

THEORETISCHE PHYSIK II

TEIL A: ELEKTRODYNAMIK

im Nebenfach Physik für D-Mathematik u. D-Informatik
– Sommersemester 2006 –

von

Hans-Jürgen Wünsche

Institut für Physik der Humboldt-Universität zu Berlin
Newtonstr. 15

Tel: 2093 7649
email: ede@physik.hu-berlin.de

web address: <http://photonik.physik.hu-berlin.de/ede>

14. Juni 2010

Dieser Skript diene dazu, dass Studierende ihre Mitschriften überprüfen können, Lücken schliessen etc. Kein Ersatz für den Vorlesungsbesuch bzw. für Lehrbücher.

Literatur

Es gibt viele Bücher zum Thema, die Vorlesung ist an keines völlig gekoppelt, aber ich habe hier und da benutzt:

Literatur

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: "Theoretische Physik", Band 2, Akademie-Verlag
- [2] R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands: "Feynman Vorlesungen über Physik", Bd. II: Elektromagnetismus und Struktur der Materie, Oldenbourg Verlag 2001.
- [3] J. Honerkamp, H. Römer: "Klassische Theoretische Physik", Springer
- [4] W. Nolting: "Theoretische Physik", Band 3, Zimmermann-Neufang

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen	5
2	Physikalische Grundbegriffe des Elektromagnetismus	7
2.1	Elektrische Ladung und elektrischer Strom	7
2.2	Gesetz von der Erhaltung der Ladung	8
2.3	Das elektromagnetische Feld	8
3	Mathematische Charakterisierung von Feldern	10
3.1	Feldtypen	10
3.2	Differential-Operatoren	10
3.3	Integraltypen	11
3.4	Integralsätze	13
3.5	Anschauliche Interpretation von grad, div, rot	14
3.6	Einige Rechenregeln mit ∇	15
4	Die Maxwellgleichungen	16
5	Direkte Lösung der Maxwellgl. f. hochsymmetrische Fälle	18
5.1	Ruhende Punktladung Q	18
5.2	Kugelsymmetrische Ladungsverteilung	19
5.2.1	Geladene Vollkugel	19
5.2.2	Kugelkondensator	19
5.3	Geladene Platte	21
5.4	Plattenkondensator	22
5.5	Magnetfeld eines Drahtes	23
5.6	Schlanke Spule	24
6	Allgemeine Theorie des elektromagnetischen Feldes im Vakuum	25
6.1	Grundaufgabe der Elektrodynamik	25
6.2	Einige allgemeine Folgerungen aus den MGI im Vakuum	25
6.2.1	Mathematische Charakterisierung	25
6.2.2	Superpositionsprinzip	25
6.2.3	Widerspruchsfreiheit bei Ladungserhaltung	26
6.3	Die elektrodynamischen Potentiale	26
6.3.1	Einführung der elektrodynamischen Potentiale	26
6.3.2	Die inhomogenen Wellengleichungen	27
6.3.3	Allgemeine Lösungsformeln	30

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	3
7 Kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen	32
7.1 Erinnerung an die Relativitätstheorie	32
7.2 Elektrodynamische 4er-Tensoren	32
8 Stationäre Felder	36
8.1 Elektrostatik	36
8.1.1 Punktladung	37
8.1.2 Elektrischer Dipol	39
8.1.3 Potential einer weit entfernten Ladungsverteilung	41
8.2 Magnetfelder stationärer Ströme	43
8.2.1 Stromfluß durch Drähte: das Biot-Savart-Gesetz	43
8.2.2 Magnetfeld weit entfernter Ströme	45
9 Medien in elektromagnetischen Feldern	48
9.1 Dielektrika im elektrischen Feld	49
9.1.1 Kontinuums-Modell eines Dielektrikums	49
9.1.2 Polarisationsladungsdichte	49
9.1.3 Das D -Feld im Medium	50
9.1.4 Polarisation als Funktion der Feldstärke	50
9.1.5 Grenzflächen zwischen Dielektrika	51
9.2 Leiter im statischen elektrischen Feld	52
9.3 Nichtleiter im statischen Magnetfeld	54
9.3.1 Von den Vakuum-MGI zu den Medien-MGI	54
9.3.2 Beweis von $J_{mag} = \text{rot } M$	55
9.3.3 Magnetische Eigenschaften verschiedener Medien	56
9.3.4 Grenzflächen zwischen Medien	58
9.3.5 Anwendung: Schlanke Spule mit ferromagnetischem Kern	58
10 Die Energie des elektromagnetischen Feldes	59
11 Quasistationäre Felder	62
11.1 Induktionsgesetz	62
11.2 Der Wechselstromkreis	64
11.2.1 Induktivität	64
11.2.2 Kapazität	65
11.2.3 Reihenschwingkreis I	65
11.2.4 Trick: Die Methode komplexer Amplituden	66

12 Abstrahlung elektromagnetischer Wellen	67
12.1 Vektorpotential	67
12.2 Magnetfeld	68
12.3 Das elektrische Feld	68
12.4 Energiedichte	69
12.5 Poynting-Vector in der Fernzone	69
12.6 Abgestrahlte Gesamtleistung	70
12.7 Beispiel: Linearer Oszillator	71
12.8 Die ebene elektromagnetische Welle als Grenzfall	73

1 Vorbemerkungen

Wozu dieses Pamphlet?

Manchmal drücken sich Lesende nicht so ganz klar aus und / oder die Hörer hören falsch hin oder die Mitschrift wird aus sonstigen Gründen nicht so ganz perfekt. Deshalb habe ich mir vorgenommen, jeweils nach jeder Vorlesung eine Kurzfassung meines Manuskripts ins Netz zu stellen. Kurzfassung heißt, dass Herleitungen und Zwischenschritte nicht so ausführlich dargestellt werden, wie in der Vorlesung selbst. Auch Abbildungen und Skizzen werden wohl nicht alle Eingang finden können. Aber die Hauptlinien der Argumentation und die Eckformeln sollen enthalten sein. Dies soll den Studierenden ermöglichen, ihre Mitschriften zu kontrollieren und evtl. zu ergänzen. Es ist aber kein Ersatz für die Vorlesungsteilnahme, die Mitschrift überhaupt und die Benutzung von Büchern. Auch ist noch unklar, ob ich meinen guten Vorsatz bis zum Ende durchhalten kann.

Was ist Elektrodynamik?

