dominiert
- $\Delta\Omega \gg \rho$ kann aus dem Integral gezogen werden, $\alpha \sim \sigma(\omega)$, inhomogene Breite dominiert

Im dominant inhomogen verbreiterten Ensemble koppelt nur ein Teil der Atome an das Licht. Das führt bei hohen Intensitäten zu energetisch lokalen Änderungen der Besetzungszahlen (sogenanntes spektrales Lochbrennen, wird bei Verstärker weitergeführt).

¹⁰mögliche Gründe: Dopplereffekt bewegter Atome, Molekülbanden, Bänder in festen Stoffen etc.

Einführung 11.05.2005.

Incohärentes Regime, quasistationäre Einstrahlung $I = I(\omega)$

$$\alpha(\omega, I) = \frac{n_0 \cdot \sigma(\omega)}{1 + I/I_s(\omega)} \quad \text{n.l. Absorptionskoeffizient}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\omega}{c_p} \frac{\pi d^2}{\hbar \varepsilon_0} G(\omega - \Omega) \quad \text{Übergangsquerschnitt}$$

$$I_s(\omega) = \frac{\hbar \omega}{2\sigma(\omega)\tau} \quad \text{Sättigungsintensität}$$

$$\bar{n}_{res}(\omega, I) \sim \frac{\mathcal{N}(\omega - \Omega)}{1 + I/I_s(\omega)} \quad \text{n.l. resonanter Brechindex}$$

Behandelte Anwendungen u. Effekte:

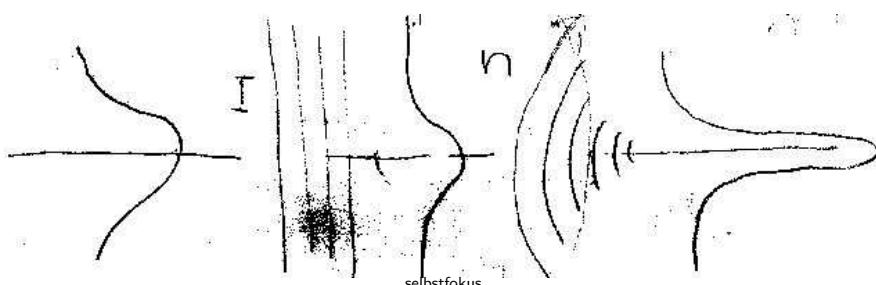
- Impulsverkürzung
- Güteschalten (Erzeugung kurzer optischer Pulse)
- optische Bistabilität (opt. Schalten, Informationsspeicherung)
- räumliche Solitonen = cavity solitons
- inhomogene Verbreiterung

heute weiter mit:

- Selbstfokussierung von Licht (Erzeugung von Nadelstrahlen)
- Vier-Wellen-Mischen (nichtlineare Beugung, Frequenzschalten)
- Strahlende Lebensdauer

2.8.5 Selbstfokussierung (oder -defokussierung)

Einstrahlung eines räumlich begrenzten Pulses.

Variation des Brechindex $\bar{n}(I)$ mit Intensität dann räumlich Variation des Brechindex.Wirkt wie eine Linse. Falls er mit I wächst, wie eine Sammellinse, der Strahl fokussiert sich selbst.

Im anderen Falle wie eine Zerstreuungslinse = Selbst-Defokussierung.

Dieser Effekt kann auch durch die Erwärmung des Materials durch das Licht hervorgerufen werden = "thermal lensing".

2.8.6 Vier-Wellen-Mischen (FWM = Four Wave Mixing)

Man strahlt 2 hinreichend intensive Wellen ein, deren Frequenzen ω_1, ω_2 bzw. Wellenvektoren \vec{k}_1 und \vec{k}_2 (leicht) verschieden sind.

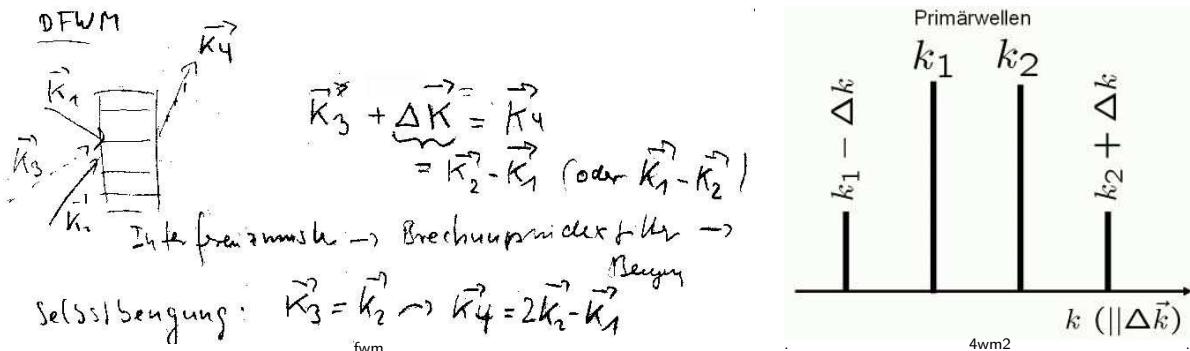
a) entarteter Fall $\omega_1 = \omega_2$ (DFWM = Degenerate Four Wave Mixing)

Im Innern dann:

$$\text{Gesamtintensität} \sim |\mathcal{E}_1 e^{i\vec{k}_1 \vec{r}} + \mathcal{E}_2 e^{i\vec{k}_2 \vec{r}}|^2 = \text{const} + 2|\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2| \cos([\vec{k}_2 - \vec{k}_1] \vec{r} + \arg(\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2)) \quad (2.27)$$

Entscheidend:

- Interferenz erzeugt periodisch variierende Intensität (mit Wellenvektor $\Delta \vec{k} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$).
- durch Nichtlinearität entsteht daraus ein periodisches Brechindexgitter
- an diesen Brechindexgitter werden eventuelle weitere Wellen gebeugt
- und zwar wird Welle mit Wellenvektor \vec{k}_3 in Welle mit $k_4 = k_3 + \Delta \vec{k}$ gebeugt.¹¹



- Jede der Primärwellen wird natürlich auch gebeugt, z.B. Welle 2 nach $\vec{k}_2 + \Delta \vec{k}$ ¹²
- und Welle 1 nach $\vec{k}_1 - \Delta \vec{k}$.
- Bei nur 2 eingestrahlten Wellen entsteht also im k-Raum links und rechts der beiden Primärwellen ein 4-Wellenmisch-Produkt und zwar mit dem Abstand Δk der Primärwellen.

Anwendungsmöglichkeit z.B. optischer Richtungsschalter.

b) nichtentarteter Fall o.B.d.A. $\omega_1 < \omega_2$ (nur qualitative Skizze)

Intensität oszilliert zusätzlich zeitlich mit Schwebungsfrequenz $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

5190 Appl. Phys. Lett., Vol. 84, No. 25, 21 June 2004

Nichtlinearität transformiert dies in entsprechende zeitliche Oszillationen des Brechindex

Es entstehen Sekundärwellen bei $\omega_1 - \Delta\omega$ und $\omega_2 + \Delta\omega$

Eventuell sogar Tertiärwellen bei $\omega_1 - 2\Delta\omega$ etc.

Bild: ein FWM-Spektrum aus der Literatur.

p, q: Primärwellen, c1, c2: Sekundärwellen, c3, c4: Tertiärwellen.

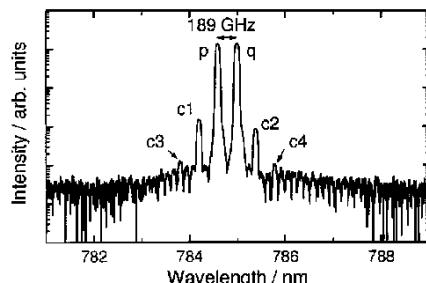


FIG. 2. Laser output spectrum of a cascaded FWM process. p and q are the dual laser modes; c1, c2, c3, and c4 are the newly generated waves.

¹¹Es sind also insgesamt 4 Wellen beteiligt: 2 erzeugen das Brechindexgitter, eine wird daran gebeugt und eine entsteht bei der Beugung. Deshalb 4-Wellen-Mischen.

¹²In diesem Falle werden nur 2 Wellen eingestrahlt, eine spielt eine Doppelrolle: sie erzeugt mit der anderen das Gitter und wird gleichzeitig daran gebeugt. Trotzdem spricht man auch hier von 4-Wellen-Mischen.

2.9 Strahlende Lebensdauer

Atome in angeregten Zuständen können auf verschiedenen Wegen rekombinieren¹³.

Einer davon ist die spontane Emission von Licht.

Annahme: dieser Rekombinationsprozeß dominiert.

In diesem Falle ist τ die strahlende Lebensdauer τ_{rad} .¹⁴

2.9.1 Zusammenhang mit Absorptionsquerschnitt

Die strahlende Lebensdauer hängt eng mit dem Absorptionsquerschnitt σ zusammen.

Um das zu sehen, Rückkehr zur inkohärenten Inversionsgleichung (2.12)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta n = 2\alpha(\Delta n) \frac{I}{\hbar\omega} - \frac{n_0 + \Delta n}{\tau} \quad \text{Inversionsgleichung} \quad (2.12)$$

Übergang zu Teilchenzahlen $N_k = n_k \cdot V$ (V : Volumen) und Einsetzen von

$$\Delta n + n_0 = 2n_2 = 2N_2/V,$$

$$I/\hbar\omega = cN_{ph}/V \quad (N_{ph} \text{ -- Photonenzahl im Volumen}),$$

$$\alpha = -\Delta n\sigma(\omega) = (N_1 - N_2)\sigma(\omega)/V \text{ gibt}$$

$$\begin{aligned} \partial_t N_2 &= \frac{c}{V} \sigma(\omega) (N_1 - N_2) N_{ph} - \frac{N_2}{\tau_{rad}} \\ &= \underbrace{\frac{c}{V} \sigma(\omega) N_1 N_{ph}}_{\text{Absorption}} - \underbrace{\frac{c}{V} \sigma(\omega) N_2 N_{ph}}_{\text{stimulierte Emission}} - \underbrace{\frac{N_2}{\tau_{rad}}}_{\text{spontane Emission}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die Zahl der angeregten Atome ändert sich durch 3 Prozesse:

- Zunahme durch Photonenabsorption,
proportional zu Atomzahl N_1 in Grundzustand und Photonenzahl N_{ph}
- Abnahme durch stimulierte Emission,
proportional zu Atomzahl N_2 in angeregten Zustand und N_{ph}
Gleicher Proportionalitätsfaktor wie bei Absorption !
- Abnahme durch spontane Emission, proportional zu N_2 , unabhängig von N_{ph} .

Schönheitsfehler: nur Photonen einer Frequenz ω berücksichtigt.

(sowie gleicher Polarisation, gleicher Ausbreitungsrichtung, ... also einer Strahlungsmoden)

Im allgemeinen muß über alle Lichtmoden absummiert werden:

$$\partial_t N_2 = \frac{c}{V} \int S(\omega) \sigma(\omega) N_{ph}(\omega) d\omega \cdot (N_1 - N_2) - \frac{N_2}{\tau_{rad}} \quad (2.29)$$

¹³in den Grundzustand "zurückfallen"

¹⁴Die Lebensdauerbeiträge verschiedener Rekombinationskanäle k addieren sich invers zur Gesamtlebensdauer:

$$\frac{1}{\tau} = \sum_k \frac{1}{\tau_k}$$

Hier $S(\omega)$ = spektrale Modendichte (Zahl der Lichtmoden pro Spektralinterval $d\omega$) und $N_{ph}(\omega)$ die mittlere Photonenzahl pro Mode bei der Frequenz ω .

Nun **Einstein's Argument:** Im thermodynamischen Gleichgewicht muß gelten

$$N_1 = e^{\hbar\Omega/kT} N_2 \text{ sowie } N_{ph} = 1/(e^{\hbar\omega/kT} - 1) \text{ und } \dot{N}_2 = 0.$$

Auflösen nach $1/\tau_{rad}$ gibt unmittelbar¹⁵

$$\frac{1}{\tau_{rad}} = \int S(\omega) \left\{ \frac{c}{V} \sigma(\omega) \right\} d\omega$$

strahlende Lebensdauer
(2.30)

Nächstes mal werde ich diese Formel zunächst für den Freiraum ausrechnen und dann damit zeigen, dass sich die strahlende Lebensdauer von Atomen ändert, wenn man sie in Resonatoren packt.

¹⁵Dabei noch den Faktor $(e^{\hbar\Omega/kT} - 1)/(e^{\hbar\omega/kT} - 1) = 1$ weggelassen, der wegen vorausgesetzter Quasiresonanz $\omega \approx \Omega$ praktisch eins ist und der bei exakter quantentheoretischer Behandlung nicht auftritt.

2.9.2 Strahlende Lebensdauer Freiraum

Im freien Raum unterscheiden sich die Lichtmoden durch den Wellenvektor \vec{k} und die beiden Polarisierungen. Es gilt

$$S(\omega) = 2 \sum_{\vec{k}} \delta(\omega - ck) = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} \delta(\omega - ck) = \frac{V}{\pi^2} \frac{\omega^2}{c^3}. \quad (2.31)$$

Dies ist schwach veränderlich über der Resonanzlinie, kann also bei $\omega = \Omega$ herausgezogen werden. Mit (??) gibt das

$$\frac{1}{\tau_{rad}} = S(\Omega) \frac{c}{V} \int \sigma(\omega) d\omega = \frac{V}{\pi^2} \frac{\Omega^2}{c^3} \cdot \frac{c}{V} \cdot \frac{\Omega}{c} \frac{d^2 \pi}{\hbar \varepsilon_0},$$

also

$$\frac{1}{\tau_{rad}} = \frac{4}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \frac{d^2}{\hbar} = \frac{32\pi^3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d^2}{\hbar \lambda^3}$$

strahlende Lebensdauer Freiraum

(2.32)

Hier habe ich den Nenner $4\pi\varepsilon_0$ explizit stehen lassen, damit mit älteren Formeln in cgs-Einheiten verglichen werden kann, wo er 1 ist.

Man kann diese Formel nutzen, um das Dipolmoment im Absorptionskoeffizienten durch die strahlende Lebensdauer auszudrücken:

$$\alpha(\omega, \Delta n) = -\frac{\lambda^2}{4\tau_{rad}} G(\omega) \Delta n. \quad (2.33)$$

2.9.3 Strahlende Lebensdauer im Resonator

Generell: die Modendichte $S(\omega)$ wird durch die Präsenz von Körpern, insbesondere in Resonatoren, gegenüber dem Freiraum modifiziert.

Damit hängt auch die strahlende Lebensdauer eines Atoms von der Umgebung ab, in die es eingebettet ist.

Betrachten hier nur den Extremfall eines Resonators mit nur einer Mode:¹⁶

$$S(\omega) = \delta(\omega - \omega_m). \quad (2.34)$$

Damit

$$\frac{1}{\tau_{rad}} = \frac{c}{V} \sigma(\omega_m) \sim \frac{1}{(\Omega - \omega_m)^2 + \gamma^2} \quad (2.35)$$

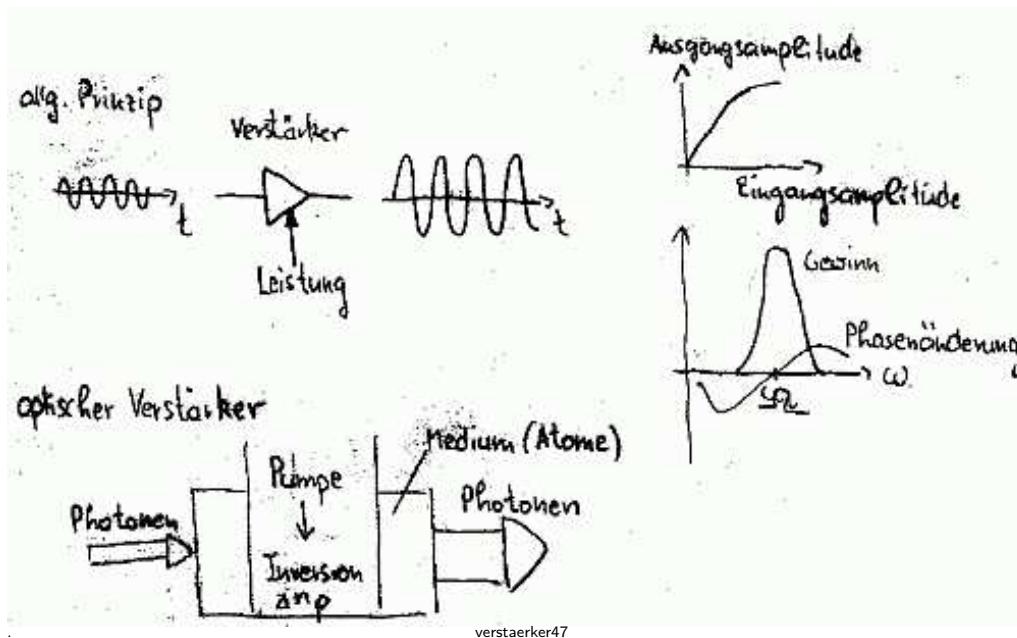
Strahlende Lebensdauer wächst (quadratisch) mit zunehmender Vertimmung $\Omega - \omega_m$ zwischen Übergangsfrequenz des Atoms und Resonanzfrequenz des Resonators.

¹⁶im relevanten Spektralbereich

3 Der optische Verstärker

Optische Verstärker sind Materialien, welche Licht verstärken.

Sie werden vor allem in Lasern verwendet.



3.1 Grundlegende Charakteristika

Wir betrachten einen optischen Verstärker der Länge L .

Seinen Verstärkungsgrad charakterisiert man durch den sogenannten optischen

$$\text{Gewinn} = \text{Verstärkungsfaktor} = \frac{\text{Ausgangsintensität } I_L}{\text{Eingangsintensität } I_0} \quad (3.1)$$

In einem homogenen verstärkenden Medium wächst die Intensität exponentiell mit der Länge an,

$$\frac{I_L}{I_0} = e^{gL}, \quad \text{dabei ist } g \text{ der sogenannte \textbf{Gewinnkoeffizient} bzw. Verstärkungskoeffizient.} \quad (3.2)$$

Physikalisch sind optische Verstärker Medien im inkohärenten Regime.

Bei homogen verbreiterten Linien können alle Ergebnisse des letzten Kapitels angewendet werden.

Insbesondere ist der Gewinnkoeffizient nichts weiter als der negative Absorptionskoeffizient:

$$g = -\alpha = \sigma(\omega) \cdot \Delta n = \frac{\lambda^2}{4\tau_{rad}} G(\omega) \Delta n = \alpha_0(\omega) \frac{\Delta n}{n_0}. \quad (3.3)$$

Folgerungen:

- Der Gewinnkoeffizient wächst linear mit der Besetzungsinversion.
- Verstärkung erfordert $\Delta n > 0$.
- Die spektrale Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors entspricht der Linienformfunktion $G(\omega)$ (Lorentz-Linie) der spontanen Emission.

Bandbreite:

Die Halbwertsbreite $\Delta\omega_G = 2\gamma = 2/\tau_p$ der Lorentzkurve bestimmt die Bandbreite des Verstärkungsspektrums.

Maximalverstärkung:

$g_{max} = \frac{\lambda^2 \Delta n}{2\pi \tau_{rad} \Delta\omega_G}$, je kleiner Produkt aus strahlender Lebensdauer und Bandbreite des Verstärkungsspektrums, desto größer der Maximalverstärkung.