Elektrodynamik ist eine der Grundsäulen der Physik. Sie befaßt sich mit den Phänomenen Elektrizität und Magnetismus. Dahinter versteckt sich eine ganze Menge. Zur Illustration einige Stichworte:

- | | |
|------------------------|----------------------------------|
| - Radio, Fernsehen | - Glühlampe |
| - Elektroenergie | - Elektronik |
| - Elektromotor | - Telekommunikation |
| - Elektrowärme | - Magnetkissenbahn |
| - Hochspannungsleitung | - Zündkerze |
| - EEG | - Elektronenrechner |
| - Blitz | - Radar |
| - Licht | - optische Informationsnetze ... |

Allein diese Stichworte umfassen eine riesige Vielfalt elektromagnetischer Erscheinungen, die von uns Menschen beherrscht werden bzw. nutzbar gemacht wurden. Voraussetzung dafür ist die genaue Kenntnis der diesen Erscheinungen zugrundeliegenden Naturgesetze. Man könnte nun denken, daß jede Erscheinung ihre eigenen Gesetze hat. Das ist aber glücklicherweise nicht so: Alle elektromagnetischen Erscheinungen lassen sich auf einige wenige Grundgesetze zurückführen. Mathematischer Ausdruck dieser Grundgesetze sind die **Maxwellschen Gleichungen** (J.C. Maxwell 1864) als fundamentales Gleichungssystem der Elektrodynamik.

In der Ausbildung von Physikstudenten wird die Elektrodynamik oft in 2 Etappen gelehrt. Im Rahmen der Experimentalphysik wird von den vielfältigen elementaren physikalischen Erscheinungen ausgegangen und durch Verallgemeinerung das theoretische Verständnis Stück für Stück zusammengesetzt. Die Maxwell-Gleichungen sind dabei gewissermaßen ein Endpunkt. In der nachfolgenden theoretischen Elektrodynamik kann man dann umgekehrt diese Gleichungen an den Anfang stellen und die theoretischen Methoden entwickeln, wie aus ihnen die Vielfalt spezieller Phänomene und Gesetzmäßigkeiten abgeleitet wird.

Was bietet dieser Kurs?

Für diesen Kurs im Rahmen der theoretischen Physik will ich ebenfalls den deduktiven Weg beschreiten. Die Maxwellgleichungen stehen also ziemlich am Anfang. Davor kommt nur zwei gewissermaßen einführende Kapitel. Im ersten werde ich die aus meiner Sicht für das Verständnis der Maxwell-Gleichungen wichtigsten experimentellen Erfahrungstatsachen zusammenstellen. Im zweiten werden die mathematischen Hilfsmittel plausibel gemacht, mit denen die Maxwellgleichungen formuliert sind. Das scheint mir nötig, weil eventuell einige Studierende im Rahmen ihres Nebenfachstudiums keine experimentelle Elektrodynamik gehört haben. Der Schwerpunkt des Kurses wird aber in der Herleitung von Gesetzmäßigkeiten für spezielle elektromagnetische Erscheinungen aus den allgemeinen Maxwellschen Gleichungen liegen.

Dabei möchte ich etwa bis Pfingsten folgende Punkte behandeln (danach dann Thermodynamik):

Angestrebtes Programm

1. **Vorbemerkungen**
2. **Grundbegriffe**
Experimenteller Grundtatsachen in aller Kürze
3. **Die Maxwellgleichungen - Grundgleichungen der Elektrodynamik**
4. **Mathematische Charakterisierung von Feldern**
5. **Direkte Lösung der Maxwellgl. für hochsymmetrische Spezialfälle**
(Punktladung, geladene Kugel, Plattenkondensator, gerader stromdurchflossener Draht, Ringspule)
6. **Allgemeine Theorie des elektromagnetischen Feldes im Vakuum**
 - (a) Grundaufgabe
 - (b) Einige allgemeine Folgerungen aus den Maxwellgl.
(Mathematische Charakterisierung, Superpositionsprinzip, Ladungserhaltung)
 - (c) Die elektrodynamischen Potentiale
(Einführung derselben, inhomogene Wellengleichungen, allgemeine Lösungsformeln, Klassifizierung von Spezialfällen)
7. **Kovariante Formulierung der Vakuum-Elektrodynamik**
8. **Stationäre Felder**
 - (a) Statische Ladungsverteilungen
(Punktladung [mit Delta-Funktion], Dipol, Potential einer weit entfernten Ladungsverteilung)
 - (b) Stationäre Ströme
(Herleitung Biot-Savart, Feld eines Kreisstroms)
9. **Medien in elektromagnetischen Feldern**
 - (a) Dielektrika
*(Modell: Kontinuum von Dipolen;
Polarisationsladungsdichte, D-Feld, Polarisation, Dispersion)*
 - (b) Leiter im statischen Feld
*(Modell: frei bewegliche Elektronen;
Abschirmung, Influenz, Spiegelladungsmethode)*
 - (c) Nichtleiter im Magnetfeld
*(Modell: Kontinuum von Kreisströmen;
Magnetisierung, Dia-, Para- und Ferromagnetismus, Torroid mit Luftspalt)*
10. **Die Energie des elektromagnetischen Feldes**
11. **Elektromagnetische Wellen**
 - (a) Antennenmodell "Hertzscher Dipol"
 - (b) Ebene elektromagnetische Wellen als Grenzfall
 - (c) Elektromagn. Wellen in Medien

2 Physikalische Grundbegriffe des Elektromagnetismus

2.1 Elektrische Ladung und elektrischer Strom

Altertum: Reiben von Elektrizität → lädt sich auf,
spürbar durch Kraftwirkung (auf Stäubchen, Haare streuen sich) oder gar Funken

Diskussion: diese Kraft wirkt ähnlich der Schwerkraft über endliche Abstände

ist aber keine Schwerkraft, weil abhängig von reiben oder nicht, unabhängig von Masse

es ist also ein v.d. Schwerkraft unabhängiger, zusätzlicher Wechselwirkungstyp

die elektrische Ladung eines Körpers ist qualitativ die Stärke, mit der er an dieser WW teilnimmt

analog zu seiner Masse, die man als seine Gravitations-Ladung bezeichnet kann.

Anfang 18. JH:

2 verschiedene Ladungssorten (gleichartige Abstoßung, verschiedene Anziehung)

Eine Sorte nennt man positiv, die andere negativ (welche wie ist Konvention).

Heute wissen wir außerdem u.a.:

Elektrische Ladung ist fundamentale Eigenschaft elementarer Bausteine der Materie:
geladene Teilchen wechselwirken elektromagnetisch.¹

Die Ladung des Protons wird als **Elementarladung** e bezeichnet².

Elektronen tragen die Ladung $-e$, das Neutron ist neutral.

Makroskopische Körper:

Elektrische Ladung = Summe der Ladungen der Elementarbausteine.

Maßeinheit ist das Coulomb, $1\text{C} = 1\text{As}$. Es gilt $e = 1.602176462... \times 10^{-19}\text{C}$.

Die **Ladungsdichte** beschreibt die räumliche Verteilung der Ladung im Körper: ^{3 4}

$$\rho(\vec{r}) := \lim_{\Delta V \rightarrow \vec{r}} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad \begin{cases} \Delta V - & \text{kleines Volumen mit } \vec{r} \text{ drin} \\ \Delta Q - & \text{Ladungsmenge in diesem Volumen} \end{cases} \quad (2.1)$$

Wenn sich geladene Teilchen bewegen, tritt ein **elektrischer Strom** auf.

Wohl bekannt aus Alltag: Strom durch einen Draht.

$$\text{Stromstärke } I := \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \begin{cases} \Delta t - & \text{infinitesimales Zeitintervall} \\ \Delta Q - & \text{Ladungsmenge, die während } \Delta t \text{ den} \\ & \text{Drahtquerschnitt durchfließt} \end{cases} \quad (2.2)$$

¹Es sind noch 3 weitere fundamentale Wechselwirkungen bekannt: Gravitation, schwache und starke Wechselwirkung. Elektrische Ladung spielt bezüglich der elektromagnetischen WW eine analoge Rolle, wie die Masse bezüglich der Gravitation.

²Das blieb auch so, nachdem man festgestellt hatte, daß Protonen nicht elementar sind, sondern aus Quarks mit drittel bzw. zweidrittel Elementarladungen zusammengesetzt. Quarks kommen im heutigen Kosmos wahrscheinlich nicht isoliert vor und lassen sich mit heutigen Mitteln auch nicht künstlich vereinzeln, so daß die Elementarladung momentan die kleinste Ladung einzelner Elementarteilchen ist. Früher war das anders. Nämlich winzige Sekundenbruchteile nach dem Urknall war der Kosmos noch so heiß, daß sich noch keine Protonen, Neutronen ... bilden konnten und Quarks durch die Gegend schwirrten.

³Das Schrumpfen $\Delta V \rightarrow \vec{r}$ der Volumina auf den Punkt \vec{r} ist physikalisch zu verstehen: es wird abgebrochen, wenn ΔV klein gegen die makroskopischen Körperdimensionen ist (bzw. kleiner als die Ortsauflösung der Messung), aber immer noch so groß, daß die Anzahl der Elementarladungen in ihm riesig bleibt.

⁴Eventuelle Zeitabhängigkeiten schreiben wir im Argument der Ortsfunktionen der Einfachheit nicht explizit hin.

Räumliche Verteilung der Ladungsströmung:

$$\text{Stromdichte} \quad \vec{J}(\vec{r}) := \sum_i \rho_i(\vec{r}) \vec{v}_i(\vec{r}) \quad \left\{ \begin{array}{l} i \\ \rho_i \\ \vec{v}_i(\vec{r}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Teilchensorte,} \\ \text{deren Ladungsdichte u.} \\ \text{mittlere Geschwindigkeit} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Maßeinheit: Stromstärke pro Fläche, A/m².

Zusammenhang zwischen Stromdichte und Stromstärke:

$$I_A = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (2.4)$$

Stromstärke durch eine Fläche = Flussintegral der Stromdichte über diese Fläche⁵.

2.2 Gesetz von der Erhaltung der Ladung

Die elektrische Ladung eines Elementarteilchens ist zeitlich konstant und unabhängig vom Bezugssystem.

Bei Umwandlungsreaktionen von Elementarteilchen ändert sich die Gesamtladung der Reaktionspartner nicht.

Folglich kann sich die Ladungsmenge in einem Raumgebiet nur um den Wert ändern, der durch dessen Oberfläche zu- bzw. abgeführt wird.

Die mathematische Formulierung dieses Gesetzes lautet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0 \quad \text{bzw. kurz} \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0} \quad \text{Kontinuitätsgleichung} \quad (2.5)$$

$\operatorname{div} \vec{J}(\vec{r})$ = "Divergenz von \vec{J} " = Ladungs-Quelldichte
= Ladungsdichte, die pro Zeiteinheit aus dem Punkte \vec{r} netto herausquillt.⁶

2.3 Das elektromagnetische Feld

Betrachten WW-Kraft zwischen ruhenden Punktladungen i und j im Vakuum⁷

$$\text{Coulomb-Gesetz} \quad \vec{F}_{ij} = \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \vec{e}_{ij} \quad \epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{C/Vm} . \quad (2.6)$$

[\vec{F}_{ij} Kraft auf j durch WW mit i ; \vec{e}_{ij} Einheitsvektor in Richtung von i nach j]

Was ist, wenn sich die Ladungen relativ zueinander bewegen?

Falls sich die "elektrische Kraftwirkung" unendlich schnell ausbreitet, bleibt (2.6) gültig.

Falls nicht (Relatheorie!), dann sind Modifikationen nötig:

Die Kraft auf j hängt dann nicht von der momentanen Position von i ab, sondern von einer früheren.

Wie? Das wird beschrieben durch das Denkkonzept eines Feldes:

⁵Was "Flussintegral" genau bedeutet, kommt später.

⁶Auch dies wird noch vertieft.

⁷Punktladung: Ein Körper, dessen endliche Ausdehnung bei der elmag. WW mit anderen Körpern keine Rolle spielt. Elementarteilchen sind Punktladungen (nach irdischen Maßstäben).

- jede elektrische Ladung erzeugt eine Änderung ihrer Umgebung, ein elektromagnetisches Feld
- das Feld breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit in den Raum hinaus aus
- andere Ladungen spüren das bei ihnen ankommende Feld als Kraft

Beachte die Doppelrolle jeder Ladung: Einerseits erzeugt sie ein elmag. Feld.
Andererseits wirkt das elmag. Feld als Kraft auf sie.

Der Erzeugungsaspekt wird durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben. Die kommen später dran.