Beispiel: $\Delta\omega_G \tau_{rad} = 2\tau_{rad}/\tau_p$ ist im Idealfall = 1.

Also dann $g_{max} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \Delta n$. Mit $\lambda = 500\text{nm}$ und $\Delta n \approx n_0 \approx 10^3\text{cm}^{-3}$ gibt das:
 $g_{max} \approx (5 \times 10^{-5}\text{cm})^2 \times 10^1 2\text{cm}^{-3}/6 \approx 400\text{cm}^{-1}$.

Bei $L = 0.1\text{mm}$ bedeutet das eine Verstärkung des Lichts um den Faktor $e^{gL} \approx e^4 \approx 50$.

Realistische Werte sind um Größenordnungen geringer (s. Tabelle), weil $\tau_p \ll \tau_{rad}$.

Laser Medium	Transition Wavelength λ_0 (μm)	Transition Cross Section σ_0 (cm^2)	Spontaneous Lifetime t_{10}	Transition Linewidth ^a $\Delta\nu$	Refractive Index n
He-Ne	0.6328	1×10^{-13}	$0.7\ \mu\text{s}$	15 GHz	I = 1
Ruby	0.6943	2×10^{-20}	3.0 ms	60 GHz	H = 1.76
Nd ³⁺ :YAG	1.064	4×10^{-19}	1.2 ms	120 GHz	H = 1.82
Nd ³⁺ :glass	1.06	3×10^{-20}	0.3 ms	3 THz	I = 1.5
Er ³⁺ :silica fiber	1.55	6×10^{-21}	10.0 ms	4 THz	H/I = 1.46
Rhodamine-6G dye	0.56–0.64	2×10^{-16}	3.3 ns	5 THz	H/I = 1.33
Ti ³⁺ :Al ₂ O ₃	0.66–1.18	3×10^{-19}	$3.2\ \mu\text{s}$	100 THz	H = 1.76
CO ₂	10.6	3×10^{-18}	2.9 s	6.1 MHz	I = 1
Ar ⁺	0.515	3×10^{-12}	10.0 ns	3.5 GHz	I = 1

^aH and I indicate line broadening dominated by homogeneous and inhomogeneous mechanisms, respectively.

tabelle

Phasenverschiebung:

Entsprechend (2.5) erzeugen die resonanten Übergänge nicht nur Schwächung bzw. Verstärkung der optischen Intensität, sondern auch eine Phasenverschiebung der optischen Amplitude \mathcal{E} .

Das ist gleichbedeutend mit einem Beitrag zum Brechungsindex entsprechend

$$\bar{n} = \bar{n}_\infty \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \chi(\omega, \Delta n) \right). \quad (3.4)$$

Dieser Beitrag ist dispersiv¹⁷.

Außerdem hängt er von der erzeugten Besetzungsinvolution Δn ab.

Da optische Verstärkung große positivie Δn bedeutet, kann man Änderungen des Brechungsindex erwarten. Schätzen wir diese für den Fall homogener Verbreiterung ab.

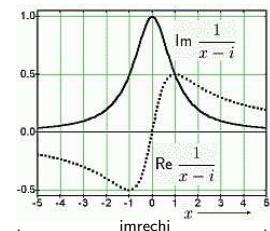
Wir setzen dazu der Reihe nach in (3.4) ein:

$$\operatorname{Re} \chi = \operatorname{Im} \chi \cdot (\Omega - \omega)/\gamma; \quad \operatorname{Im} \chi = \alpha(\omega) c_p / \omega; \quad \alpha(\omega) = -\frac{\Delta n}{n_0} \alpha_0^{\max} \frac{\gamma^2}{(\omega - \Omega)^2 + \gamma^2}; \quad \bar{n}_\infty c_p = c.$$

Das führt auf

$$n(\omega) = \bar{n}_\infty + \frac{\alpha_0^{\max} \lambda}{4\pi} \mathcal{N} \left(\frac{\omega - \Omega}{\gamma} \right) \frac{\Delta n}{n_0}$$

$$\text{Frequenzgang: } \mathcal{N}(x) = \operatorname{Re} \frac{1}{x - i} \quad (3.5)$$



¹⁷von der Wellenlänge λ bzw. Frequenz ω abhängig

Qualitativ: Im ungepumpten Medium $\Delta n = -n_0$, der resonante Beitrag hat anomale Dispersion im Bereich der Absorptionslinie.

Mit zunehmender Besetzungsinverson wächst $\Delta n/n_0$ Richtung 0, diese anomale Dispersion wird schwächer.

Im Verstärker ist $\Delta n > 0$, jetzt umgekehrt anomale Dispersion außerhalb des Verstärkungsbereichs, normale innerhalb.

Quantitativ: Praktisch immer $\alpha_0^{max} \lambda \ll 1$.
(Eindringtiefe des Lichtes viel größer als seine Wellenlänge).

Der resonante Beitrag also klein gegen \bar{n}_∞ .

Seine anomale Dispersion deshalb auch meist klein gegen die normale Dispersion von \bar{n}_∞ .

Fazit: Die (normale) Dispersion des Brechindex eines optischen Verstärkers nimmt im Resonanzbereich mit wachsender Verstärkung geringfügig zu.

Anmerkung: obwohl diese Disperionsänderung nur geringfügig ist, kann sie zu einer Änderung der optischen Länge $\bar{n}(\omega)L$ führen, die vergleichbar mit oder größer als die Wellenlänge des Lichtes ist. Das spielt in Interferometern eine große Rolle und verändert in Resonatoren die spektrale Lage der Resonanzen. Darauf werden wir später zurückkommen.

3.2 Nichtlinearität und Gewinnsättigung

Bisher haben wir die Besetzungsinverson $\Delta n > 0$ im Verstärker als gegeben betrachtet.

Sie muß natürlich geeignet in den Verstärker "hineingepumpt" werden.

Mit Details dieses Pumpprozesses befassen wir uns später.

Im Moment nehmen wir eine konstante Pumprate¹⁸ P an.

Diese muß der Inversionsgleichung (2.12) als positiver Term $2P$ hinzugefügt werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta n = 2P - 2g \frac{I}{\hbar\omega} - \frac{n_0 + \Delta n}{\tau} \quad (3.6)$$

Ohne Einstrahlung ist $I = 0$ und die Inversion strebt gegen den Gleichgewichtswert

$$\Delta n_p = 2P\tau - n_0 \quad \text{Besetzungsinverson des freilaufenden Verstärkers.} \quad (3.7)$$

Anmerkungen: ungepumpt ist das wieder $-n_0$, wie im vorigen Kapitel angenommen.

$\Delta n_p = 0$ (und damit $\alpha = g = 0$) bei der sogenannten Transparenz-Pumprate $P_t = n_0/2\tau$.

Es ist sinnvoll, das P in (3.6) durch Δn_p auszudrücken:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta n = -2g \frac{I}{\hbar\omega} - \frac{\Delta n - \Delta n_p}{\tau}$$

(3.8)

Das entspricht der Inversionsgleichung (2.12) des ungepumpten Verstärkers, in der nur n_0 durch $-\Delta n_p$ und α durch $-g$ ersetzt wurde.

Also können wir alle Ergebnisse von dort nach entsprechender Substitution übernehmen. Zunächst die Besetzungsinverson:

$$\Delta n = \frac{\Delta n_p}{1 + I/I_s(\omega)}, \quad \text{Sättigungsintensität } I_s(\omega) = \frac{2\hbar\omega}{\lambda^2 G(\omega)} \frac{\tau_{rad}}{\tau} \quad (3.9)$$

¹⁸Zahl von Atomen, die pro Zeit- und Volumeneinheit vom Grund- in den angeregten Zustand gepumpt werden. Pro Zeiteinheit ändert sich dadurch $\Delta n = n_2 - n_1$ um $2P$, weil n_2 um P zunimmt und n_1 um P abnimmt. Eine endliche Pumprate setzt natürlich voraus, daß überhaupt noch Atome im Grundzustand vorhanden sind. Alle in diesem Abschnitt hergeleiteten Formeln gelten deshalb nur, solange $\Delta n < n_0$ bleibt.

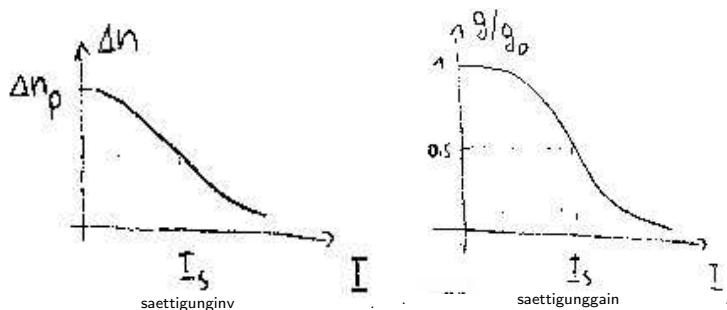
Wenn die Lichtintensität I die Sättigungsintensität übersteigt, wird die Besetzungsinversion kleiner als im freilaufenden Verstärker. Die Konsequenzen für Verstärkung und Phasenverschiebung werde ich das nächste mal behandeln.

Konsequenzen für Verstärkung und Brechindex:

$$g = \frac{g_0(\omega)}{1 + I/I_s(\omega)}, \quad \text{Kleinsignal-Gewinnkoeffizient } g_0(\omega) = \frac{\lambda^2}{4\tau_{rad}} G(\omega) \Delta n_p \quad (3.10)$$

$$\bar{n}(\omega) = \bar{n}_\infty + \frac{\alpha_0^{max}\lambda}{4\pi} \mathcal{N}\left(\frac{\omega - \Omega}{\gamma}\right) \frac{\Delta n/n_0}{1 + I/I_s(\omega)} \quad (3.11)$$

Bei Intensitäten von der Ordnung der Sättigungsintensität und darüber nimmt die Verstärkung mit wachsender Intensität also ab. Man nennt diesen Effekt Gewinnsättigung.



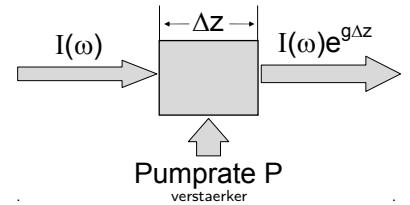
Einführung 25.05.2005.

Wir hatten begonnen mit: **Der optische Verstärker**

Gain- bzw. Verstärkungskoeffizient (homogen verbreitert):

$$g(\omega, I) = \frac{g_0(\omega)}{1 + I/I_s(\omega)}; \quad g_0(\omega) = \frac{\lambda^2}{4\tau_{rad}} G(\omega - \Omega) \Delta n_p$$

$$\Delta n_p = 2P\tau - n_0 \quad \text{Inversion des freilaufenden Verstärkers.}$$



Gewinnsättigung: $g \rightarrow 0$ für $I \rightarrow \infty$

Auswirkungen d. Gewinnsättigung

In realen Verstärker gibt es immer eine Hintegrundabsorption α_b .

die Nettoverstärkung ist also $g_{\text{net}} = g(\omega, I) - \alpha_b = \frac{g_0}{1+I/I_s} - \alpha_b$

$g_0 < \alpha_b$: Absorption dominiert immer, I nimmt monoton ab, keine Verstärkung

$g_0 > \alpha_b$:

– $g_{\text{net}} > 0$: I nimmt zu und damit g_{net} ab

– $g_{\text{net}} < 0$: I nimmt ab und damit g_{net} zu

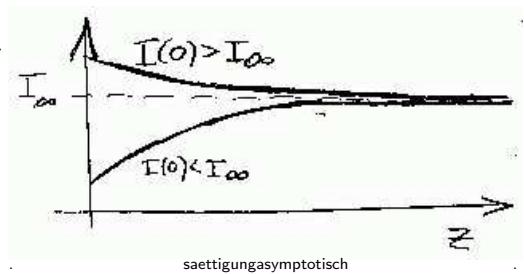
in beiden Fällen $g_{\text{net}} \rightarrow 0$, also

$$I \rightarrow I_\infty := I_s \left(\frac{g_0}{\alpha_b} - 1 \right) \quad \text{asymptotische Intensität (für } z \rightarrow \infty\text{).} \quad (3.12)$$

Kleinere Intensitäten werden verstärkt, größere Intensitäten werden geschwächt

– jeweils bis sie asymptotisch I_∞ erreichen.

Fazit: Keine Verstärkung für Eingangsintensitäten $I_0 > I_\infty$, kleinere Intensitäten werden nur bis auf I_∞ verstärkt.
Es ist sinnlos, den Verstärker zu lang zu machen.



Will man den Kleinsignal-Gain g_0 messen, muß $I(0) \ll I_s$ sein und der Verstärker hinreichend kurz.

Vorsicht: in der Literatur wird I_∞ manchmal ebenfalls als Sättigungsintensität bezeichnet.
Was gemeint ist, muß dem Zusammenhang entnommen werden.

3.3 Der inhomogen verbreiterte Verstärker

Dieses Thema führe ich dieses Jahr nicht aus, sondern nenne nur das Ergebnis:¹⁹

$$g(\omega, I) = \frac{g_0(\omega)}{\sqrt{1 + I/I_s(0)}} \quad \text{mit mittlerem Kleinsignalgain } g_0(\omega) = \frac{\lambda^2}{4\tau_{rad}} \rho(\omega) \Delta n_p \quad (3.13)$$

Der inhomogen verbreiterte Verstärker sättigt später und schwächer.

Er hat eine größere Bandbreite.

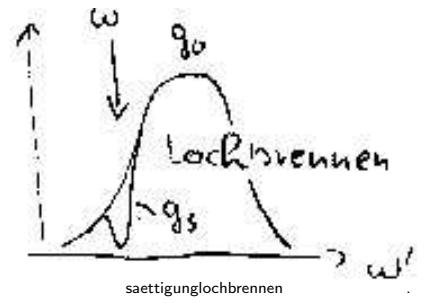
Die Sättigungsintensität ist frequenzunabhängig.

¹⁹Details s. Skripte Vorjahr

Spektrales Lochbrennen

Bisher haben wir die Gewinnsättigung nur genau bei der Frequenz ω des intensiven Lichtstrahls betrachtet.

Wesentlich mehr Einsicht in die Verhältnisse erhält man, wenn man zusätzlich schwaches schwaches Licht (das die Inversion nicht ändert) einer anderen Frequenz ω' einstrahlt und dessen Verstärkung als Funktion von ω' untersucht (Pump-Probe-Experiment).



Das Pumplicht baut die Besetzungsinvolution nämlich nur bei solchen Atomen ab, deren Resonanz Ω innerhalb der homogenen Linienbreite um die Pumpfrequenz ω liegt. Bei Testlichtfrequenzen ω' außerhalb dieses Intervalls mißt man deshalb den ungesättigten Gewinn g_0 . Eine spürbare Gainsättigung tritt nur im Intervall $|\omega' - \omega| < 2\gamma$ auf. Dort ist die Verstärkung deutlich geringer. Dieser Effekt wird (spektrales) Lochbrennen genannt, weil das Pumplicht praktisch ein Loch in die Verteilungsfunktion der Atome über die Resonanzfrequenzen brennt.

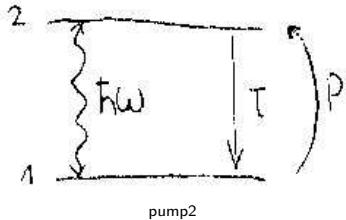
3.4 Optisches Pumpen

Immer $g \sim \Delta n_p \Rightarrow$ gute Verstärkung braucht hohes Δn_p .

Wie dies effektiv erreichen?

Betrachten wir verschiedene Varianten optischen Pumpens.

3.4.1 2-Niveau-Pumpschema



Pumplicht resonant mit dem Laserlicht:

Dann immer $\Delta n < 0$ wegen (2.13).

Schlußfolgerung: resonantes Pumpen ist ungeeignet.

Pumpen muß nicht-resonant erfolgen,
d.h. Einbeziehung weiterer Energieniveaus.

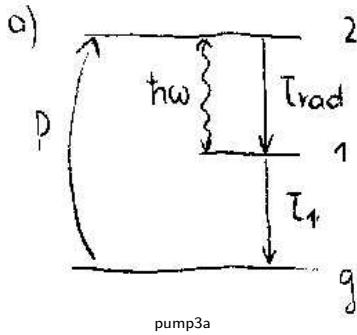
Wir werden nun die praktisch wichtigsten Varianten kurz diskutieren. Dabei Beschränkung auf

- den freilaufenden Verstärker ($I \ll I_s$), also $\Delta n \approx \Delta n_p$ und
- optimale Konfigurationen
(z.B. keine nichtstrahlenden Übergänge zwischen den beiden resonanten Niveaus).

3.4.2 3-Niveau-Pumpschema

Der einfachste Fall ist Beteiligung eines weiteren E-Niveaus. Dazu 2 Möglichkeiten.

a) Laserübergang zwischen angeregten Zuständen



Optimal ist $n_1 \ll n_2$.

Man wähle deshalb τ_1 extrem kurz.

Bilanz freilaufender Verstärker dann: $P = n_2 / \tau_r$

Für den gepumpten Übergang gelten die Formeln des inkohärenten Regimes analog, die Pumprate ist gleich dem Produkt aus Absorptionskoeffizient und Photonenflussdichte

$$P = (n_g - n_2) \sigma_p \times I_p / \hbar \omega_p$$

Einsetzen von $n_g \approx n_0 - n_2$ gibt:

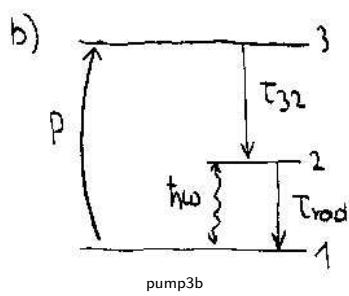
$$\Delta n_p \approx n_2 \approx \frac{p \tau_r}{2p \tau_r + 1} n_0$$

Pumpparameter: $p := \sigma_p \frac{I_p}{\hbar \omega_p}$

(3.14)

Immer positiv! Aber maximal nur $n_0/2$.

b) Pumpen in einen höheren Zustand



Optimal: schneller Transfer $3 \rightarrow 2$, wähle also τ_{32} kurz.

Bilanz dann: $P = n_2 / \tau_r$.

Pumprate: $P = p(n_1 - n_3) \approx pn_1$, also $n_2 = p \tau_r n_1$.

\Rightarrow einerseits $\Delta n_p = n_2 - n_1 = (p \tau_r - 1) n_1$

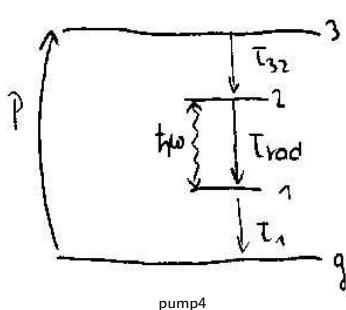
\Rightarrow andererseits $n_1 = n_0 / (p \tau_r + 1)$ wegen $n_2 = n_0 - n_1$. Zusammen:

$$\Delta n_p = n_2 - n_1 = \frac{p \tau_r - 1}{p \tau_r + 1} n_0$$

(3.15)

Positiv erst oberhalb einer Schwelle, $p \tau_r > 1$, vollständige Inversion $\Delta n_p \rightarrow n_0$ aber möglich.

3.4.3 4-Niveau-Pumpschema



Optimal: τ_{32}, τ_1 extrem kurz ($n_3, n_1 \ll n_2, n_g$)

Bilanz dann: $P = n_2 / \tau_r$.