Hier nur die Kraftwirkung des elmag. Feldes auf eine Punktladung Q mit der Geschwindigkeit \vec{v} :

$$\vec{F}_L(\vec{r}) = Q \cdot \left(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \right) \quad \text{verallgemeinerte Lorentzkraft} \quad (2.7)$$

Bei kontinuierlichen Ladungsverteilungen mit Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und Stromdichte $\vec{J}(\vec{r})$ gilt entsprechend:

$$\vec{F}_L(\vec{r}) = \left(\rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) + \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right) dV \quad \text{Kraft auf ein Volumenelement } dV \text{ am Orte } \vec{r} \quad (2.8)$$

Das elmag. Feld wird hier durch 2 Vektorfelder vertreten, ein elektrisches und ein magnetisches:⁸

$$\vec{E}(\vec{r}) \text{ – elektrische Feldstärke} \quad \vec{B}(\vec{r}) \text{ – magnetische Induktion} \quad (2.9)$$

Es hat also insgesamt 6 Komponenten.

Die konkrete Aufteilung in elektrische und magnetische Komponenten hängt vom Bezugssystem ab. Das wird schon daran deutlich, daß der magnetische Beitrag im Ruhesystem der Testladung immer verschwindet. Darauf wird in späteren Kapiteln noch eingegangen.

In einem gegebenen Bezugssystem (Labor) kann man die elektrische Feldstärke mit ruhenden Testladungen messen (wegen $\vec{v} = 0$ verschwindet die magn. Kraft), die magnetische Induktion mit Testströmen durch verschieden orientierte Drähte (Drähte ungeladen, also verschwindet die elektrische Kraft).

⁸daß \vec{B} magnetische Induktion (oder auch magnetische Flußdichte) heißt und nicht magnetische Feldstärke, hat historische Gründe.

3 Mathematische Charakterisierung von Feldern

Theoretische Elektrodynamik ist eine Feldtheorie. Sie benutzt spezielle Differential- und Integral-Operationen, die in diesem Anhang zusammenfassend skizziert werden. Skizzieren heißt: wirklich nur ganz kurz, ohne Beweise oder Erörterung von Voraussetzungen, als Gedankenstütze. Ausführlichere Darstellungen können in den meisten Lehrbüchern der Elektrodynamik gefunden werden. Das für uns wichtigste ist auf meinem gesonderten Merkzettel zusammengestellt.

3.1 Feldtypen

Skalarfeld: z.B. Potential $U(\vec{r})$ oder Dichte $\rho(\vec{r})$

Eine Funktion, die jedem Raumpunkt \vec{r} einen skalaren Wert zuordnet.

Vektorfeld: z.B. – Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ einer strömenden Flüssigkeit.
– elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ eines elektromagnetischen Feldes.

Eine Funktion des Ortes, die jedem Raumpunkt \vec{r} einen Vektor zuordnet.

3.2 Differential-Operatoren

Hier kennzeichnet das Symbol $:=$ die Definitionsgleichung, weitere äquivalente Schreibweisen sind jeweils mit $=$ angehängt.

$$\text{Nabla-Operator } \nabla := \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{d}{d\vec{r}} \quad (3.1)$$

Der Einheitsvektor in x -Richtung wird mit \vec{e}_x bezeichnet, die anderen Einheitsvektoren entsprechend.

Der Nabla-Operator ist lax gesprochen die Ableitung nach dem Ortsvektor \vec{r} . Er ist zugleich Vektor und Differentialoperator. Jede seiner 3 Komponenten bedeutet die Ableitung nach der zugeordneten Raumkoordinate. Die verschiedenen Möglichkeiten der Anwendung von ∇ auf Skalar- und Vektorfelder ergeben gerade die in der Elektrodynamik benötigten Ableitungsoperatoren grad, div und rot. Diese werden im folgenden angegeben, eine anschauliche Interpretation erfolgt später.

Gradient: Der Gradient eines Skalarfeldes ist das Vektorfeld

$$\text{grad } U(\vec{r}) := \nabla U(\vec{r}) = \vec{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{dU}{d\vec{r}}. \quad (3.2)$$

Divergenz: Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$ ist das Skalarfeld

$$\text{div } \vec{v}(\vec{r}) := \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (3.3)$$

Rotation: Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$ ist das Vektorfeld

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) := \nabla \times \vec{v}(\vec{r}) = \vec{e}_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (3.4)$$

3.3 Integraltypen

Für das Verständnis der Maxwell-Gleichungen und ihre Anwendung auf manche konkrete Fälle ist ihre integrale Formulierung wichtig. Dabei treten verschiedene Integraltypen auf, deren Begriffsinhalt hier kurz skizziert werden soll. Die Symbolik ist bei einigen Feinheiten in der Literatur nicht ganz einheitlich, hier gebe ich nur die von mir verwendete an. Sie sollen verstehen, was damit gemeint ist, auch ohne es in jedem Falle ausrechnen zu können. Es ist sinnvoll, dabei vom gewöhnlichen bestimmten eindimensionalen Integral auszugehen.

Erinnerung an das gewöhnliche bestimmte Integral: Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{dx \rightarrow 0} \sum_i f(x_i) dx_i \quad (3.5)$$

ist der Flächeninhalt unter der Funktion $f(x)$ im Intervall zwischen a und b . Zur Berechnung muß man (mindestens gedanklich) eine Folge von immer feiner werdenden Unterteilungen des Integrationsintervalls in lauter kleine Subintervalle $i = 1, \dots$ vollziehen. Wenn x_i ein Punkt im Subintervall i ist und dieses die Länge dx_i hat, so ist $f(x_i) dx_i$ eine um so bessere Approximation für den Beitrag des Subintervalls zur Fläche, je kleiner dx_i wird. Wenn also die Länge dx des längsten Subintervalls gegen null geht, bleibt der Summe auf der rechten Seite von (3.5) nichts weiter übrig, als gegen den Flächeninhalt zu streben. "Vernünftige" $f(x)$ vorausgesetzt, die man in der Physik in der Regel aber hat.

Die Symbolik auf der linken Seite von (3.5) drückt diesen Grenzprozeß in gewissem Sinne abstrakt aus. dx ist eine infinitesimal kleine Subintervall-Länge, $f(x) dx$ der Flächen-Beitrag eines entsprechenden kleinen Intervalls um x herum und \int symbolisiert die Aufsummation über die unendlich vielen infinitesimal kleinen Subintervalle.