Pumprate: $P = p(n_g - n_3)$, $n_g - n_3 \approx n_g \approx n_0 - n_2$, also

$$\Delta n_p \approx n_2 \approx \frac{p \tau_r}{p \tau_r + 1} n_0$$

(3.16)

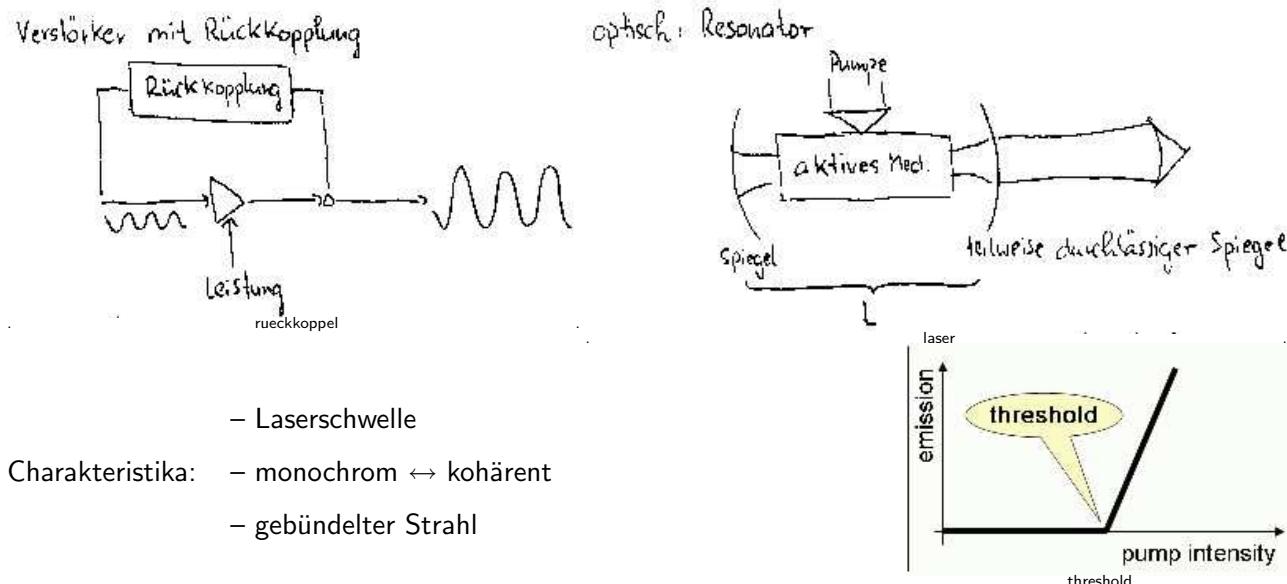
Positiv von kleinsten Pumpraten an, maximal n_0 . Beste Variante.

4 Der Laser

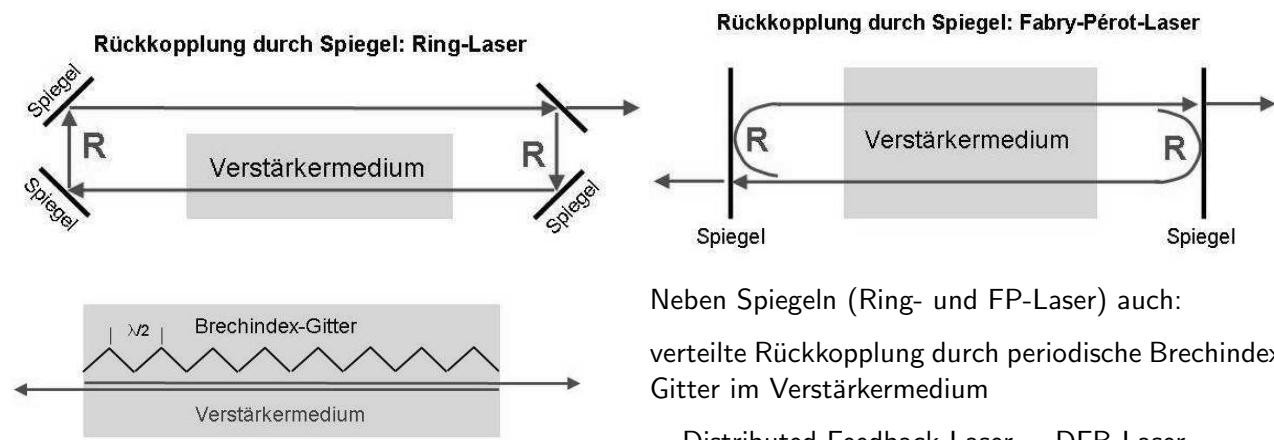
4.1 Einführung

LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

Wesen: optischer Verstärker + Rückkopplung \Rightarrow selbsterregte Schwingung



Einige Grundtypen optischer Rückkopplung in Lasern:



Wir werden nur den idealen FP-Laser exemplarisch behandeln.

4.2 Die Lasermoden

Laser emittieren Licht, ohne dass welches gleicher Wellenlänge eingestrahlt wird.

Monochromatische Lichtfelder, die abstrahlen ohne dass eingestrahlt wird, nennen wir **Lasermoden**.

Wir behandeln diese exemplarisch anhand eines idealisierten Fabry-Perot-Lasers.

Ihre Eigenschaften lassen sich aus den Maxwell-Bloch-Gleichungen herleiten.

Ich werde diese erst angeben, dann Konsequenzen ziehen und erst zuletzt die Herleitung bringen.

Qualitativ: stehende Wellen, λ so daß ganze Zahl v. Halbwellen im Resonator: $\lambda_N = 2L/N$, $N = 1, 2, \dots$

Quantitativ: zwischen den Spiegeln folgende Überlagerung hin- und rücklaufender Welle. ²⁰

$$E_N(z, t) = e^{-i\omega_N t} \cdot e^{G_N t/2} \cdot \Phi_N(z) \quad (4.1)$$

$$\Phi_N(z) \sim \Phi_N^+(z) + \Phi_N^-(z), \quad \Phi_N^\pm(z) = (\pm 1)^N e^{\pm i k_N z} \left(\sqrt{R} \right)^{\mp z/L} \quad \text{räumliche Wellenfunktion} \quad (4.2)$$

$$G_N = c_g \left[g(\omega_N, \Delta n) - \alpha_b - \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R} \right] \quad \text{Nettoverstärkung (pro Zeit) d. Mode } N \quad (4.3)$$

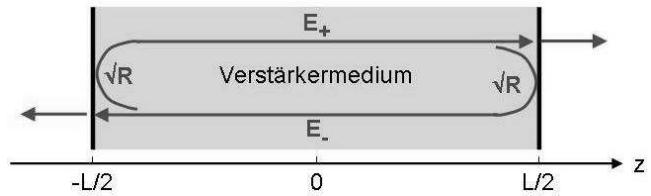
$$\omega_N : \text{frequency of mode } N, \text{ solves} \quad \frac{\omega}{c} \bar{n}(\omega, \Delta n) = k_N \quad (4.4)$$

$$k_N = N \frac{\pi}{L} \quad \text{wave number of mode } N. \text{ Internal wavelength: } \lambda_N = \frac{2\pi}{k_N} = \frac{2L}{N}. \quad (4.5)$$

²⁰Anmerkung: bei anderen Lasern hat man andere k_N und andere Φ_N , ansonsten bleiben diese Gleichungen aber erhalten. Deshalb kann der FP-Laser exemplarisch für alle anderen herhalten.

Herleitung der Modenformeln (4.1 – 4.5)

Annahmen:
 idealer FP, effektiv 1dimensional
 keine Einstrahlung
 Verstärker im inkohärenten Regime



idealer FP, effektiv 1dimensional: Gesamtfeld ist Summe aus hin- und rücklaufender Welle

$$E(z, t) = E_+(z, t) + E_-(z, t); \quad E_{\pm}(z, t) = \mathcal{E}_{\pm}(z, t)e^{-i(\omega t \mp kz)}; \quad k = \frac{\omega}{c} \bar{n}_{\infty}. \quad (4.6)$$

Verstärker im inkohärenten Regime:

Langsam variierende Amplituden genügen je einer Maxwell-Bloch-Gleichung (1.18) der Form

$$\left(\pm \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}_{\pm} = i\kappa \mathcal{E}_{\pm} \quad \kappa = \frac{\omega}{c} \bar{n}_{\text{res}} - \frac{i}{2} (g - \alpha_b) \quad (4.7)$$

Konstantes $\kappa \Rightarrow$ Lösung ist Exponentialfunktion

$$\mathcal{E}_{\pm}(z, t) = a_{\pm} e^{-i(\omega t \mp \beta z)} \quad (4.8)$$

Einsetzen liefert Disperionsrelation

$$\frac{w}{c_g} = \beta - \kappa. \quad \Rightarrow \quad \text{nur 1 freier Parameter: } \beta. \quad (4.9)$$

Gesamtfelder:

$$E_{\pm}(z, t) = a_{\pm} e^{-i\tilde{\omega}t \pm i\tilde{k}z} \quad \text{mit } \tilde{\omega} = \omega + w, \tilde{k} = k + \beta. \quad (4.10)$$

keine Einstrahlung: von den Spiegeln²¹ läuft nur reflektiertes Licht zurück

$$E_{\pm}(\mp \frac{L}{2}, t) = \sqrt{R} E_{\mp}(\mp \frac{L}{2}, t); \quad R: \text{ Intensitäts-Reflektivität d. Spiegel} \quad (4.11)$$

Einsetzen von (4.10) u. Multiplikation mit $\exp(i\tilde{k}L/2)$ gibt

$$\begin{aligned} a_+ &= \sqrt{R} a_- e^{i\tilde{k}L} \\ a_- &= \sqrt{R} a_+ e^{i\tilde{k}L} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a_- = R e^{2i\tilde{k}L} a_- \quad \Rightarrow \quad R \exp(2i\tilde{k}L) = 1. \quad (4.12)$$

Auflösen nach \tilde{k} , dabei Mehrdeutigkeit Logarithmus beachten:

$$\tilde{k} = N \frac{\pi}{L} - \frac{i}{2L} \ln\left(\frac{1}{R}\right) = k_N - \frac{i}{2} \alpha_R \quad \begin{aligned} N &= \text{beliebige ganze Zahl} = \text{Modenindex.} \\ \alpha_R &= \frac{1}{L} \ln\left(\frac{1}{R}\right) \text{ Auskoppelverlust pro Längeneinheit} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Die erste Gleichung in (4.12) wird damit zu

$$a_+ = e^{ik_N L} a_- = (-1)^N a_-. \quad (4.14)$$

²¹Eine mögliche Phasenverschiebung bei der Reflexion wird hier der Einfachheit halber vernachlässigt.

Wir setzen $a_+ = a$. Die Gesamtfelder (4.10) werden damit

$$E_{\pm}(z, t) = ae^{-i\tilde{\omega}t}(\pm 1)^N e^{\pm ik_N z} (\sqrt{R})^{\mp z/L} = ae^{-i\tilde{\omega}t} \Phi_N^{\pm}(z). \quad (4.15)$$

Die z -Abhängigkeit entspricht schon Formel (4.2).

Nun zur Zeitabhängigkeit, gegeben durch die Frequenz

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \omega + w \stackrel{(4.9)}{=} \omega + c_g(\beta - \varkappa) & \left| \begin{array}{l} \beta = \tilde{k} - k = k_N - \frac{i}{2}\alpha_R - \frac{\omega}{c}\bar{n}_\infty \\ \varkappa = \frac{\omega}{c}\bar{n}_{\text{res}} - \frac{i}{2}(g - \alpha_b) \end{array} \right. & (4.16) \end{aligned}$$

$$= \omega + c_g[k_N - \frac{\omega}{c}\bar{n}(\omega, \Delta n) + \frac{i}{2}(g - \alpha_b - \alpha_R)] =: \omega_N + iG \quad (4.17)$$

Bisher war ω beliebig im Resonanzbereich. Nun setzen wir es gleich der Modenfrequenz, $\omega = \omega_N$.

Das erfordert das Verschwinden des Realteils der eckigen Klammer, also folgt

$$\frac{\omega_N}{c}\bar{n}(\omega_N, \Delta n) = k_N \quad \text{and} \quad G = G(\omega_N) = \frac{c_g}{2}[g(\omega_N, \Delta n) - \alpha] \quad \text{q.e.d.} \quad (4.18)$$

wobei ab jetzt $\alpha = \alpha_b + \alpha_R$ die Summe von internen und Auskoppelverlusten bezeichnet.

4.3 Modenabstand

Zwischen 2 benachbarten Moden (N und $N+1$) ändert sich k_N um π/L .

Bei den meisten Lasern ist dies winzig gegen $k_N = 2\pi/\lambda_N$ wegen $\lambda \ll L^{22}$

Dann ist auch die Frequenzkorrektur $\delta\omega_N = \omega_{N+1} - \omega_N$ winzig und man kann danach linearisieren:

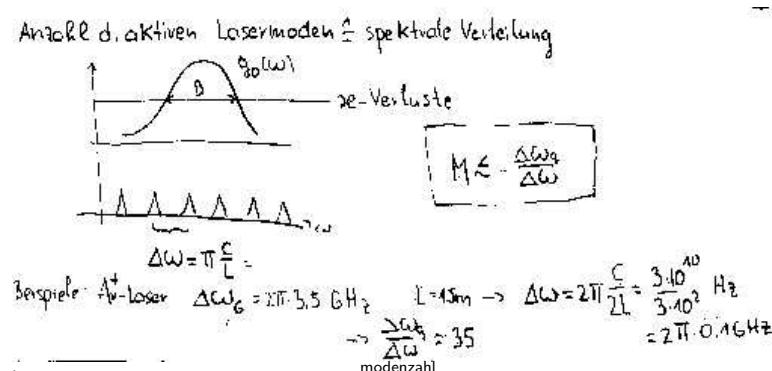
$$\frac{\pi}{L} = \frac{\omega_{N+1}}{c}\bar{n}(\omega_{N+1}) - \frac{\omega_N}{c}\bar{n}(\omega_N) = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{c}\bar{n}(\omega) \right) \Big|_{\omega=\omega_N} \cdot \delta\omega_N \quad (4.19)$$

Die Ableitung ist die inverse Gruppengeschwindigkeit, so daß bleibt

$$\delta\omega_N = \frac{\pi v_g(\omega_N, \Delta n)}{L} = 2\pi\nu_{\text{FP}}, \quad (\nu_{\text{FP}} = \frac{v_g}{2L} \text{ Umlauffrequenz im Resonator}). \quad (4.20)$$

Im Unterschied zur Gruppengeschwindigkeit c_g des kalten Resonators hängt die Gruppengeschwindigkeit v_g des "heißen" Resonators von der Besetzungsinvolution ab. Je größer diese, desto kleiner wird v_g innerhalb der Bandbreite des Verstärkers, wo die zusätzliche normale Dispersion auftritt. Der Modenabstand nimmt dort also mit wachsender Involution ab (mode pulling).

Oft ist dieser Effekt klein und v_g praktisch konstant. Dann äquidistante Moden.



²²Nicht der Fall ist das z.B. bei Halbleiterlasern mit Vertikalresonator (VCSEL).

4.4 Stationäres Regime: die Schwellenbedingung

Stationäres Regime: Inversion und Intensität werden zeitlich konstant²³.

Intensität einer Mode $|E_N|^2 = I_N(0) \exp(G(\omega_N)t)$.

Stationarität: $I_N(0) = 0$ oder $G(\omega_N) = 0$.

Stabilität: kleine Störungen dürfen nicht anwachsen $\Rightarrow G(\omega_N) \leq 0 \forall N$.

Dafür gibt es nur 2 Möglichkeiten:

$G < 0$ für alle Moden N : Alle Intensitäten klingen ab, der Laser geht aus. (4.21)

$G(\omega_l) = \max_N G(\omega_N) = 0$: Die Mode l mit maximalem Gain hat konstante Intensität. Alle anderen Moden gehen aus. (4.22)

Mit (4.18) lautet die letzte Bedingung

$\max_N g(\omega_N, \Delta n_{th}) = \alpha$

Maximale Verstärkung muss Verluste kompensieren. Diese Schwellenbedingung ist eine Bestimmungsgleichung für die Schwelleninversion Δn_{th} . Der Index th steht dabei für das Englische threshold=Schwelle. (4.23)

Das Maximum wird im Idealfall nur von einer Mode realisiert, der Lasermode, sagen wir $N = l$.

Im stationären Laserzustand muß dann gelten:

- die Intensitäten aller anderen Moden $N \neq l$ verschwinden (weil sie gedämpft sind),
- die gesamte Intensität kommt aus der Lasermode l (monochromatisches Laserlicht).
- der Laser ist entweder aus (unter der Schwelle: $I = 0$ wenn $\Delta n < \Delta n_{th}$, alle Moden klingen ab)
- oder der Laser ist an, (über der Schwelle) $I \neq 0$ und es gilt $\Delta n = \Delta n_{th}$.
- $\Delta n > \Delta n_{th}$ ist nicht möglich, andernfalls würde die Intensität der Lasermode anwachsen.

²³nach eingigen Einschwingvorgängen.

4.5 Die Bilanzgleichungen (in Einmoden-Approximation)

Bisher stillschweigend angenommen: Δn konstant.

Jetzt: Δn variiere zeitlich; aber hinreichend langsam.

Genauer: langsam im Vergleich zur Umlaufzeit des Lichts im Resonator.

\Rightarrow Moden folgen dem Δn adiabatisch, Laser bleibt einmodig in Mode $N = l$.

Bewegungsgleichungen bei optimalem 4-Niveau-Pumpen (s. Kapitel zum Verstärker):

$$\text{Inversion: } \frac{\partial}{\partial t} \Delta n = p \cdot (n_0 - \Delta n) - \frac{\Delta n}{\tau_r} - \sigma \frac{I}{\hbar \omega} \Delta n \quad (\text{Pumpparameter } p = \sigma_p \frac{I_p}{\hbar \omega_p}) \quad (4.24)$$

$$= pn_0 - \left(p + \frac{1}{\tau_r} \right) \Delta n - \sigma \frac{I}{\hbar \omega} \Delta n \quad (4.25)$$

$$\text{Intensität: } \frac{\partial}{\partial t} I = G_l I \quad \text{mit der Nettoverstärkung } G_l = c_g \sigma \Delta n - c_g \alpha \quad (4.26)$$

Übergang zu dimensionslosen Gleichungen: Zeiteinheit τ : $1/\tau = p + 1/\tau_r$,
 Inversionszahl $N = V \Delta n$, (V – Resonatorvolumen)
 Photonenzahl S : $I/\hbar \omega = v_g S/V$.

$$\partial_t N = \tau V p n_0 - N - \frac{\sigma v_g \tau}{V} N S \quad \partial_t S = \tau G_l S = \left(\frac{\tau v_g \sigma}{V} N - \frac{\tau \alpha}{\sigma} \right) S$$

$\partial_t N = P - N - BNS$	Inversionsbilanz	$P = \tau V p n_0 = V \Delta n_p$ Pumprate
$\partial_t S = BNS - S/\tau_{ph}$	Photonenbilanz	$B = \sigma(\omega) \tau v_g / V$
		$\tau_{ph} = 1/(\tau \alpha v_g)$ Photonenlebensdauer

(4.27)

Hieraus lassen sich wesentliche Lasereigenschaften ableiten.

4.6 Stationäres Regime: typische Kennlinie eines Lasers

Behauptung:

trägt man die emittierte Leistung eines Lasers über der Pumprate P auf, so ergibt sich typisch nebenstehendes Bild.

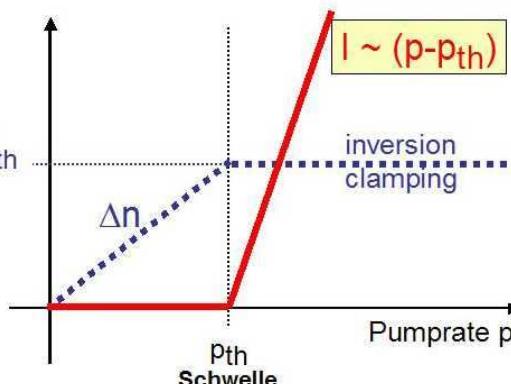
Unter einer Pumpschwelle P_{th} wächst die Δn_{th} Inversion monoton, es wird aber praktisch nichts emittiert. Die Pumpleistung wird letztlich in Wärme umgewandelt.

Über der Schwelle stagniert die Inversion und die Emission wächst linear, praktisch alle zusätzliche Pumpleistung wird in emittierte Laserleistung umgewandelt.

Beweis: Wir suchen zeitunabhängige Lösungen $N = N_s$ und $S = S_s$.

Photonenbilanz stationär: $(BN_s - 1/\tau_{ph})S_s = 0$. Einer der beiden Faktoren muss null sein.

A) Photonenzahl $S_s \neq 0$ (Laser über der Schwelle)



Der Vorfaktor vor S_s muss verschwinden, also

$$\boxed{N_s = \frac{1}{B\tau_{ph}} =: N_{th}} \quad \text{Inversion bleibt konstant gleich dem Schwellenwert} \quad (4.28)$$

Inversionsbilanz $0 = P - N_{th} - BN_{th}S_s = P - N_{th} - S_s/\tau_{ph}$ auflösen nach S_s :

$$S_s = \tau_{ph}(P - N_{th}) \text{ bzw. } \boxed{S_s = \tau_{ph}(P - P_{th})} \quad \text{mit Schwellenpumprate } P_{th} = N_{th}. \quad (4.29)$$

Lineare Kennlinie !

Gilt aber nur für $P > P_{th}$! (weil sonst $S_s < 0$)

B) Photonenzahl $S_s = 0$ (Laser aus)

Dann folgt N_s aus stationärer Inversionsbilanz:

$$\boxed{N_s = P} \quad \text{wächst monoton mit } P, \text{ erreicht Schwellenwert } N_{th} \text{ genau bei } P = P_{th} \quad (4.30)$$

Diese Lösung wird instabil für $P > P_{th}$: Dann $(BN_s - \tau/\tau_{ph}) > 0$ und Fluktuationen der Photonenzahl werden verstärkt !

4.7 Spektren im stationären Regime

4.7.1 Homogene Verbreiterung

Diesen Fall haben wir eigentlich schon erledigt.

Über der Schwelle ist die Mode mit der maximalen Verstärkung ungedämpft, alle anderen klingen zeitlich ab, es bleibt ein **einmodiges Spektrum** übrig (extrem schmale Linie).

Anmerkung: Das ist allerdings stark idealisiert.

Insbesondere wurde der Einfluß der spontanen Emission vernachlässigt. Diese erzeugt ständig Photonen mit etwa der gleichen Rate $r_{sp}(\Delta n)$ in allen Lasermoden. Die mittlere Photonenzahl in den Seitenmoden ist deshalb nicht exakt null, sondern $-r_{sp}(\Delta n)/G(\omega_N, \Delta n)$. Oberhalb der Schwelle wächst dies allerdings nicht mit der Pumpleistung, weil Δn beim Schwellenwert stehenbleibt, so daß alle zusätzliche Pumpleistung in Photonen der Hauptmode umgesetzt wird. Hinreichend weit über der Schwelle dominiert dann die Hauptmode, der Idealzustand wird asymptotisch für große P erreicht.

4.7.2 Inhomogene Verbreiterung

Laser mit inhomogen verbreitertem Übergang können andere Spektren haben.

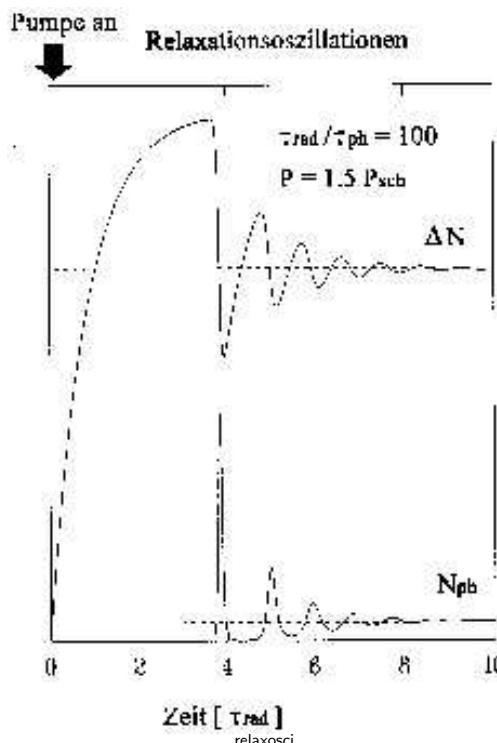
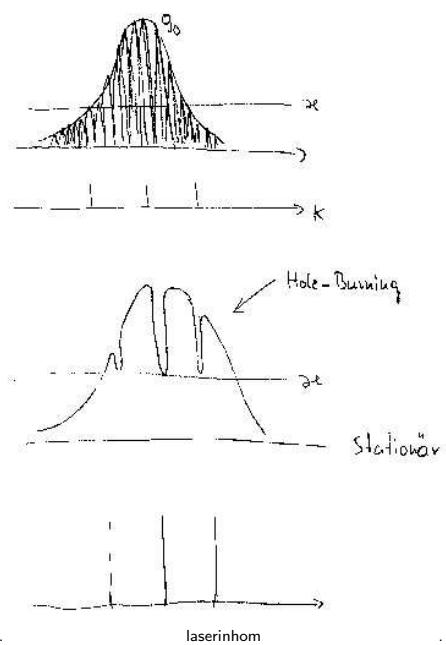
Wenn die inhomogene Breite größer ist als der Modenabstand und die homogene Breite klein dagegen, dann koppelt jede Mode an eine andere Atomsorte.

Ist nun noch der Transfer von Anregungsenergie zwischen den Atomesorten vernachlässigbar, dann bildet praktisch jede Mode mit "ihren" Atomen einen eigenen Laser.

Man hat sozusagen mehrere unabhängige Laser parallel geschaltet (je einen für jede Mode), die alle den gleichen Resonator nutzen.

Bei jeder Mode mit $g_0 > \alpha$ (= das Kappa in der Skizze), stellt sich dann eine solche Intensität ein, daß $g = \alpha$, man hat ein **mehrmodiges Spektrum**.

Zwischen den Moden bleibt die Verstärkung groß (spektrales Lochbrennen).



4.8 Relaxationsoszillationen (Laser über der Schwelle)

Ändert man bei einem Laser die Pumpleistung, so geht seine Intensität nicht momentan in den neuen stationären Zustand über. Man beobachtet in der Regel gedämpfte Schwingungen der Intensität um den neuen stationären Wert herum (Relaxationsoscillationen).

Die Abbildung zeigt ein mit den Ratengleichungen gerechnetes Beispiel, bei dem die Pumpleistung bei $t = 0$ plötzlich angeholt wird (die Photonenzahl ist hier mit N_{ph} bezeichnet, die Inversionszahl mit ΔN). Man kann 3 Etappen unterscheiden.

Zuerst steigt nur die Inversion an, die Intensität bleibt verschwindend.

Irgendwann übersteigt die Inversion den Schwellenwert (gestrichelt). Ab dann nimmt die Photonenzahl zu. Weil sie zuvor extrem klein ist, dauert es einige Zeit, bis die stimulierten Rekombination spürbare Werte erreicht. So lange wächst die Inversion weiter, der Anstieg der Photonenzahl beschleunigt sich, bis dann die 2. Etappe mit einem kurzen Lichtblitz (spike) beginnt.

Dieser Blitz baut die überschüssige Inversion in kürzester Zeit wieder bis unter den Schwellenwert ab. Dadurch geht der Laser erst mal wieder aus, die Inversion wächst wieder an und das Spiel beginnt von vorn. Der zweite Blitz ist allerdings schon kleiner, der dritte noch kleiner usw.

In der dritten Etappe zeigen Photonenzahl und Inversion nur noch kleine gedämpfte harmonische Schwingungen. Dabei eilt die Photonenzahl der Inversion um eine viertel Periode voraus.

Die Parameter der gedämpften harmonischen Schwingung in der letzten Phase kann man analytisch aus den

Ratengleichungen erhalten.

$$\text{Ansatz: } N(t) = N_{\text{th}} + n(t) \quad \& \quad S = S_s + s(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{\text{th}}, S_s: \text{stationäre Lösungen} \\ n, s: \text{kleine Abweichungen davon, die nur in niedrigster (erster) Ordnung berücksichtigt werden.} \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Einsetzen in die Bilanzgleichungen (4.27), Vernachlässigung von Produkten kleiner Größen:

$$\partial_t n = -B(nS_s + N_{\text{th}}s) - n \quad \partial_t s = BnS_s \quad (4.32)$$

Von hier führen viele Wege nach Rom. z.B. nochmals ableiten der ersten Gleichung und einsetzen der zweiten. Das gibt

$$\ddot{n} + \frac{2}{\tau_0} \dot{n} + \omega_0^2 n = 0 \quad \text{gedämpfter harmonischer Oszillator} \quad (4.33)$$

mit

$$\frac{2}{\tau_0} = 1 + BS_s = 1 + B\tau_{\text{ph}}(P - P_{\text{th}}) = 1 + \frac{P - P_{\text{th}}}{P_{\text{th}}} \quad \text{bzw. } \boxed{\frac{2}{\tau_0} = \frac{P}{P_{\text{th}}}} \quad \text{Dämpfung} \quad (4.34)$$

$$\omega_0 = \sqrt{BN_{\text{th}} \cdot BS_s} \quad \text{bzw. } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{P - P_{\text{th}}}{P_{\text{th}}\tau_{\text{ph}}}}} \quad \text{Resonanzfrequenz} \quad (4.35)$$

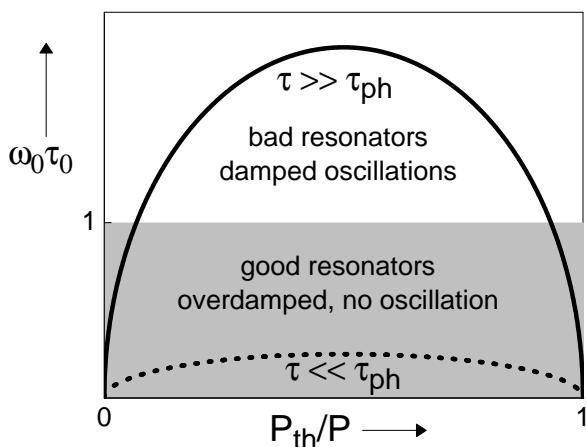
Beide Größen hier dimensionslos! (die Einheiten von τ_0 u. ω_0 sind τ bzw. $1/\tau$) (4.36)

Das ist die Gleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators mit der Resonanzfrequenz ω_0 und der Abklingzeit τ_0 .

Die Frequenz wächst mit der Wurzel der Überschuß-Pumpleistung $P - P_{\text{th}}$, die Dämpfung linear mit P . τ_0 wird nie negativ \Rightarrow Relaxationsoszillationen sind immer gedämpft²⁴!

Grenze zwischen schwacher Dämpfung und starker Dämpfung (Kriechfall) bekanntlich bei $\omega_0\tau_0 = 1$. Einsetzen gibt

$$\omega_0\tau_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P_{\text{th}}}{\tau_{\text{ph}}P} \left(1 - \frac{P_{\text{th}}}{P}\right)} \quad \text{mit Dimension} \quad \boxed{\omega_0\tau_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_{\text{ph}}}} \cdot \sqrt{\frac{P_{\text{th}}}{P} \left(1 - \frac{P_{\text{th}}}{P}\right)}} \quad (4.37)$$



Als Funktion der inversen relativen Pumprate P_{th}/P ist das ein Halbkreis

Sein Maximum ist < 1 (Kriechfall für alle P) falls $\tau_{\text{ph}} > \tau/16$, d.h. bei hohen Photonenlebensdauern = guter Resonator.

Ist umgekehrt $\tau_{\text{ph}} \ll \tau/16$ (schlechter Resonator), so hat man schwach gedämpfte Oszillationen fast im gesamten Pumpbereich außer unmittelbar über der Schwelle und bei extrem hohen Pumpraten.

²⁴solange das Verstärkermedium im inkohärenten Regime arbeitet. Andere Fälle s.u.

4.9 Erzeugung kurzer Pulse

Im letzten Teil des Semesters werden wir den Durchgang extrem kurzer Pulse durch Medien behandelt. Solche Pulse konnte man erst erzeugen, nachdem geeignete Laser zur Verfügung standen. Mit den zugrundeliegenden Prinzipien wollen wir uns nun kurz befassen.

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß unser (idealer Modell-) Laser zwar Einschaltblitze und Relaxationsoszillationen zeigt, aber letztlich immer stationär wird. Für die genannten Kurzzeituntersuchungen braucht man reguläre Folgen kurzer Pulse. Deren Erzeugung erfordert also besondere Methoden.

Aus Zeitgründen kann ich hier nur die wichtigsten aufzählen und ihre Grundideen kurz skizzieren.

Idee von Gewinnschaltung (gain switching)

Die Pumprate periodisch an und ausschalten. Und zwar so, daß nach jedem Anschalten nur der erste Lichtblitz auftritt.

Idee von Güteschalten (Q-switching)

Die Güte des Resonators (also $1/\tau_{ph}$) periodisch hoch und runter schalten, so daß der Laser an und aus geht. Ansonsten wie bei Gewinnschaltung.

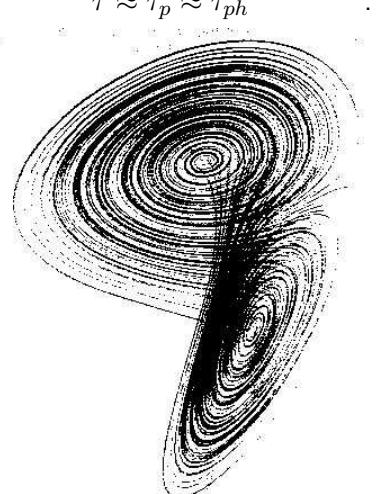
Idee von Modensynchronisation

Zu einem bestimmten Zeitpunkt $M \gg 1$ Moden annähernd gleicher Intensität phasengleich machen. Ihre konstruktive Überlagerung gibt dann eine Riesen-Intensität $\sim M^2$. Aber nur kurzzeitig (Puls), weil die Modenphasen verschieden schnell rotieren, also wieder auseinanderlaufen und zu gegenseitiger Auslöschung führen. Im FP-Resonator gilt nun erstaunlicherweise: ihre Phasen laufen nach einiger Zeit wieder zusammen und man hat den nächsten Blitz usw. usf.

Modensynchronisation wird in den Übungen vertieft.

4.10 Laserklassen

Die Welt der Laser ist sehr vielfältig. Man kann sie nach verschiedensten Gesichtspunkten in Gruppen einteilen. Zum Schluß der Vorlesung einige Worte über eine Einteilung in Klassen, die uns wieder zu den Maxwell-Bloch-Gleichungen zurückführt, mit denen wir begonnen haben. Diese Klasseneinteilung richtet sich wie folgt nach den Verhältnissen zwischen der Phasenrelaxationszeit τ_p , der Inversionslebensdauer τ und der Photonenlebensdauer τ_{ph} (des kalten Resonators):

Klasse	Beschreibung	Parameterkonstellation
A	Sowohl die Inversion als auch die Polarisation relaxieren schnell im Vergleich zum optischen Feld (Resonator hinreichend hoher Qualität). Inversions- und Polarisationsgleichung können adiabatisch eliminiert werden, so daß von den Maxwell-Bloch-Gleichungen nur jene für das optische Feld übrig bleibt. Es treten keine Relaxationsoszillationen auf.	$\tau, \tau_p \ll \tau_{ph}$
B	Die Polarisation relaxiert viel schneller als die Inversion und das optische Feld. Es kann nur die Polarisationsgleichung eliminiert werden. Das ist der Fall, den wir in diesem Kapitel immer stillschweigend vorausgesetzt haben. Es treten gedämpfte Relaxationsoszillationen auf.	$\tau_p \ll \tau, \tau_{ph}$
C	Alle Relaxationszeiten sind von der gleichen Größenordnung. Die vollen Maxwell-Bloch-Gleichungen schlagen zu. Sie sind interessanterweise isomorph zu den berühmten Lorenz-Gleichungen für Konvektion in Flüssigkeiten. Sie können ein entsprechend komplexes dynamisches Verhalten zeigen, bis hin zu einer chaotischen Bewegung, z.B. auf dem Lorenz-'Schmetterling'. Wer mehr darüber wissen möchte, lese das schöne Buch von C.O.Weiss und R.Vilaseca: " <i>Dynamics of Lasers</i> ", VCH Verlagsgesellschaft mbH, dem ich auch die Abbildung des Lorenz-Schmetterlings rechts entnommen habe.	$\tau \approx \tau_p \approx \tau_{ph}$  lorenz

Die Tabelle auf der letzten Seite gibt einen Überblick, welche Laser zu welcher Klasse gehören. Sie stammt auch aus dem Weiss/Vilaseca. Die Besonderheiten der verschiedenen Laser werden in der nächsten Vorlesung in größerem Detail behandelt.

Table 1.4.1. Laser classes.