Weg-Integral (über krumme Wege): Die Funktion im x -Integral (3.5) kann ruhig außer von x auch noch von den anderen beiden Raumkoordinaten y, z abhängen (d.h. ein Skalarfeld im Sinne von Abschnitt ?? sein). Diese beiden Koordinaten bleiben während der Integration einfach unverändert. Der Wert des Integrals hängt dann natürlich von ihnen ab. Das ist dann schon ein Wegintegral. Und zwar das Integral des Skalarfeldes $f(\vec{r})$ entlang eines geraden Weges auf der x -Achse vom Punkt $\vec{r}_1 = (a, 0, 0)$ zum Punkt $\vec{r}_2 = (b, 0, 0)$.

Wegintegral eines Skalarfeldes: Läßt man den Bezug auf die x -Achse weg, so läßt sich dieses Integral schreiben als

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} f(\vec{r}) ds = \lim_{ds \rightarrow 0} \sum_i f(\vec{r}_i) ds_i. \quad (3.6)$$

ds wird dabei üblicherweise für die Länge eines infinitesimal kleinen Linienelements genommen. Weil nun nicht nur gerade Linien in lauter Subintervalle unterteilt werden können, sondern auch ziemlich krumme, sich irgendwie durch den Raum windende, kann man damit praktisch entlang beliebiger krummer Linien integrieren (zumindest gedanklich, das "Ausrechnen" kann sehr schwierig oder gar unmöglich werden). Natürlich hängt der Wert des Integrals zwischen den beiden Punkten vom Weg ab, den man dazwischen geht. Man müßte also eigentlich noch immer den konkret gemeinten Weg mit angeben. Weil wir aber Wegintegrale über Skalarfelder eigentlich gar nicht brauchen, will ich das nicht ausmalen, sondern gleich übergehen zu den wichtigeren

Wegintegral eines Vektorfeldes – offene Wege: Für Kraftfelder $\vec{F}(\vec{r})$ sind solche Integrale

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{s} = \lim_{ds \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{s}_i \quad (3.7)$$

als mechanische Arbeit wohlbekannt. Neu ist hier das Auftreten eines vektoriellen Linienelement $d\vec{s}$. Dessen Betrag ist die übliche Länge des infinitesimalen Subintervalls. Seine Richtung ist in jedem Punkt tangential entlang des Weges in "Marschrichtung" (d.h. entlang der Durchlaufrichtung von Anfangs- zu Endpunkt). Aufsummiert werden müssen dann die Skalarprodukte der lokalen Feldvektoren \vec{F} mit den vektoriellen Linienelementen.

Diese Wegintegrale können auf gewöhnliche Integrale zurückgeführt werden. Man braucht eine Parameterdarstellung $\vec{r}(s)$, welche entlang der Kurve von $\vec{r}(s_1) = \vec{a}$ nach $\vec{r}(s_2) = \vec{b}$ läuft, wenn s von s_1 nach s_2 läuft. Dann gilt

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(\vec{r}(s)) \frac{d\vec{r}(s)}{ds} ds. \quad \text{Naheliegender Parameter: } s = \text{Weglänge auf der Kurve.} \\ \text{Dann ist } \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \vec{e}_t(s) \text{ gerade der Tangenteneinheitsvektor an der jeweiligen Stelle der Kurve.} \quad (3.8)$$

Wegintegral eines Vektorfeldes – geschlossene Wege: Wenn Anfangs- und Endpunkt der Integration übereinstimmen, hat man ein geschlossenes Integral. Das wird durch einen Kreis im Integralzeichen gekennzeichnet. Für solche Integrale gibt es eine gesonderte Bezeichnung:

$$\oint \vec{v}(\vec{r}) d\vec{s} \quad \text{Zirkulation des Vektorfeldes } \vec{v} \text{ entlang geschlossener Linie.} \quad (3.9)$$

Diese Bezeichnung ergibt sich aus der Anschauung für den Fall, daß $\vec{v}(\vec{r})$ das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung ist. Dann ist das Integral nämlich überhaupt nur von null verschieden, wenn die Flüssigkeit irgendwie entlang des gewählten geschlossenen Weges herumzirkuliert. Bei verwirbelten Strömungen ist das was ganz normales. Das Vorzeichen der Zirkulation hängt natürlich von der Umlaufrichtung des Weges ab. Bei unverwirbelten Strömungen oder bei konservativen Kraftfeldern verschwinden Zirkulationsintegrale.

Flächen-Integral (über krumme Flächen): Das Prinzip von der immer feineren Aufteilung des Integrationsgebietes in kleine Elemente kann man natürlich auch auf höherdimensionale Gebiete anwenden. Von den Flächenintegralen brauchen wir nur die sogenannten *Flußintegrale*

$$\int_A \vec{v}(\vec{r}) d\vec{A} = \lim_{dA \rightarrow 0} \sum_i \vec{v}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{A}_i \quad \text{Fluß des Vektorfeldes } \vec{v} \text{ durch Fläche } A. \quad (3.10)$$

Hier treten vektorielle Flächenelemente $d\vec{A}$ auf. Ihr Betrag gibt den Flächeninhalt der infinitesimalen Teilfläche an, Ihre Richtung ist durch eine Flächennormale gegeben. Welche von den beiden Flächennormalen man nimmt, hängt von der Situation ab und wird weiter unten erörtert werden.

Die Bezeichnung "Flußintegral" ergibt sich aus der Anschauung für den Fall, daß $\vec{v}(\vec{r})$ das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung ist. Dann ist $\vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$ nämlich gerade die Menge Flüssigkeit, die pro Zeiteinheit durch das Flächenelement fließt. Das Integral ist dann entsprechend die Durchflußmenge pro Zeiteinheit durch die Gesamtfläche A , mit der das Integral gekennzeichnet ist.

Bei Integration über geschlossene Flächen (also Oberflächen (V) von Volumina V) wird wieder ein Kringel ins Integral gemalt. Außerdem wird hier per Konvention immer die äußere Flächennormale genommen, so daß

$$\oint_{(V)} \vec{v}(\vec{r}) d\vec{A} \quad (3.11)$$

die pro Zeiteinheit aus dem Volumen V durch seine Oberfläche (V) hinausströmende Flüssigkeitsmenge bedeutet. Wenn aus einem Volumen ständig Wasser nach außen fließt, muß im Innern irgendwo eine Quelle sein. Deswegen wird dieses Integral auch als *Quellstärke* des Feldes in V bezeichnet.

Volumen-Integral (über endliche Volumina): Wir brauchen nur skalare Volumenintegrale

$$\int_V f(\vec{r}) dV = \lim_{dV \rightarrow 0} \sum_i f(\vec{r}_i) dV_i, \quad (3.12)$$

wo nun dV ein infinitesimales Subvolumen ist und der Rest völlig analog zu den niederen Dimensionen.