Active material	Pumping	Broadening	Class
CO ₂	discharge, optical, laser	homogeneous	B
Ar ⁺ , Kr ⁺	discharge	inhomogeneous	C
He-Ne	discharge	inhomogeneous	C
He-Xe	discharge	inhomogeneous	C
He-Cd	discharge	inhomogeneous	C
Ruby	lamp, laser	homogeneous	B
Nd:YAG	lamp, laser	homogeneous	B
Nd:glass	lamp, laser	inhomogeneous	B
Alexandrite	lamp, laser	homogeneous	B
GSGG	lamp, laser	homogeneous	B
Ti:sapphire	lamp, laser	homogeneous	B
Ni,CO:MgF ₂	lamp, laser	homogeneous	B
color-center	lamp, laser	homogeneous	A
Dye	laser	homogeneous	A
Semiconductor	diode, laser	homogeneous	A
Optically pumped gas laser	laser	homogeneous*	C
Chemical gas laser (HF; I)	chemical reaction	homogeneous	B

* Sometimes with inhomogeneous effects due to coherent pumping.

laserklassen

Die Vorlesung wurde von Dr. Akimov vertreten. Zur Orientierung und der Vollständigkeit halber hier der entsprechende Skript-Teil aus den Vorjahren:

4.11 Lasermaterialien und -typen

- a) Festkörper:
 - Einbau "aktiver" Atome in einen Festkörper als Wirt
 - Phasenrelaxation durch WWD mit Gitterschwingungen
 - \rightarrow homogene Verbreiterung zur Gewinnbaudicke im GHz-Bereich ($T_p \approx 1\text{ ns}, \frac{1}{2} k_B T_p \approx 6 \cdot 10^{-3}\text{ eV}$)

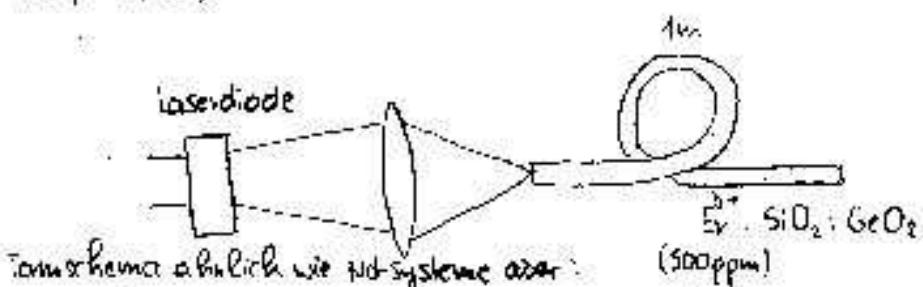
Pumpprozeß: optisch (Blitzlampen)

• Rubin: 3-Niveau-System

• Neodym-YAG: 3+4-Niveau System (Temperatur)

- Glas: große inhomogene Verbreiterung

• Seltenerddotierte Fasern
(Er, Sm, ...) (Silikat)



Temperatur abhängig wie Nd-Systeme aber: (500 ppm)

$\Delta \omega_c \approx 20 \text{ THz}$ (inhomogen, Zentrenvielfach)

Verstärker: 30 dB (bei 5 mW Pumpleistung)
 $\rightarrow \text{Tl}^{3+}, \text{Al}_2\text{O}_3$

b) Gase: Pumpprozeß über Gasenladung (Elektronenstoß)

• He-Ne-Gemisch

Beimengung $\text{Hg} \rightsquigarrow$ Elektronen

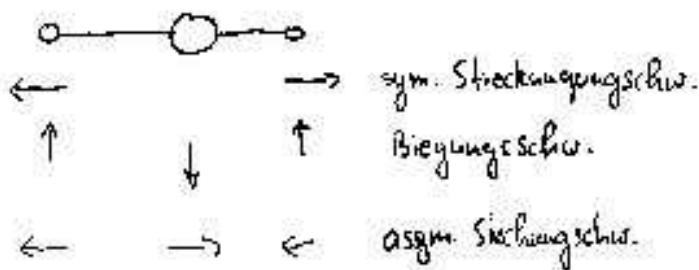
\hookrightarrow geringe Drücke, große freie
Weitläufe $\hat{=}$ geringer Bezug

(He-Cd \rightsquigarrow UV Emission)
Metalldampfaser, Cd-Ion

④ Ionenlaser (Ar^+ , Kr^+)

⑤ Schwingungsübergänge (CO_2 , CO)

Schwingungstypen CO_2



c) Farbstoffe: 4-Niveau-System

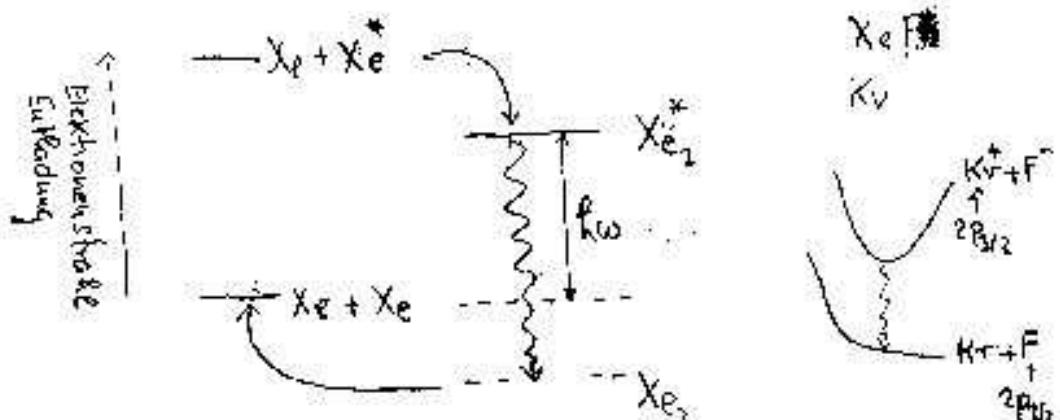
große Bandbreiten THz (inhomogen, Schwingungs- u. Rotationsausmaus)

Neubsoption

d) Excimere

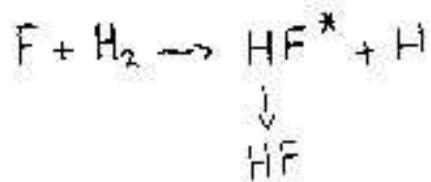
Edelgase:

$\text{Xe} + \text{Xe} \rightarrow$ kein Molekül (da abstoßende Kräfte)

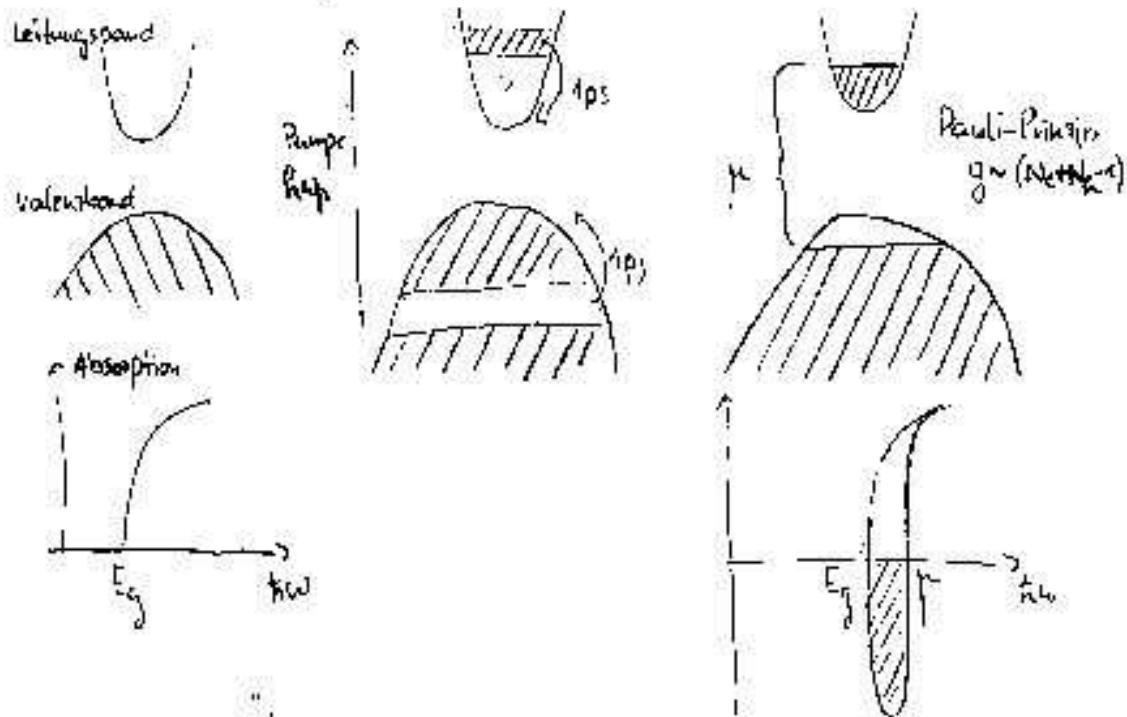


lasmat2

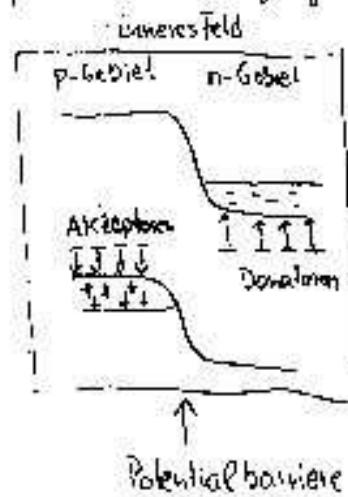
e) Chemische Laser



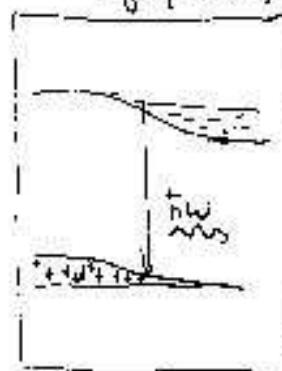
f) Halbleiter: Injektion



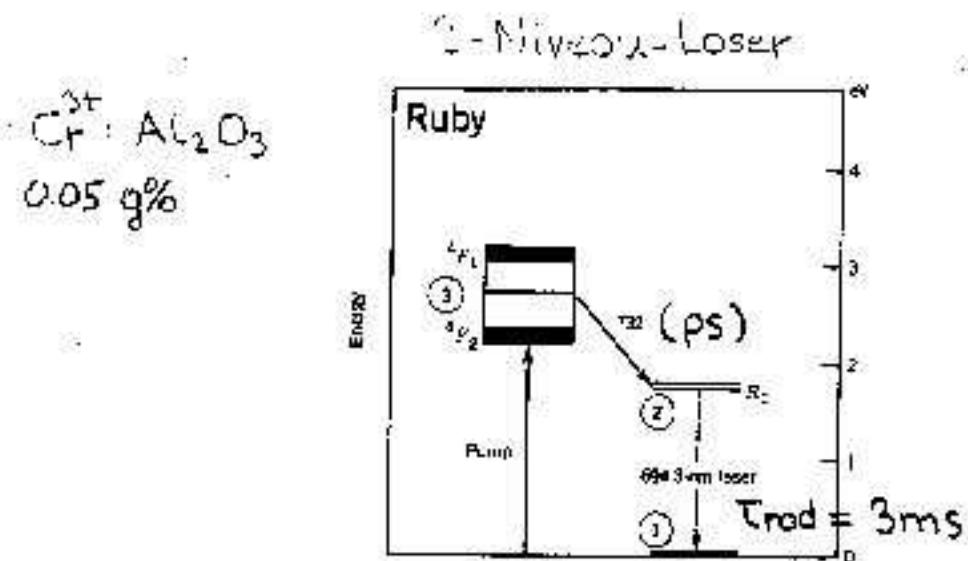
Injektion: ph-Übergang



Gegenfeld (Injektion)

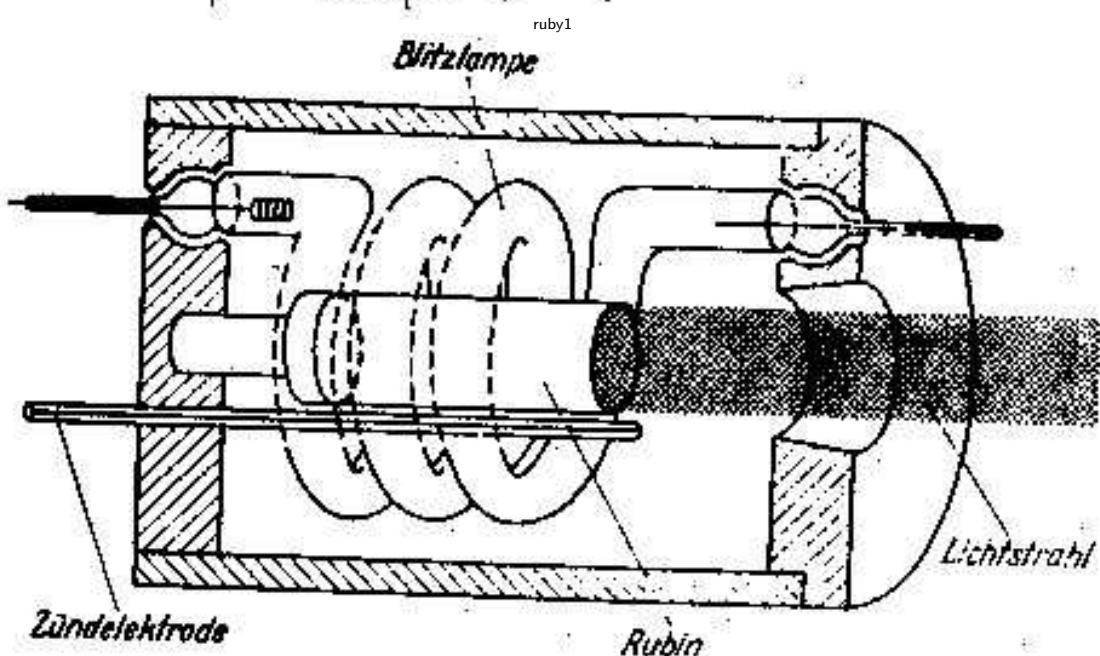


Einige konkretere Details nur zum Rubinlaser:



$\Delta\omega_g \approx 10 \text{ GHz}$
 $\tau_p \approx 100 \text{ ps}$

} Stöße mit Phononen



Rubin-Laser

Maiman, Phys. Rev. Letters 4, 564 (1960)

ruby2

5 Kohärente Effekte – Ultrakurze Impulse

Wir betrachten den Durchgang ultrakurzer Lichtimpulse durch Medien.

Ultrakurze Lichtimpulse: Impulsdauer τ_d klein gegen Phasenrelaxationszeit τ_p .

Während der Impulsdauer wird das induzierte Dipolmoment ausschliesslich durch die Atom-Licht-Wechselwirkung bestimmt. Keine phasenzerstörenden Prozesse durch Stöße bzw. endl. Lebensdauer. Dieses Regime wird deshalb auch kohärentes Regime genannt, die damit verbundenen Effekte kohärente Effekte.

Kohärente Effekte qualitativ phänomenologisch:

- Optische Nutation: Es wird ein Rechteckimpuls eingestrahlt. Die Amplitude des abgestrahlten Impulses ist periodisch moduliert.
- freier Induktionszerfall: intensives "Nachleuchten" nach Ende des Impulses.
- Photonen-Echo: es werden 2 kurze Impulse im Abstand Δt eingestrahlt und nach der doppelten Zeit $2\Delta t$ kommt noch ein zusätzlicher Impuls heraus.
- selbstinduzierte Transparenz: ein für Gleichlicht undurchlässiges Medium kann von bestimmten Impulstypen verlustfrei durchquert werden.

Die Maxwell-Bloch-Gleichungen erlauben ein tieferes Verständnis der kohärenten Effekte:

5.1 Material-Gleichungen im kohärenten Regime

Kohärentes Regime mathematisch: $|\partial_t \mathcal{P}| \ll |\mathcal{P}|/\tau_p$.

formal erreichbar durch Grenzübergang $\tau_p \rightarrow \infty$. Weil immer $\tau_p < 2\tau$ damit auch $\tau \rightarrow \infty$.

Die Polarisations- und Inversionsgleichung (Materialgleichungen) vereinfachen sich damit zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P} = i(\omega - \Omega)\mathcal{P} + \frac{d^2}{i\hbar} \Delta n \mathcal{E} \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta n = \frac{1}{\hbar} \text{Im}(\mathcal{E}^* \mathcal{P}) \quad (5.1)$$

Als Parameter treten hier nur noch das atomare Übergangs-Dipolmoment $d = |d_{12}|$ und die Frequenzverstimmung $\omega - \Omega$ auf.

Diese Gleichungen wären leicht zu lösen, wenn \mathcal{E} zeitlich konstant wäre. Bei optischen Impulsen ist dies aber eine Funktion der Zeit, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$. Das scheint hoffnungslos. Wie oft in der Physik, rettet uns aber die

Existenz einer Erhaltungsgröße: $|\mathcal{P}|^2 + d^2 \Delta n^2 = d^2 n_0^2 = \text{const.}$ (5.2)

Beweis: einfach zeitlich ableiten und Gleichungen (5.1) einsetzen.

Wegen $|\mathcal{P}|^2 = \Re(\mathcal{P})^2 + \Im(\mathcal{P})^2$ ist dies die Gleichung eines Rotationsellipsoids in den Variablen $\Re(\mathcal{P})$, $\Im(\mathcal{P})$ und Δn .

Es ist außerordentlich nützlich, nun zu folgenden normierten Größen überzugehen,

$$\text{Inversion: } \Delta n = w \cdot n_0 \quad (5.3)$$

$$\text{Polarisation: } \mathcal{P} = (u - iv) \cdot n_0 d \quad (u, v, w \text{ reell} \in [-1, 1]) \quad (5.4)$$

$$\text{Resonanzverstimmung: } \Delta = \Omega - \omega \quad (5.5)$$

$$\text{Rabi-Frequenz: } \Omega_R = \frac{d}{\hbar} \mathcal{E} \quad (5.6)$$

und den normierten Realteil u und Imaginärteil v der Polarisation sowie die normierte Inversion w zu einem Vektor

$$\vec{\mu} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z \quad (5.7)$$

zusammenzufassen.

Die Erhaltungsgleichung (5.2) wird dann einfach $\vec{\mu}^2 = 1$ und die Maxwell-Bloch-Gleichungen (5.1) erhalten die Vektorform

$$\frac{d}{dt}\vec{\mu} = \vec{\mu} \times \vec{R} \quad \vec{R} = \Re[\Omega_R]\vec{e}_x - \Im[\Omega_R]\vec{e}_y - \Delta\vec{e}_z \quad \text{Rabi-Präzessionsfeld.} \quad (5.8)$$

Diese Gleichung ist aus anderen Gebieten der Physik wohlbekannt.

Sie ist z.B. äquivalent zur Kreiselgleichung, $\vec{\mu}$: Achsenrichtung des Kreisels, $\vec{R} \sim$ Schwerkraft.

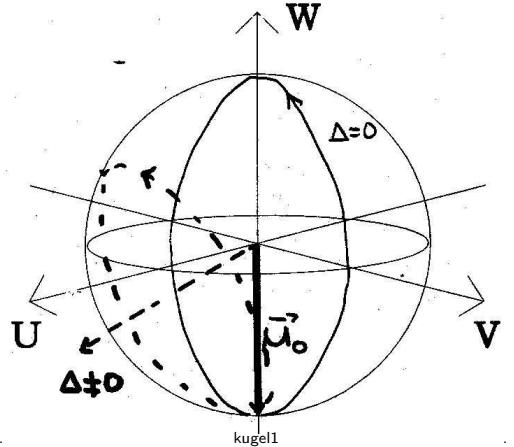
Das komplizierte Problem des Durchgangs eines nicht vollständig resonanten kurzen Impulses ist damit auf ein gut verstandenes mechanisches Analogon (Kreisel) zurückgeführt.

$$\Rightarrow \vec{\mu} \text{ präzessiert um Achse entlang } \vec{R} \text{ mit Kreisfrequenz } R = \sqrt{|\Omega_R|^2 + \Delta^2}. \quad (5.9)$$

Das ist nebenstehend für den resonanten Fall ($\Delta = 0$, durchgezogen) und für positive Verstimmung ($\Delta > 0$, gestrichelt) sowie für reelles $\mathcal{E}(t)$ dargestellt.

Die Analogie zum Kreisel ist allerdings begrenzt. Bei diesem bleibt das Schwerkraftfeld konstant. In einem optischen Puls ändert sich \mathcal{E} und damit auch der Rabi-Vektor \vec{R} in der Regel zeitlich. Der allgemeine Fall ist ziemlich schwierig, er ist analog zur Bewegung eines magnetischen Dipols (Dipolmoment $\sim \vec{\mu}$) in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld ($\sim \vec{R}$).

Wir werden nur einige wichtige Spezialfälle diskutieren.