3.4 Integralsätze

Die Integralsätze von Gauß und Stokes spielen eine große Rolle in der Elektrodynamik. Sie erlauben die Umwandlung von der differentiellen in die integrale Form der Maxwellgleichungen und helfen bei der anschaulichen Interpretation von div und rot. Für das Verständnis ist es günstig, zunächst wieder einfache Integrale zu betrachten. Für diese gilt bekanntlich

$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = f(b) - f(a) \quad \text{Fundamentalsatz Integralrechnung.} \quad (3.13)$$

Wichtig für uns: Das Integral der Ableitung einer Funktion über ein Gebiet $[a,b]$ wird bestimmt durch die Funktionswerte auf dem Rand. Ganz analoge Aussagen gelten für die "Vektorableitungen" grad, div, rot von Feldern. Am einfachsten ist das für den Gradienten:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad } U(\vec{r}) d\vec{s} = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) \quad (3.14)$$

Das ist offensichtlich die direkte Verallgemeinerung von (3.13). Und Ihnen aus der Mechanik schon bekannt. Dieses Integral ist offensichtlich vom Integrationsweg unabhängig.

Die beiden Integralsätze für div und rot haben eigene Namen:

$$\int_V \text{div } \vec{v} dV = \oint_{(V)} \vec{v} d\vec{A} \quad \text{Integralsatz von Gauß} \quad (3.15)$$

$$\int_A \text{rot } \vec{v} d\vec{A} = \oint_{(A)} \vec{v} d\vec{s} \quad \text{Integralsatz von Stokes} \quad (3.16)$$

Gauß in Worten: Integriert man die Divergenz eines Vektorfeldes über ein Volumen V , so ist das Integral gleich dem Fluß des Vektorfeldes durch die Oberfläche (V) des Volumens.

Stokes in Worten: Der Fluß der Rotation eines Vektorfeldes durch eine Fläche A ist gleich der Zirkulation des Vektorfeldes entlang des Randes (A) dieser Fläche.

Beim Stokes ist noch eine Anmerkung nötig: Bei der Berechnung der Zirkulation rechts muß der Umlaufsinn um die Fläche "rechtshändig" zur Flächennormalen genommen werden. Also so wie die Drehrichtung einer rechtsgängigen Schraube, die in Richtung der Flächennormalen in die Fläche hineingeschraubt wird. Oder so wie die Finger der rechten Hand zeigen, wenn man den Daumen in Richtung Flächennormale streckt und die anderen Finger um diese herumwickelt.

3.5 Anschauliche Interpretation von grad, div, rot

Der Gradient wird hier nur als Gedankenstütze erwähnt, weil schon in der Mechanik behandelt.

Gradient: Anstiegsvektor

Der Gradient eines Skalarfeldes $U(\vec{r})$ zeigt in Richtung des steilsten Anwachsens von U . Sein Betrag ist gleich dem Anstieg von U in diese Richtung.

Divergenz: Quelldichte

Wir betrachten eine Folge immer kleinerer Volumina ΔV , die sich auf einen Punkt \vec{r} zusammenziehen. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt offensichtlich

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow \vec{r}} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{v} dV. \quad (3.17)$$

Das Integral wird mit dem Integralsatz von Gauß umgeformt:

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow \vec{r}} \frac{1}{\Delta V} \oint_{(\Delta V)} \vec{v} d\vec{A}. \quad (3.18)$$

Wir denken uns nun das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ wieder als Geschwindigkeitsfeld einer stationär strömenden Flüssigkeit. Dann ist das Integral rechts ja gerade die Menge Flüssigkeit, die pro Zeiteinheit aus dem Volumen ΔV herausfließt. Was herausfließt muß im Innern durch "Quellen" eingespeist werden. Das Flußintegral ist also gleich der Menge von Flüssigkeit, die im Innern aus den Quellen fließt. Geteilt durch das Volumen ΔV gibt die mittlere Quelldichte in ΔV . Im Limes $\Delta V \rightarrow \vec{r}$ konvergiert diese mittlere Quelldichte gegen die Quelldichte in dem Punkt, auf den sich die Folge der Volumina zusammenzieht. Also kann $\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r})$ als die Quelldichte der Flüssigkeit im Punkt \vec{r} interpretiert werden.

Rotation: Wirbeldichte

Ähnlich geht es mit der Rotation, nur etwas komplizierter, weil das ein Vektor ist. Weil die Rotation im Integralsatz von Stokes vorkommt und dort in einem Flächenintegral steht, betrachten wir diesmal eine Folge von Flächen ΔA , die auf einen Punkt \vec{r} zusammenschrumpfen. Alle Flächen der Folge seien eben und haben die gleiche Richtung der Flächennormale, sagen wir entlang eines Einheitsvektors \vec{e} . Mit Mittelwertsatz Integralrechnung und Stokes ergibt das

$$\vec{e} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}) = \lim_{\Delta A \rightarrow \vec{r}} \frac{1}{\Delta A} \int_{\Delta A} \operatorname{rot} \vec{v} d\vec{A} = \lim_{\Delta A \rightarrow \vec{r}} \frac{1}{\Delta A} \oint_{(\Delta A)} \vec{v} d\vec{s}. \quad (3.19)$$

Zur Interpretation fassen wir das Vektorfeld \vec{v} wieder als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit auf. Denken wir zunächst an einen Fluß, der zwar schon träge dahinfließt und eine ebene Oberfläche hat, aber immer noch etwas verwirbelt ist (Elbe bei Dresden). Die Folge von Flächen realisieren wir (gedanklich) durch immer kleiner werdende Korkringe, die wir auf das Wasser legen. \vec{e} steht dann senkrecht zur Wasseroberfläche. Die Korkringe schwimmen den Fluß hinab. Dabei drehen sie sich, wenn in ihrem Inneren ein Wirbel sitzt. Die Drehgeschwindigkeit ist also ein Maß für die Stärke der Wirbel im Innern. Verursacht wird die Drehung aber nur durch die Zirkulation der Strömung der Wasserteilchen am Rand der Fläche, dort wo der Korkring aufliegt. Der Quotient aus Zirkulationsintegral und Fläche rechts in (3.19) ist also irgendwie so was wie eine mittlere Wirbeldichte innerhalb des Ringes. Folglich ist es einleuchtend, den Limes gerade als die Wirbeldichte im Punkt \vec{r} zu bezeichnen.