5.2 Resonante Kopplung $\omega = \Omega$

Vereinfachung: Beschränkung auf reelles $\mathcal{E}(t)$. \Rightarrow Rabi-Frequenz Ω_R ist reell und $\vec{R} = \Omega_R\vec{e}_x$. $\vec{\mu}$ rotiert um die x-Achse.

Anfangsbedingung: vor dem Impuls bei $t = 0$ sind alle Atome im Grundzustand ($\Delta n = -n_0$ bzw. $w = -1$) und die Polarisation ist null ($u = v = 0$), also $\vec{\mu}_0 = (0, 0, -1)$.

Während der Impulsdauer gilt für den Rotationswinkel θ :

$$\dot{\theta} = \Omega_R = \frac{d}{\hbar}\mathcal{E} \quad \text{bzw.} \quad \theta(t) = \int_0^t dt' \Omega_R(t') \quad (5.10)$$

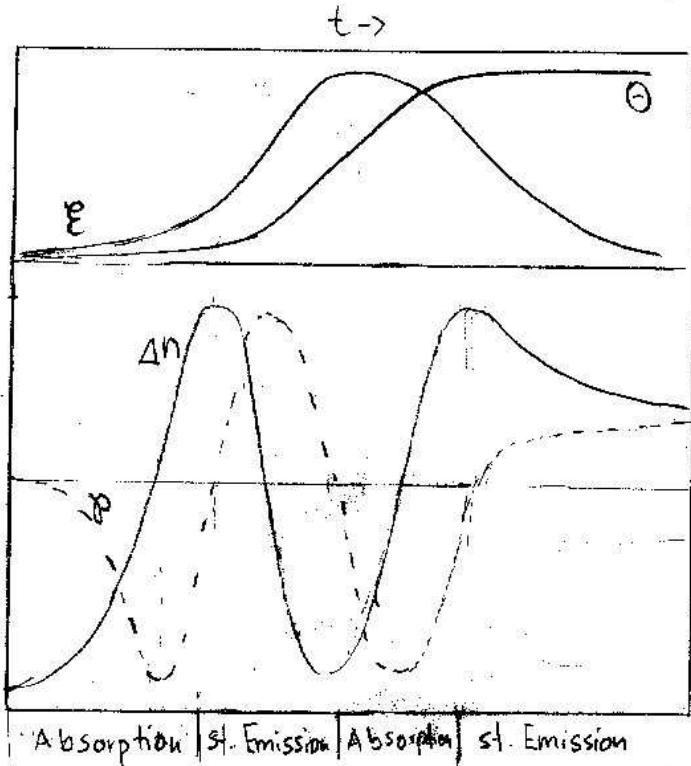
Zusammenfassend für die physikalischen Größen:

$$\mathcal{P} = in_0 d \sin(\theta) \quad \& \quad \Delta n = -n_0 \cos(\theta) \quad \text{mit} \quad \theta(t) = \frac{d}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \mathcal{E}(t'). \quad (5.11)$$

Die optische Amplitude $\mathcal{E}(t)$ treibt $i\mathcal{P}/d$ und Δn auf Kreis mit Radius n_0 . Man nennt das **optische Nutation**²⁵.

Der Rotationswinkel auf diesem Kreis ist proportional zur Fläche unter der Kurve $\mathcal{E}(t)$ bis zur Zeit t .

normierte Feldstärkefläche (nicht \mathcal{E} selber oder $I \sim \mathcal{E}^2$) bestimmt
Kopplung, Retardierung



- optische Nutation: P u. Δn schwingen um Extremalwerte
 - nach Impuls verbleibt Medium i. A. in einem angeregten Zustand ($P \neq 0$, $\Delta n \neq -n_0$)
- Klassifizierung nach Impulsfläche $\Theta = \Theta(\infty)$:
- π -Impulse ($\Theta = \pi, 3\pi, \dots$) invertieren Medium
 - 2π -Impulse ($\Theta = 2\pi, 4\pi, \dots$) bringen Medium in Ausgangszustand

Bisher haben wir $\mathcal{E}(t)$ als gegeben betrachtet. An der Eintrittsoberfläche der Probe wird dies durch die externe optische Pulsquelle bestimmt. Im Innern der Probe gibt es aber eine Rückwirkung der Polarisation auf die Feldstärke. Dadurch kann die Pulsform beträchtlich verändert werden. In dicken Proben können diese Ausbreitungseffekte sehr vielfältig und komplex sein.

Wir werden uns hier auf hinreichend dünne Proben beschränken.

Ausbreitungseffekte

²⁵Aus meiner Sicht wäre das in Analogie zum Kreisel eher eine Präzession, der Begriff optische Nutation hat sich aber eingebürgert.

Rückwirkung auf der Polarisation auf das optische Feld = 3. Maxwell-Bloch-Gleichung:

$$\left(\partial_z + \frac{1}{c_g} \partial_t \right) \mathcal{E}(t, z) = \frac{i}{2} \mu_0 \omega c_p \mathcal{P}(t, z) \quad \stackrel{\eta=t-z/c_g, \xi=z}{\Rightarrow} \quad \partial_\xi \mathcal{E}(\eta, \xi) = \frac{i}{2} \mu_0 \omega c_p \mathcal{P}(\eta, \xi). \quad (5.12)$$

Diese Gleichung kann nun über ξ integriert werden (unter Konstanthaltung der relativen zeitlichen Position η auf dem Impuls). Danach Rücktransformation in die alten Koordinaten. Resultat:

$$\mathcal{E}(t, z) - \mathcal{E}\left(t - \frac{z}{c_g}, 0\right) = \frac{i}{2} \mu_0 \omega c_p \int_0^z dz' \mathcal{P}\left(t - \frac{z-z'}{c_g}, z'\right). \quad (\text{für } \omega = \Omega = E_2 - E_1) \quad (5.13)$$

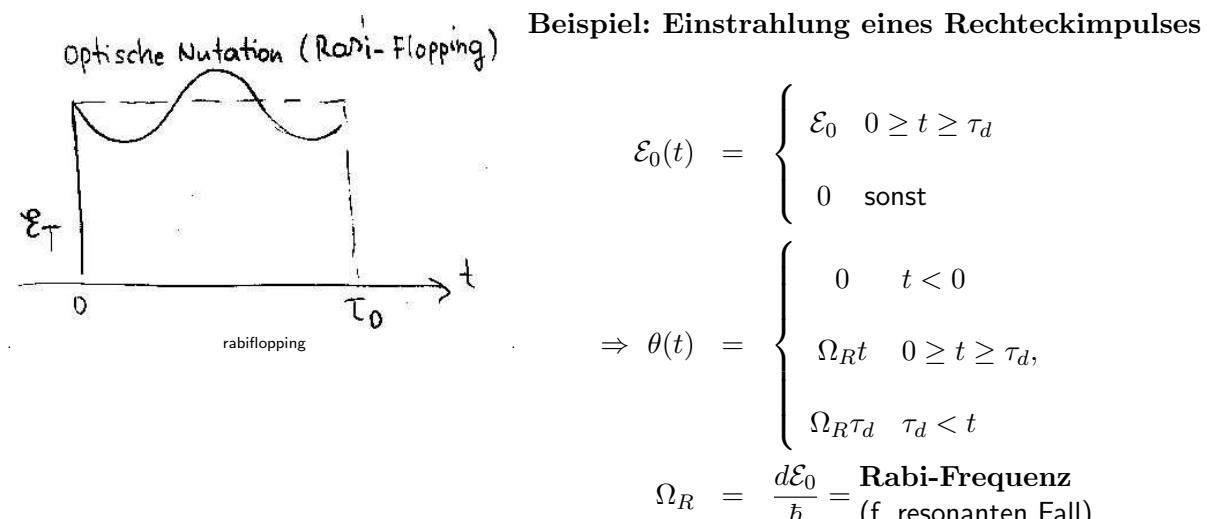
Qualitative Diskussion:

- links steht die Änderung der Feldamplitude nach Durchlaufen der Strecke z .
- Ohne Medium, $\mathcal{P} \equiv 0$, ist diese Änderung null, d.h., Die Amplitude bei z zur Zeit t ist gleich der Amplitude, die am Ort $z=0$ zu einer um die Laufzeit z/c_g früheren Zeit $t - z/c_g$ herrschte.
- Mit Medium ergibt sich eine Änderung durch das Polarisationsintegral rechts.
- In diesem kann man die Polarisation gemäß (5.19) wieder durch ein \mathcal{E} -Integral ausdrücken.
- Diese Integralgleichung ist nicht allgemein lösbar.

Ab jetzt Vereinfachung: dünne Probe, Pulsdauer groß gegen Durchlaufzeit, $\tau_d \gg L/c_g$.
(1mm Dicke entspricht ca. 3ps Laufzeit).

Retardierungsterme z/c_g vernachlässigbar, rechte Seite durch einfallendes Feld $\mathcal{E}_0(t)$ bestimmt, also²⁶

$$\mathcal{E}_T(t) = \mathcal{E}_0(t) - \frac{1}{2} \frac{n_0 d}{\epsilon_0} k L \frac{c_p}{c} \sin[\theta(t)], \quad \theta(t) = \frac{d}{\hbar} \int_0^t dt' \mathcal{E}_0(t'). \quad (5.14)$$



Am Ende der Probe tritt ein "modulierter" Rechteckimpuls aus. Die optische Amplitude oszilliert mit der Rabi²⁷-Frequenz $\Omega_R = d\mathcal{E}_0/\hbar$ um die eingestrahlte Rechteckamplitude.

²⁶Größenordnungen: $n_0 d / \epsilon_0 \approx e a_B n_0 / \epsilon_0 \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 5.3 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cdot 1 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3} / 8.85 \cdot 10^{-12} (\text{As/Vm}) \approx 10^6 \text{ V/m}$.
Lichtleistung $P \approx c_g \epsilon_0 \mathcal{E}^2$, 10^6 V/m entsprechen etwa 2.7 MW/m^2 . Weiterhin $kL = 2\pi L/\lambda \gg 1$.



Dies ist meßbarer Ausdruck der **optischen Nutation** und wird auch als **Rabi-Flopping** bezeichnet.

Experimentell wurde dieser Effekt erstmals 1968 nachgewiesen:

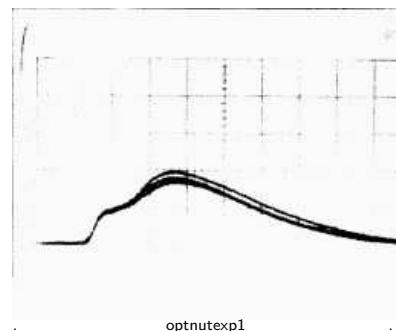
**PHYSICAL REVIEW
LETTERS**

VOLUME 21 26 AUGUST 1968 NUMBER 9

OBSERVATION OF THE OPTICAL TRANSIENT NUTATION EFFECT*

G. B. Hocker† and C. L. Tang‡
Cornell University, Ithaca, New York
(Received 14 June 1968)

The optical nutation effect has been observed on a rotational-vibrational transition in
gaseous $5F_2$ at 10.6μ .
optnutexpla



Die "Wellen" auf dem rechts dargestellten ca. 200ns breiten Impuls sind die Nutation. Um die (damals) schwierige Erzeugung kurzer Impulse zu umgehen, haben sich Brewer und Shoemaker (PRL 27, 145 (1968)) die unten dargestellte pfiffige Alternative mit Dauerstrich-Lasern ausgedacht. Die Atome befinden sich in einer "Stark-Zelle". Sie sind normalerweise nicht resonant zum Laser. Erst durch Anlegen eines kurzen elektrischen Impulses wird der optische Übergang durch den Stark-Effekt resonant zum Laser gemacht und die optische Nutation setzt ein (s. rechts). Sie klingt dann infolge der von uns vernachlässigten Phasenrelaxation wieder ab.

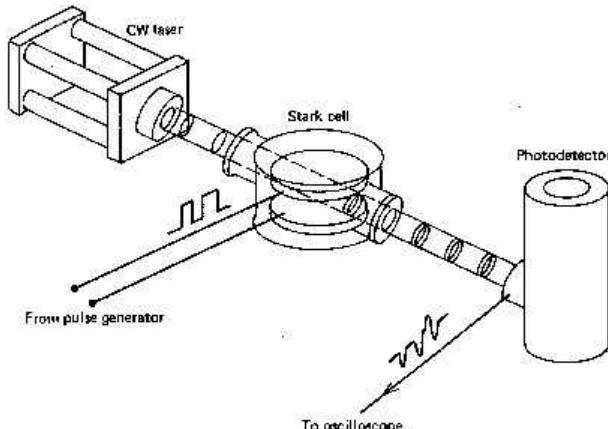


Fig. 21.3 Schematic of the Stark switching apparatus that is used for observing optical transients. [After R. G. Brewer, Physics Today 30, 50 (1977).]
shenfig213

Was passiert nach Ende des Impulses?

Freier Induktionszerfall: \Rightarrow Übung

Nach Ende des eingestrahlten Impulses bleibt der Nutationswinkel stationär, $\theta(t > \tau_d) = \theta_0 = \Omega_R \tau_d$,

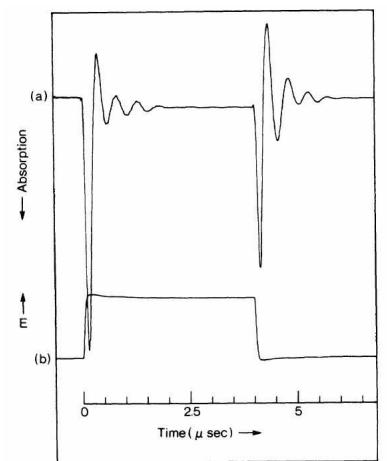
im Medium herrscht die konstante Polarisation $\mathcal{P} = -in_0 d \sin(\theta_0)$,
diese kann riesig sein, weil alle atomaren Dipole in Phase schwingen.

Durch diesen makroskopischen Dipol wird konstantes Licht mit einer Amplitude entsprechend Formel (5.19) abgestrahlt.

Das kann natürlich nicht ewig andauern, sonst hätte man ein optisches perpetuum mobile.

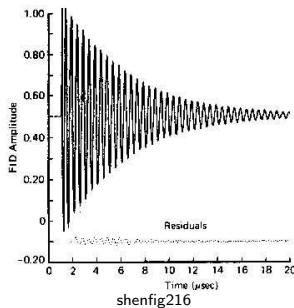
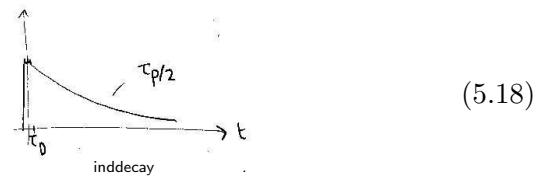
Das Dipolmoment klingt mit der Phasenrelaxationszeit τ_p ab.²⁸

²⁸In unseren Formeln hatten wir vereinfachend $\tau_p^{-1} = 0$ gesetzt, was während des kurzen Pulses möglich ist, aber nicht für die lange Zeit danach.



Entsprechend fällt die Intensität des abgestrahlten Lichtes exponentiell:²⁹

$$t > \tau_d : \quad I_T \sim |\mathcal{E}_T|^2 \sim |\mathcal{P}|^2 \stackrel{(5.19)}{\sim} n_0^2 e^{-2t/\tau_p}.$$



Zusammenfassend: nach Ende eines ultrakurzen resonanten intensiven Anregungspulses emittiert die Probe eine extrem starke Strahlung, deren Intensität mit der doppelten Phasenrelaxationszeit abklingt. Man nennt dies **freien Induktionszerfall**, manchmal auch Superstrahlung.

Im Bild rechts neben der Stark-Zelle (s. oben) ist diese Phase nach Ende des elektrischen Pulses ebenfalls deutlich zu sehen. Die Oszillationen sind Schwebungen zwischen Laser und der nun wieder nichtresonanten Superstrahlung. Links sind analoge weiter verfeinerte Messergebnisse dargestellt, die eine genaue Bestimmung der Phasenrelaxationszeit zulassen.

²⁹Anmerkung: Natürlich führt die Abstrahlung selbst zu einer Abnahme der Polarisation. Deswegen ist die Abklingrate des freien Induktionszerfalls bei langer Phasenrelaxationszeit und starken Intensitäten feldabhängig. Das ist in Formel (5.19) nicht enthalten, weil wir im Integral für den Nutationswinkel θ die Feldstärke durch \mathcal{E}_0 approximiert haben, was nur richtig ist, solange eingestrahlt wird. Der Zerfall ist dann auch nicht mehr rein exponentiell (s. z.B. [Y.R.Shen, The principles of nonlinear optics, Wiley 1984, p. 387].

Einführung 29.06.05. Wir hatten letzte Woche:

5. Kohärente Effekte - Ultrakurze Impulse $\tau_d \ll \tau_p, \tau$

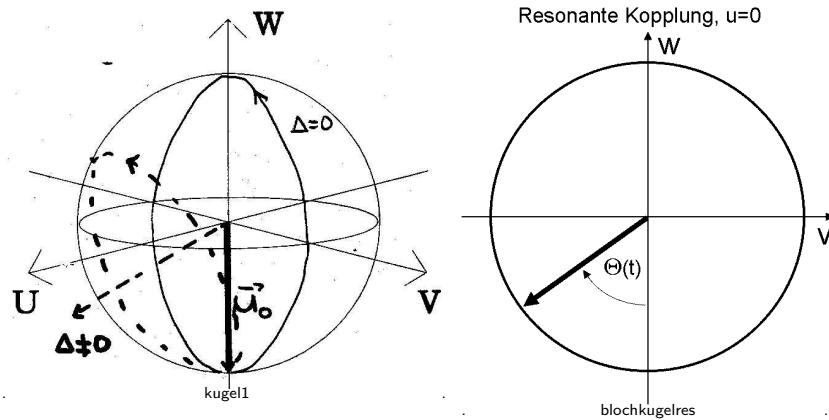
5.1 Materialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \vec{\mu} = \vec{\mu} \times \vec{R}$$

$$\vec{R} = (\text{Re}\Omega_R, -\text{Im}\Omega_R, -\Delta), \quad \Omega_R = d\mathcal{E}/\hbar$$

$$\vec{\mu} = (u, v, w), \quad \mathcal{P} = dn_0(u - iv), \quad \Delta n = wn_0$$

$\vec{\mu}$ präzessiert mit Winkelgeschwindigkeit $|\vec{R}|$ um Achse in Richtung \vec{R}



5.2 Resonante Kopplung $\omega = \Omega$ u. $\text{Im}\Omega_R = 0$

$$\mathcal{P} = in_0d \sin(\theta) \quad \& \quad \Delta n = -n_0 \cos(\theta) \quad \text{mit} \quad \theta(t) = \frac{d}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \mathcal{E}(t').$$

\mathcal{P} und Δn schwingen 90° phasenversetzt = optische Nutation.

Transmittierte Amplitude (dünne Probe):

$$\mathcal{E}_T(t) = \mathcal{E}_0(t) - \frac{1}{2} \frac{n_0d}{\varepsilon_0} kL \frac{c_p}{c} \sin [\theta(t)], \quad \theta(t) = \frac{d}{\hbar} \int_0^t dt' \mathcal{E}_0(t').$$

= eingestrahlte Amplitude plus Rückwirkung optischer Nutation

= Rabi-Oszillationen (Rabi flopping)

nach Ende eines ultrakurzen Impulses: freier Induktionszerfall

6 Photonenecho

6.1 Was ist das?

Input: $\pi/2$ u. π Puls in Abstand T

Output: 3 Pulse in Abstand T

der 3. Puls heisst Photonenecho



Wie lässt sich das mit der Bloch-Kugel verstehen?

Schlüssel ist die inhomogene Verbreiterung.

Bedeutet: die Atome haben verschiedene Verstimmungen $\Delta \neq 0$.

- ⇒ 2 Fragen:
 - wie wirkt $\Delta \neq 0$?
 - wie wirkt Unterschiedlichkeit der Δ ?

6.2 Vor betrachtung 1: Auswirkung einer endlichen Resonanzverstimmung

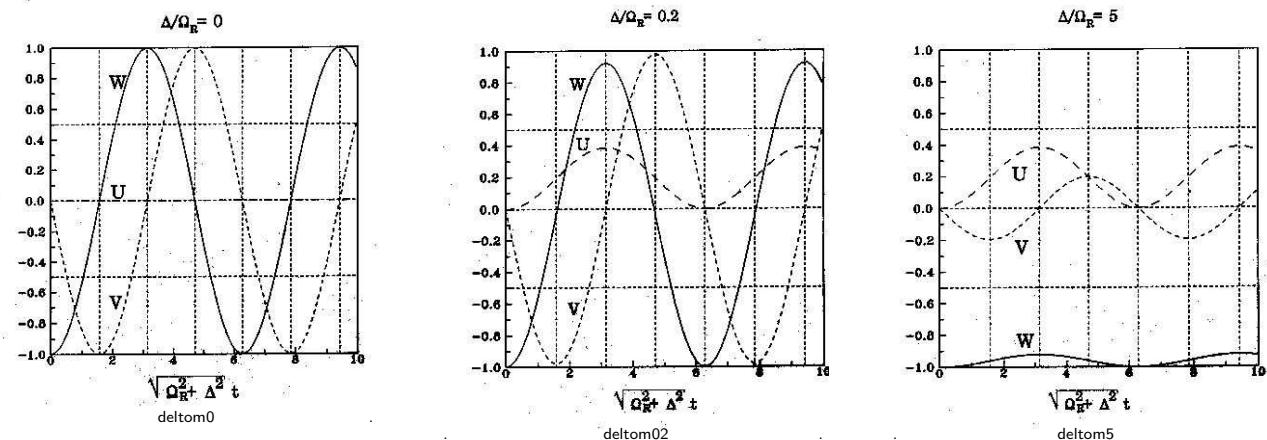
$\omega \neq \Omega$. Betrachten wieder die Anfangsbedingung: $u = v = 0, w = -1$, d.h. $\vec{\mu}(0) = -\vec{e}_z$.

Wieder Vereinfachung: Rechteckimpuls der Länge τ_d . Dann $\Omega_R = \text{const.}$

$$\Rightarrow \vec{\mu} \text{ präzessiert um schräge Achse entlang } \vec{R} \text{ mit Kreisfrequenz } R = \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}. \quad (6.1)$$

- Für endliche Verstimmung ($\Delta \neq 0$) wird Realteil Polarisation $u \neq 0$,
- Inversion w erreicht nicht mehr 1, es bleibt $\Delta n < n_0$, keine vollständige Inversion.
- Die Umlauffrequenz R hängt ab von $|\Delta|$.

Hier die entsprechenden zeitlichen Entwicklungen für verschiedene representative Verstimmungen:



Man beachte die Skalierung der Zeitachse.

6.3 Vor betrachtung 2: Auswirkung der inhomogenen Verbreiterung

1. Die Atome sind unterschiedlich stark nichtresonant

Atome mit verschiedenen Resonanzfrequenzen haben Rabi-Präzessionsfelder $\vec{R} = \Omega_R \vec{e}_x - \Delta \vec{e}_z$ verschiedener Länge und Richtung.

Entsprechend bewegen sich die Spitzen ihrer $\vec{\mu}$ -Vektoren auf verschiedenen Bahnen verschieden schnell über die Oberfläche der Einheitskugel.

Nach Ende eines Impulses befinden sie sich im allgemeinen an verschiedenen Stellen der Kugel und die entsprechenden Polarisationen können sich gegenseitig (teilweise) wegheben.

Diese komplizierte Situation wir bei sehr starken Impulsen aber vermieden:

wenn $\Omega_R \gg \Delta \Omega$, dann $\Omega_R \gg \Delta$ für praktisch alle Atome und $\vec{R} = \Omega_R \vec{e}_x - \Delta \vec{e}_z \approx \Omega_R \vec{e}_x$.

\Rightarrow bei hinreichend starken Impulsen werden praktisch alle Atome trotz inhomogener Verbreiterung resonant angeregt.

Das bedeutet: wir können in diesem Falle die Ergebnisse übernehmen, die wir das letzte mal für den rein resonanten Fall erhalten haben. Insbesondere bleibt dann $u \approx 0$, der Vektor $\vec{\mu}$ rotiert mit der für alle Atome (annähernd) gleichen Rabi-Frequenz Ω_R entlang des Längengrades $u = 0$ der Einheitskugel vom Südpol (alle Atome in Grundzustand) über den Nordpol (vollständige Besetzungsinversion) wieder zum Südpol usw. usf. bis der Impuls zu Ende ist.

2. Inhomogene Verbreiterung ist Quelle zusätzlicher Polarisationsrelaxation

Am Ende eines solchen kurzen intensiven Impulses haben alle Atome annähernd die gleiche Polarisation und Inversion entsprechend Formel (5.19).

Danach wird aber $\Omega_R = 0$, damit $\vec{R} = -\Delta \vec{e}_z$, d.h. die $\vec{\mu}$ rotieren nun entlang eines Breitenkreises.

Genauer: der Abstand von der "Erdachse" fällt wegen der Phasenrelaxation $\sim e^{-t/\tau_p}$. Und die Besetzungsinversion nimmt $\sim e^{-t/\tau}$ ab, also

$$u_\Omega(t) = \sin(\theta)e^{-t/\tau_p} \sin(\Delta t) \quad v_\Omega(t) = -\sin(\theta)e^{-t/\tau_p} \cos(\Delta t) \quad w_\Omega(t) = (1 - \cos(\theta))e^{-t/\tau} - 1. \quad (6.2)$$

bzw.

$$P_\Omega(t) = i n_0 d \sin(\theta) e^{-(i\Delta + 1/\tau_p)t} \quad \Delta n_\Omega(t) = n_0 \left[(1 - \cos(\theta))e^{-t/\tau} - 1 \right]. \quad (6.3)$$

Hier ist θ die Impulsfläche, t die Zeit seit Ende des Impulses und Δt das Produkt von Resonanzverstimmung und Zeit.

Oft ist τ_p viel kleiner als τ , dann "spiralt" $\vec{\mu}$ erst zur Achse und rutscht danach ganz langsam diese zum Südpol herunter, wie in der Abbildung dargestellt.

Entscheidend ist: die Rotationsfrequenz auf dem Breitenkreis (der Spirale) ist gleich der Verstimmung Δ .

Atome verschiedener Resonanzfrequenz rotieren zwar auf dem gleichen Breitenkreis, aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Konsequenz: nach einiger Zeit haben die Polarisationsbeiträge der verschiedenen Atome des inhomogen verbreiterten Ensembles verschiedene Phasen und heben sich mehr oder weniger gegenseitig weg.

Also: im inhomogen verbreiterten Ensemble relaxiert die Polarisation schneller als τ_p .

Quantitativ für die Gaussverteilung:

$$\mathcal{P}(t) = \int d\Omega P_\Omega(t) = \frac{i n_0 d \sin(\theta)}{\sqrt{\pi \Delta \Omega}} \int d\Omega e^{-\frac{\Omega - \Omega_0}{\Delta \Omega}^2} e^{i\Omega t} e^{-(i\omega + 1/\tau_p)t} \sim \exp \left[-\left(\frac{\Delta \Omega}{2} t \right)^2 \right]. \quad (6.4)$$

Für Zeiten größer als die inverse inhomogene Breite $\tau_{inh} = 1/\Delta \Omega$ zerfällt die Polarisation sehr schnell.

Dieser Polarisationszerfall infolge inhomogener Verbreiterung ist aber reversibel.

Ein Effekt, der das sehr schön zeigt, ist das Photonenecho.

6.4 Wirkung des $\pi/2$ -Pulses

Der $\pi/2$ -Impuls soll das System vom Südpol der Blochkugel auf einen Punkt des Äquators bringen.

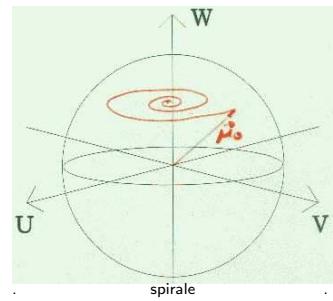
Bei $\Delta = 0$ ist das immer der Fall.

Bei inhomogener Verbreiterung landen aber die verschiedenen Ω i.allg. an ganz verschiedenen Stellen.

Um das zu vermeiden, muss der $\pi/2$ -Impuls so kurz und intensiv gemacht werden, dass gilt

$$\Omega_R \gg \Delta \Omega \quad \text{Rabe-Frequenz gross gegen inhomogene Breite} \quad (6.5)$$

Dann landet das System in guter Näherung auf einem Punkt des Äquators.



6.5 Was passiert zwischen den Pulsen?

Die verschiedenen Ω rotieren nun verschieden schnell entlang des Äquators.

Konsequenz: die mittlere Polarisation klingt schnell ab, die Abstrahlung entsprechend.

Letztlich sind die verschiedenen Ω gleichmäßig über den Äquator verschmiert.

6.6 Wirkung des π -Pulses

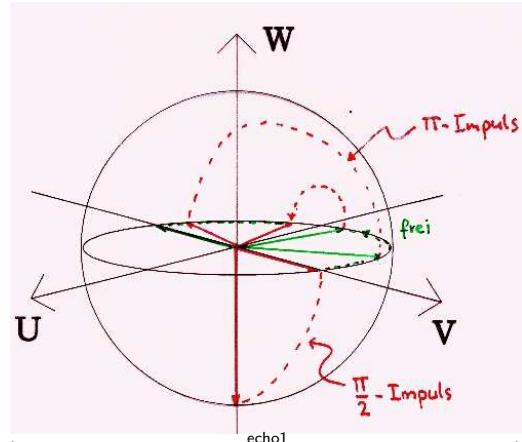
Der π -Puls muss ebenfalls wieder extrem kurz sein,

so dass \vec{R} praktisch in Richtung der u -Achse zeigt.

Er dreht dann jedes $\vec{\mu}$ um 180° um die u -Achse.

Das ist äquivalent zu $v \rightarrow -v$.

Jeder Dipol kommt so an die Stelle des Äquators, die er erreicht hätte, wenn er zwischen den beiden Impulsen mit gleicher Geschwindigkeit rückwärts gelaufen wäre.

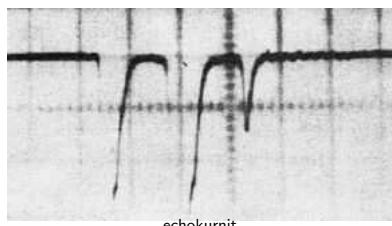


6.7 Was passiert nach dem π -Puls?

Die Dipole drehen sich wieder wie zwischen den ersten beiden Pulsen mit der Winkelgeschwindigkeit Δ vorwärts.

Also treffen sich alle Dipole zur Zeit $2T$ in genau im Ausgangspunkt.

Die entsprechende makroskopische Polarisation erzeugt einen kurzen Lichtblitz, das Photonenecho.



Das erste gemessene Photonenecho aus Kurnit et. al PRL 13, 567 (1964). Horizontalachse: Zeit. Erst kommt der $\pi/2$ -Impuls, dann der π -Impuls und zum Schluß in gleichem Zeitabstand etwas kleiner das Photonenecho.

Aus der Abnahme der Größe des Photonechos mit wachsendem Abstand T zwischen den beiden ersten Impulsen kann man die Phasenrelaxationszeit τ_p bestimmen.

Es ist durchaus sinnvoll, sich noch eine andere Darstellung des gleichen Sachverhalts anzuschauen (aus dem Buch von Shen, s. Funote 29):

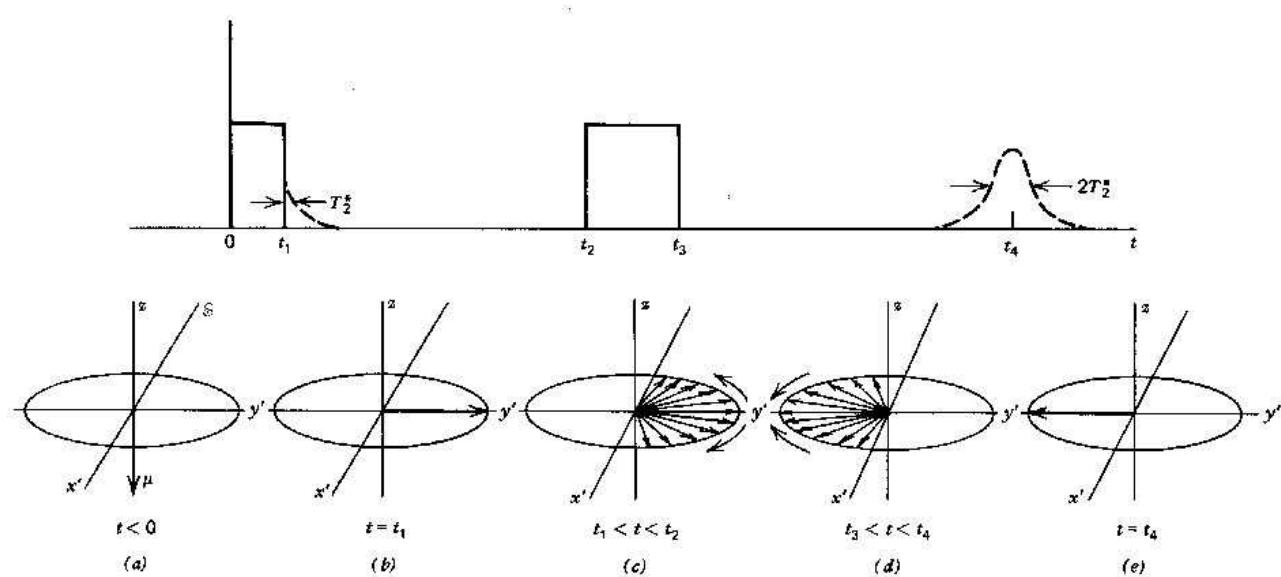


Fig. 21.7 Schematic drawings describing the echo phenomenon. The upper picture shows the pulse excitation sequence. The lower picture depicts the precession of the pseudo-dipoles in the rotating frame at various times.

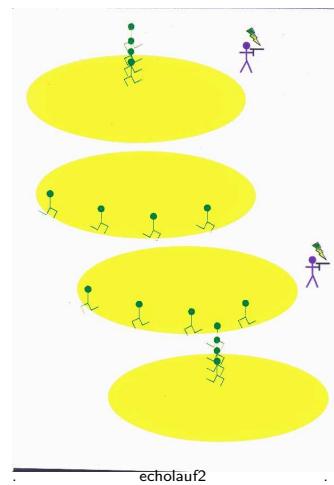
Man kann sich das Photonenecho wieder anhand der Läufer im Stadion klarmachen.

Der erste Impuls realisiert die Situation unmittelbar nach dem Startschuß: alle Läufer laufen von der gleichen Stelle los, aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten.

Dadurch zieht sich das Feld auseinander, der Mittelwert des Ortes der Läufer tendiert gegen die Stadionmitte (null).

Wenn bei einem 2. Schuß (Impuls) die Läufer umkehren, haben es die schnellen weit zurück zum Start, die langsamen nah.

Wenn alle mit unveränderter Geschwindigkeit zurücklaufen, kommen alle gleichzeitig beim Start an.



7 Selbstinduzierte Transparenz

7.1 Beschreibung des Phänomens

Hier ein Beispiel aus der Originalliteratur:

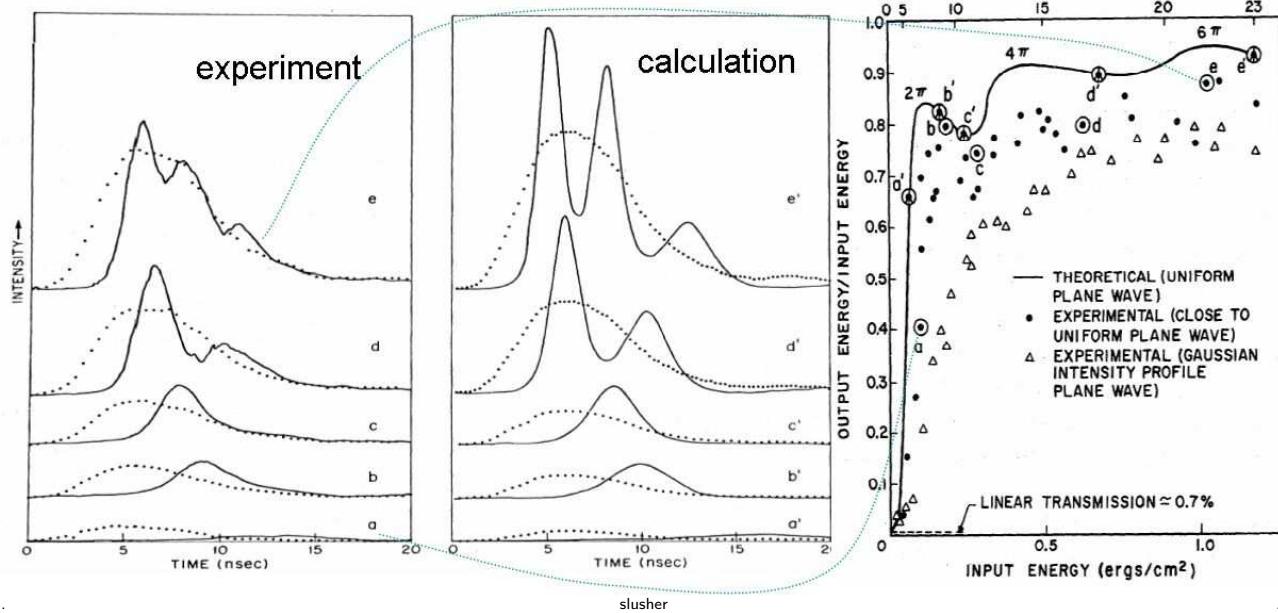
PHYSICAL REVIEW A

VOLUME 5, NUMBER 4

APRIL 1972

Self-Induced Transparency in Atomic Rubidium

R. E. Slusher and H. M. Gibbs
Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey 07974



rechte Teilabbildung: Transmission der Probe als Funktion der Energie eingestrahlter kurzer Pulse.

- Probe praktisch undurchsichtig für schwache Pulse (nur 0.7% Transmission).
- Probe wird für starke Pulse fast durchsichtig = selbstinduzierte Transparenz (SIT)
- Die Zunahme der Transmission mit der Pulsenergie ist nicht monoton, es treten Maxima auf, wenn die Pulsfläche θ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist.

Die linken Teilabbildungen zeigen in Theorie und Experiment, wie sich verschiedene starke Pulse beim Durchgang durch das Medium verformen. Die Impulse vor dem Eintritt ins Medium sind gestrichelt, die austretenden Pulse durchgezogen dargestellt. Folgende 2 Punkte fallen ins Auge:

- Eine starke Verzögerung der Pulse.
Die Austritts-Pulse sind gegenüber den Eintritts-Pulsen um einige ns verschoben. Das ist sehr viel mehr als die gewöhnliche Laufzeit $L/c \approx 3\text{ps}$ von Licht durch die $L = 1\text{mm}$ dicke Probe.
- Eine Aufspaltung starker Pulse in mehrere Teilpulse.
Dabei entspricht die Anzahl der Teilpulse dem ganzzahligen Anteil von $\theta/2\pi$.