Wirbel sind aber nicht nur an der Oberfläche des Flusses da. Sie setzen sich nach unten als Wirbelschläuche bzw. -Fäden fort. Man kann das z.B. in der Badewanne beobachten, wenn man das Wasser rausläßt. Oder

extrem bei einem Tornado in der Atmosphäre. Diese Wirbelfäden können durchaus krumm und gewunden sein. Die lokale Verwirbelung wird immer durch einen Vektor charakterisiert. Seine Richtung ist die der Drehachse (des Wirbelfadens), sein Betrag charakterisiert die Stärke der Verwirbelung. Dies leistet gerade der Vektor $\text{rot } \vec{v}(\vec{r})$.

3.6 Einige Rechenregeln mit ∇

Die wichtigsten Rechenregeln sind auf meinem Merkzettel zusammengefaßt und werden in den Übungen vertieft bzw. in der Vorlesung dann nochmals erläutert (begründet), wenn sie gebraucht werden. Hier nur die dabei anzuwendenden Rechenrezepte und jeweils ein Beispiel. Grundsätzlich muß jeweils sowohl der Operatorcharakter (alles ableiten, was dahinter steht) als auch der Vektorcharakter (Verknüpfung durch unterschiedliche Produkte möglich) beachtet werden.

a.) Produktregel bei Produkten von Feldern

Einfache Differentialrechnung: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Bei Anwendung von Nabla auf Produkte von 2 Feldern schreibe man zunächst das Produkt als Summe zweier identischer Produkte, in denen jeweils ein anderer Faktor als derjenige gekennzeichnet wird, auf den die Ableitungsoperation wirkt (bei mir Pfeil darüber), dann sortiere man die Reihenfolge in den Produkten so um, daß nur noch das gekennzeichnete Feld hinter dem Nabla steht und lasse die Kennzeichnung wieder weg. Beispiel:

$$\text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\vec{u}} \times \vec{v} + \vec{u} \times \overset{\downarrow}{\vec{v}}) \quad (3.20)$$

$$= \nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\vec{u}} \times \vec{v}) + \nabla \cdot (\vec{u} \times \overset{\downarrow}{\vec{v}}) \stackrel{\text{Spat}}{=} (\nabla \times \overset{\downarrow}{\vec{u}}) \cdot \vec{v} - (\nabla \times \overset{\downarrow}{\vec{v}}) \cdot \vec{u} \quad (3.21)$$

$$= \vec{v} \text{ rot } \vec{u} - \vec{u} \text{ rot } \vec{v}. \quad (3.22)$$

b.) Kettenregel bei impliziten Abhängigkeiten

Einfache Differentialrechnung: $\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$.

Eselsbrücke: der Bruch df/dx wird mit dg erweitert. Die Eselsbrücke hilft auch bei Nabla, wenn man dies formal als $d/d\vec{r}$ auffaßt. Beispiel:

$$\text{grad } U(V(\vec{r})) = \nabla U(V(\vec{r})) = \frac{d}{d\vec{r}} U(V(\vec{r})) = \frac{dU}{dV} \frac{dV}{d\vec{r}} = \frac{dU}{dV} \text{ grad } V. \quad (3.23)$$

4 Die Maxwellgleichungen

Ich schreibe die Gleichungen hin und diskutiere sie danach – letztlich die ganze Vorlesung lang.

Man kann sie in 2 Gleichungs-Gruppen aufteilen:

- a) Feldgleichungen: gelten unabhängig davon, welche Materialien man in die Felder einbringt
- b) Materialgleichungen: beschreiben die elektromagnetischen Eigenschaften des Mediums, in dem sich das elmag. Feld ausbildet.

Feldgleichungen: Es gibt eine differentielle und eine äquivalente integrale Formulierung.

differentiell	integral	zugeordnetes Gesetz	
$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho$	$\oint_{(V)} \vec{D} d\vec{A} = Q_V$	COULOMB'sches Gesetz (1786)	(4.1)

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\oint_{(V)} \vec{B} d\vec{A} = 0$	Keine magn. Monopole (man sucht noch)	(4.2)
----------------------------------	------------------------------------	--	-------

$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_{(A)} \vec{H} d\vec{s} = I_A + \int_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{A}$	Durchflutungsgesetz (OERSTEDT 1820)	(4.3)
--	--	--	-------

$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{(A)} \vec{E} d\vec{s} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}$	Induktionsgesetz (FARADAY 1831)	(4.4)
---	---	------------------------------------	-------

Hier tauchen $\vec{D}(\vec{r})$ und $\vec{H}(\vec{r})$ als neue Felder auf. Sie hängen über Materialgleichungen mit den bereits bekannten Feldgrößen elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ und der magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ zusammen, welche über die Lorentzkraft (2.7) die Kraftwirkung des elektromagnetischen Feldes auf Ladungen beschreiben.

Materialgleichungen:

Die Materialgleichungen lassen sich natürlich nicht allgemein schreiben. Wir beschränken uns zunächst auf das Vakuum. Da sind das die einfachen Definitionsgleichungen

Vakuum:
$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} & \text{elektrische Flußdichte} \\ \vec{H} = \vec{B}/\mu_0 & \text{magnetische Feldstärke} \end{cases} \quad (4.5)$$

für die zusätzlichen Feldgrößen \vec{D} und \vec{H} ⁹. Hier tritt neben der bereits erwähnten Dielektrizitätskonstanten ε_0 noch die magnetische Permeabilität $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs/Am}$ des Vakuums auf.

Damit sind im Vakuum doch nur die 6 Komponenten von \vec{E} und \vec{B} relevant.

Die Materialgleichungen in Stoffen werden wir später behandeln.

⁹Obwohl \vec{B} in den magnetischen Beitrag zur Lorentz-Kraft 2.7 auf eine bewegte Ladung eingeht, wird \vec{H} magnetische Feldstärke genannt, weil sich das historisch so eingebürgert hat. Im Vakuum ist das auch egal, weil beide Felder bis auf einen konstanten Faktor gleich sind. In Medien ist der Unterschied aber wichtig und muß im Kopf behalten werden. Das kommt aber erst später.