7.2 Theoretische Analyse der Pulsausbreitung in einer dicken Probe

Voraussetzungen:

- chirpfreier Puls, d.h. $\mathcal{E}(z, t)$ reell
- Puls überall im kohärenten Regime
- Puls überall quasi-resonant, d.h. Rabi-Frequenz $\Omega_R \gg$ inhomogene Breite $\Delta\Omega$

Methodik:

- erst Darstellung des Gedankengangs,
- lange Rechnungen und Beweise nachträglich in Abschnitt 7.2.4

7.2.1 Qualitative Analyse mit der Bloch-Kugel

Zustand des Mediums nach dem Durchgang quasiresonanten Pulses bei Position z :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= in_0 d \sin(\theta) & \text{wo } \theta = \theta(z) = \theta(z, t \rightarrow \infty) & \text{mit } \theta(z, t) = \frac{d}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \mathcal{E}(z, t') \\ \Delta n &= -n_0 \cos(\theta) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Sei $\theta \neq 2m\pi$. Dann $\Delta n > -n_0$. \Rightarrow dem Impuls wurde Energie entzogen
 \Rightarrow er wurde irgendwie "schwächer"
 \Rightarrow die Impulsfläche $\theta(z)$ ändert sich bei Ausbreitung
 es sei denn, sie ist ganzzahliges Vielfaches von 2π .

Das macht plausibel, warum 2π -Pulse durchkommen.

7.2.2 Flächentheorem

Wie ändert sich die Pulsfäche $\theta(z)$ bei der Ausbreitung quantitativ? Es gilt das

<u>Flächentheorem:</u> $\boxed{\frac{\partial \theta(z)}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2} \sin(\theta(z))}$	Verallgemeinerung des Absorptionsgesetzes α = Absorptionskoeffizient $\theta(z) = \int_{-\infty}^t dt' \Omega_R(z, t')$ = Impulsfläche, wobei $t \rightarrow \infty$ Zeit lange nach Impulsende.
--	--

Beweis: in Abschnitt 7.2.4.

Schlussfolgerungen aus dem Flächentheorem:

$\theta(z) = \text{const. falls } \theta_0 = \theta(0) = m\pi$, (m ganz).

$m\pi$ -Pulse bewegen sich unter Flächenerhaltung durch die Probe.

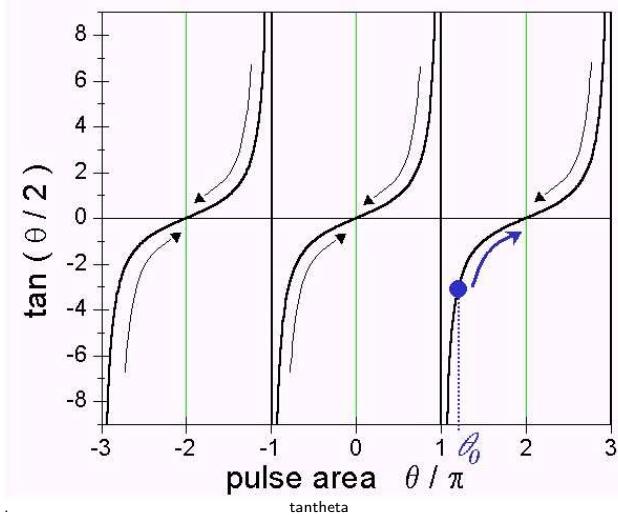
Was passiert mit anderen Pulsen?

Qualitativ: die rechte Seite des Flächentheorems ist periodisch modulo 2π . Es reicht, das Intervall $(-\pi, \pi)$ zu betrachten. Dort ist für $\theta < 0$ die rechte Seite positiv, $\theta(z)$ wächst also. Für positive θ ist die rechte Seite negativ und θ fällt entlang z . In jedem Falle bewegt sich θ also auf den Wert null zu. Das ist, was wir von der üblichen linearen Absorption kennen. Übersteigt θ_0 aber π ein wenig, so bewegt sich θ auf 2π zu, für $z \rightarrow \infty$ bleibt ein 2π -Impuls übrig.

Generell: es gilt $\theta(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 2\pi n$, wenn $(2n-1)\pi < \theta_0 < (2n-1)\pi$.

Quantitativ: Das Flächentheorem lässt sich leicht mittels Variablentrennung integrieren:

$$\partial_t \theta = -\frac{\alpha}{2} \sin \theta \Rightarrow \frac{d\theta}{\sin \theta} = -\frac{\alpha}{2} dz \Rightarrow -\frac{\alpha}{2} z = \int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \ln \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \Big|_{\theta_0}^{\theta} \Rightarrow$$



$$\tan \left(\frac{\theta(z)}{2} \right) = \exp \left(-\frac{\alpha z}{2} \right) \cdot \tan \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \quad (7.2)$$

Im Bild links ist $\tan(\theta/2)$ über θ dargestellt.

Bei $z = 0$ gilt $\theta(z) = \theta_0$.

Mit wachsendem z wird der Betrag des Tangens wegen des Faktors $e^{-\alpha z/2}$ immer kleiner, d.h. man rutscht auf der Kurve zum nächstgelegenen ganzzahligen Vielfachen von 2π .

Fazit: bei hinreichend dicken Proben werden kurze Pulse in einen 'nächstgelegenen' 2π -Puls transformiert.

Vorsicht: wenn das Amplituden-Integral $\int \mathcal{E}(z, t) dt$ den Wert $2\pi n$ angenommen hat, kann sich die Pulsform immer noch ändern. Auch kann sich die Intensität $\sim \int |ds E(z, t)|^2 dt$ noch ändern. Wenn insbesondere die Pulse breitlaufen, nimmt ihre Energie bei gleicher Amplitudenfläche ab, d.h. es findet Absorption statt.

7.2.3 Invariante Pulse

Gibt es Pulse, die ihre Form bei der Ausbreitung nicht mehr ändern?

Ansatz: $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t - z/v)$ (v eine noch unbekannte Ausbreitungsgeschwindigkeit)

Dann gilt natürlich auch $\theta = \theta(t - z/v)$.

Maxwell-Bloch-Gleichung (1.18) kombiniert mit Quasiresonanz (5.19) ergeben dafür

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\tau_0^2} \sin \theta \quad \frac{1}{\tau_0^2} = \frac{\alpha v}{2\pi\rho(\omega)(1-v/c_g)} \quad (\text{Beweis in Abschnitt 7.2.4.}) \quad (7.3)$$

Das ist Pendelgleichung, wobei $\theta = 0$ die instabile Gleichgewichtslage ist (Pendel senkrecht nach oben).

Wir suchen Lösungen, die für $t \rightarrow \pm\infty$ stationär sind.

Da gibt es nur eine:

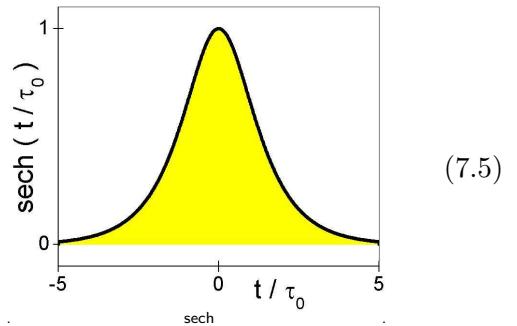
Start im labilen Gleichgewicht $\theta = 0$, einmal durchschwingen und wieder ankommen im labilen Gleichgewicht bei $\theta = 2\pi$.

Diese Lösung lautet:

$$\theta(t) = 4 \arctan \left(e^{t/\tau_0} \right). \quad (\text{Beweis in Abschnitt 7.2.4}) \quad (7.4)$$

Daraus folgt für $\mathcal{E} = d\dot{\theta}/\hbar$:

$$\mathcal{E}(t - z/v) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sech}\left(\frac{t - z/v}{\tau_0}\right) \quad \mathcal{E}_0 = \frac{2\hbar}{\tau_0 d}$$



Dieser **Secans-Hyperbolicus-Puls**³⁰ durchläuft das Medium unverändert.

Die Pulshöhe \mathcal{E}_0 wird durch die effektive Pulsdauer τ_0 bestimmt, die ihrerseits über (7.3) mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit v zusammenhängt.

Einer dieser Parameter kann frei gewählt werden.

Allerdings muß immer gelten $\tau_0 \ll \tau_p$ (Beschränkung von \mathcal{E}_0 nach unten).

In jedem Falle ist dies ein 2π -Puls.

Das Aufbrechen von Pulsen mit größeren Flächen in mehrere 2π -Pulse kann man nur numerisch erhalten. Dabei ist für $z \rightarrow \infty$ jeder dieser Teilpulse ein solcher sech-Puls und der Abstand zwischen diesen ist so groß, daß sich sie nicht mehr überlappen (geht also gegen unendlich).

7.2.4 Rechnungen und Beweise

Beweis des Flächentheorems (7.1)

Wir multiplizieren die 3. Maxwell-Bloch-Gleichung (Wellengleichung 1.18)

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E} = \frac{i}{2} \mu_0 \omega c_p \mathcal{P}$$

mit d/\hbar und integrieren die Zeit von $-\infty$ bis zu einem t lange nach Ende des Impulses. Das Integral über die Zeitableitung links verschwindet dann. Das Integral über die Ortsableitung gibt gerade die linke Seite des Flächentheorems, also

$$\partial_z \theta(z) = \frac{i \mu_0 \omega c_p d}{2\hbar} \int d\Omega \rho(\Omega) \int_{-\infty}^t dt' \mathcal{P}_\Omega(z, t').$$

hier und im folgenden ist t eine Zeit weit nach Impulsende, aber noch vor Wirksamwerden der Phasenrelaxation.

Formales Umstellen der Polarisationsgleichung (ohne Relaxation) nach \mathcal{P}_Ω ,

$$\mathcal{P}_\Omega = -d\Omega_R \frac{\Delta n_\Omega}{\Delta} + \frac{i}{\Delta} \partial_t \mathcal{P}_\Omega,$$

und einsetzen oben rechts führt weiter auf

$$\partial_z \theta(z) = \frac{i \mu_0 \omega c_p d}{2\hbar} \int d\Omega \frac{\rho(\Omega)}{\Delta} \int_{-\infty}^t dt' \{-d\Omega_R \Delta n_\Omega + i \partial_t \mathcal{P}_\Omega\}.$$

Rechts steht $\Delta = \Omega - \omega$ im Nenner. Der Hauptbeitrag kommt deshalb von nahezu resonanten Atomen mit $\Omega \approx \omega$. ρ kann an der Resonanz herausgezogen werden. Weil Δn_Ω bezüglich Δ symmetrisch ist, liefert

³⁰ $\operatorname{sech}(x) = 1/\cosh(x) = 2/(e^x + e^{-x})$

der 1. Term rechts einen asymmetrischen Integranden, dessen Beitrag zum Ω -Integral verschwindet. Das Integral über den 2. Term rechts ist einfach, es folgt

$$\partial_z \theta(z) = -\frac{\mu_0 \omega c_p d}{2\hbar} \rho(\omega) \int d\Omega \frac{1}{\Delta} \mathcal{P}_\Omega(z, t).$$

Das t rechts ist lange nach Impulsende zu nehmen. Da gilt (6.3), d.h. $\mathcal{P}_\Omega(z, t) = i n_0 d \sin(\theta) e^{-i\Delta t}$.

Einsetzen und Vorziehen der Konstanten liefert

$$\partial_z \theta(z) = -\frac{\mu_0 \omega c_p d^2 n_0}{2\hbar} \rho(\omega) \sin(\theta) \mathcal{I} \quad \text{mit} \quad \mathcal{I} = \int d\Delta \frac{e^{-i\Delta t}}{-i\Delta} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(x)}{x} = \pi.$$

Das ist das Flächentheorem mit dem Absorptionskoeffizienten

$$\alpha = \frac{\mu_0 \pi \omega c_p d^2 n_0}{\hbar} \rho(\omega). \quad (7.6)$$

Beweis der effektiven Pendelgleichung (7.3)

Ausgangspunkt ist die dritte Maxwell-Bloch-Gleichung (Propagationsgleichung)

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E} = \frac{i}{2} \mu_0 \omega c_p \mathcal{P} \quad (1.18)$$

Links setzen wir $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t - z/v)$ ein und rechts $\mathcal{P} = i n_0 d \sin(\theta)$. Das gibt zunächst

$$\left(-\frac{1}{v} + \frac{1}{c_g} \right) \dot{\mathcal{E}} = -\frac{n_0 d}{2} \mu_0 \omega c_p \sin(\theta).$$

Aus $\theta = (d/\hbar) \int_{-\infty}^{t-z/v} dt' \mathcal{E}(t')$ folgt nun $\dot{\theta} = (\hbar/d) \ddot{\theta}$. Also

$\ddot{\theta} = \frac{1}{\tau_0^2} \sin \theta$

$$\frac{1}{\tau_0^2} = \frac{\mu_0 \omega c_p d^2 n_0 v}{2\hbar(1-v/c_g)} = \frac{\alpha v}{2\pi\rho(\omega)(1-v/c_g)}. \quad \text{Das ist Gleichung (7.3).} \quad \text{q.e.d.}$$

Beweis der Lösung (7.4) der Pendelgleichung (7.3)

Offensichtlich gilt die geforderte Anfangsbedingung $\theta(-\infty) = 0, \dot{\theta}(-\infty) = 0$.

Zu beweisen ist also nur noch: $y(x) = 4 \arctan(e^x)$ löst die Differenzialgleichung $y'' = \sin(y)$.

Dazu gehen wir aus von der Form

$$\begin{aligned} \tan(y(x)/4) &= e^x, \text{ leiten ab: } \frac{y'}{4 \cos^2(y/4)} = e^x, \text{ eliminieren } e^x : \\ y' &= 4 \cos^2(y/4) \tan(y/4) = 4 \cos(y/4) \sin(y/4) = 2 \sin(y/2), \text{ leiten nochmal ab:} \\ y'' &= 2 \cos(y/2) y'/2 = 2 \cos(y/2) \sin(y/2) = \sin(y). \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

A Herleitung der inhomogenen Wellengleichung

Ausgangspunkt Medien-Maxwellgleichungen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \partial_t \vec{D} \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Braucht noch Materialgleichungen. Nichtmagnetisches Medium $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, ohne Ladungen und Ströme $\vec{j} = 0, \rho = 0$ (neutrale Atome). Die elektrische Materialgleichung ist in unserem Falle etwas komplexer, nämlich $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} + \vec{P}$ zusammen mit der Gleichung (1.10) für die resonante Polarisation und der Inversionsgleichung (1.12). Nichtresonante Beiträge zum Polarisationsfeld stecken in der relativen Dielektrizitätskonstanten ε . Um nicht zu speziell zu werden, lassen wir Dispersion zu, ε ist dann ein Operator

$$\varepsilon \vec{E}(t) = \int d\omega e^{-i\omega t} \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega). \quad (\text{A.2})$$

Einsetzen der Materialgleichungen gibt zunächst

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \varepsilon \vec{E} + \mu_0 \partial_t \vec{P} \quad \varepsilon_0 \operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = -\operatorname{div} \vec{P} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Rotation der ersten Gleichung, einsetzen der anderen und beachten von $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{curl} \operatorname{curl}$ Laplace gibt dann

$$\Delta \vec{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \varepsilon \vec{E} = \mu_0 \partial_t^2 \vec{P}. \quad (\text{A.4})$$

Das ist allgemeine inhomogene³¹ Wellengleichung für die elektrischen Feldkomponenten. Zusammen mit den restlichen Maxwellgleichungen in (A.3) sowie den Gleichungen (1.10) für das Polarisationsfeld und (1.12) für die Inversion bildet sie ein geschlossenes System gekoppelter Gleichungen.

Beschränkung auf reine Transversalfelder³² mit $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ & dünne Gase $\varepsilon = 1$ gibt Gleichung (1.13).

Hier bleiben wir bei dispersivem ε . Einsetzen des Wellenansatzes (1.14). Allerdings jetzt mit der Wellenzahl im Medium, $k = k(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \omega / c$. Betrachtung positiver Frequenzkomponente.

Linke Seite:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E}^+ &= \vec{e} e^{i(kz-\omega t)} (\mathcal{E}'' + 2ik\mathcal{E}' - k^2 \mathcal{E}) \\ \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \varepsilon \vec{E}^+ &= \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \int d\omega' e^{-i\omega' t} \varepsilon(\omega') \vec{E}^+(\omega') = - \int d\omega' e^{-i\omega' t} \frac{\omega'^2}{c^2} \varepsilon(\omega') \vec{E}^+(\omega') \\ &= - \int d\omega' e^{-i\omega' t} k^2(\omega') \vec{E}^+(\omega') \end{aligned}$$

Fouriertransformierte des Feldes nur bei $\omega' \approx \omega$ groß, also kann Rest des Integranden um diese Stelle entwickelt werden: $k^2(\omega') = k^2(\omega) + 2k(\omega)(\omega' - \omega)/c_g$.

$c_g = d\omega/dk$ = Gruppengeschwindigkeit des Lichts im Medium.

$$\begin{aligned} &= -k^2 \vec{E}^+ - \frac{2k}{c_g} \int d\omega' e^{-i\omega' t} (\omega' - \omega) \vec{E}^+(\omega') \quad [\text{da hinein } \vec{E}^+(\omega') = \vec{e} e^{i(kz-\omega t)} \mathcal{E}(\omega' - \omega)] \\ &= -\vec{e} e^{i(kz-\omega t)} \left(k^2 \mathcal{E}^+ + \frac{2ik}{c_g} \partial_t \mathcal{E} \right). \end{aligned}$$

³¹als Inhomogenität wirkt hier der Polarisationsterm rechts

³²Das sollte möglich sein, solange das Medium homogen bleibt (ε, n_1 und n_1 ortsunabhängig), was wegen der Nichtlinearitäten aber nicht unbedingt sein muß. Die genauen Bedingungen dafür kenne ich (HJW) auch nicht.

Subtraktion und nur Mitnahme der höchsten Ordnung in ω ($\omega|\mathcal{E}| \gg |\partial_t \mathcal{E}|, c|\partial_z \mathcal{E}|$ etc.):

$$\Delta \vec{E}^+ - \partial_t^2 \varepsilon \vec{E}^+ = 2ik\vec{e} e^{i(kz-\omega t)} \left(\partial_z + \frac{1}{c_g} \partial_t \right) \mathcal{E}. \quad (\text{A.5})$$

Rechte Seite:

$$\mu_0 \partial_t^2 \vec{e} e^{i(kz-\omega t)} \mathcal{P} = \mu_0 \vec{e} e^{i(kz-\omega t)} (\partial_t^2 \mathcal{P} - 2i\omega \partial_t \mathcal{P} - \omega^2 \mathcal{P}) \approx -\mu_0 \omega^2 \mathcal{P}.$$

Beide Seiten zusammen:

$$\left(\partial_z + \frac{1}{c_g} \partial_t \right) \mathcal{E} = \frac{i}{2} \mu_0 c_p \omega \mathcal{P}. \quad (\text{A.6})$$

Das ist Formel (1.18) der Maxwell-Bloch-Gleichungen. q.e.d.