Erste Diskussion der MGI:

- Das sind die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Sie wurden erstmals von James Clerk Maxwell (1831-1879) im Jahre 1864 in ähnlicher Weise so formuliert.
- Sie wurden von Maxwell nicht einfach irgendwie ausgedacht, sondern stellen die geniale Zusammenfassung mehrerer Grundgesetze dar, die über längere Zeit hinweg durch experimentelle Forschung und theoretische Verallgemeinerung ermittelt worden waren. In den Feldgleichungen ist das durch die Namen und Jahreszahlen in der rechten Spalte der Tabelle angedeutet.
- Wir werden die Maxwellgleichungen wie ein Axiomensystem benutzen, aus dem die ganze E-dynamik folgt.
- Die differentielle Formulierung der Feldgleichungen (erste Spalte) gilt in jedem Raum-Zeitpunkt.
- Die integrale Formulierung (zweite Spalte) gilt für *jedes beliebige Integrationsgebiet* mit hinreichend glattem Rand (für jede beliebige Fläche A bzw. jedes beliebige Volumen V). Natürlich müssen rechts und links jeweils die gleichen Gebiete genommen werden. Insbesondere sind

$$Q_V := \int_V \rho dV \quad \text{und} \quad I_A := \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (4.6)$$

die Ladungsmenge in V bzw. die Stromstärke durch A .

- Beide Formulierungen sind äquivalent:

Äquivalenz differentiell - integrala.) Gleichungen mit "div"

differentiell \rightarrow *integral*:

Gehe aus z.B. von $\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$. Integriere über ein Volumen V . Die rechte Seite gibt Q_V . Auf das Integral der linken Seite wird der Gauß-Satz angewendet, Ergebnis ist die integrale Formel (4.1).

integral \rightarrow *differentiell*:

Anwendung von Gauß auf die integrale Formel (4.1) sowie Subtraktion der rechten Seite gibt zunächst $\int_V [\operatorname{div} \vec{D} - \rho] dV = 0$. Weil dies für *jedes beliebige Volumen* V gilt, muß der Integrand punktweise verschwinden. Wäre der Integrand nämlich in irgendeinem Punkte \vec{r} von null verschieden, sagen wir o.B.d.A. positiv, so wäre er auch in einer kleinen Umgebung von \vec{r} positiv, wenn er ausreichend glatt ist, was in der Physik immer vorausgesetzt wird. Dann wäre auch das Integral über diese kleine Umgebung positiv, was der integralen MGI widerspräche. Also verschwindet der Integrand punktweise, was der differentiellen MGI äquivalent ist.

b.) Gleichungen mit "rot"

Das läuft völlig analog, nur daß Stokes statt Gauß angezogen werden muß, um das Linienintegral in ein Flächenintegral umzuwandeln und umgekehrt.

Anmerkung zur Zeitableitung in den integralen MGI:

Es steht jeweils die partielle Zeitableitung unter dem Integral. Wenn das Integrationsgebiet zeitlich konstant ist, kann diese als totale Zeitableitung vor das Integral gezogen werden. Aber nur dann !!! Wir werden darauf viel später bei der Diskussion des Induktionsgesetzes zurückkommen.

5 Direkte Lösung der Maxwellgl. f. hochsymmetrische Fälle

Ein Grundproblem der theoretischen Elektrodynamik ist die Berechnung des von vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilungen erzeugten elektromagnetischen Feldes. Bei einigen einfachen Ladungs- und Stromverteilungen lassen sich die MGL unmittelbar lösen. Da diese Fälle von großer Bedeutung sind, und dies zugleich einen ersten tieferen Einblick in die Gleichungen erlaubt, will ich einige hier explizit vorführen, bevor im nächsten Kapitel die allgemeine Lösung behandelt wird.

5.1 Ruhende Punktladung Q

magnetischer Feldanteil: verschwindet, weil kein Strom fließt.¹⁰

Zuständige Gleichung für elektrischen Feldanteil:

$$\oint_{(V)} \vec{D} d\vec{A} = \begin{cases} Q & \text{falls Ladung im Volumen } V \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Ausnutzen der Symmetrie:

- a) Koordinatensystem: Wir legen den Ursprung $\vec{r} = 0$ in die Punktladung¹¹
- b) Betrag des D-Feldes: $|\vec{D}(\vec{r})| = D(r)$
Nur vom Abstand der Punktladung abhängig wegen Kugelsymmetrie.
- c) Richtung des D-Feldes: $\vec{D}(\vec{r}) \parallel \vec{r}$
Keine endliche Tangentialkomponente möglich wegen Rotationssymmetrie um die Achse in Richtung von \vec{r} .
Fazit a-c: $\vec{D}(\vec{r}) = D(r) \vec{e}_r$ (\vec{e}_r – radialer Einheitsvektor)
- d) Angepaßtes Integrationsgebiet: Kugel mit Radius R und Punktladung in der Mitte.

Rechnung:

$$Q = \oint_{|\vec{r}|=R} D(r) \vec{e}_r d\vec{A} = \oint_{|\vec{r}|=R} D(R) \vec{e}_r d\vec{A} = D(R) \oint_{r=R} dA = D(R) \cdot 4\pi R^2. \quad (5.2)$$

Ergebnis für das Feld:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad \text{bzw.} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r. \quad (5.3)$$

Resultierende Kraft auf eine Probeladung q am Orte \vec{r} :

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (5.4)$$

Das entspricht genau dem Coulomb-Gesetz (2.6) für die Kraft zwischen zwei Ladungen. Deshalb wird die benutzte MGL (4.1) als die allgemeine Formulierung des Coulomb-Gesetzes angesehen.

¹⁰Es ist das von der Punktladung erzeugte Magnetfeld gemeint. Natürlich kann überall im Raum ein Magnetfeld existieren, das von anderen bewegten Ladungen stammt. Wegen der Linearität der MGL addieren sich die Komponenten verschiedenen Ursprungs aber schlicht zum Gesamtfeld. Hier und im folgenden wird nur der von der jeweils betrachteten Ladungskonfiguration erzeugte Anteil betrachtet.

¹¹Es ist generell sinnvoll, das Bezugs- und Koordinatensystem der Symmetrie des Problems angepaßt zu wählen.

5.2 Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

Es wird das Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(r)$ gesucht.

Vorgehensweise: wie bei Punktladung.

Einzige Änderung: rechte Seite Q_V nicht mehr konstant, sondern vom Radius R der Kugel abhängig, nämlich ¹²

$$Q \Rightarrow Q_R := \int_{r < R} \rho(r) dV = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr. \quad (5.5)$$

Die elektrische Feldstärke bei r wird damit nur durch die Ladung im Innern bestimmt

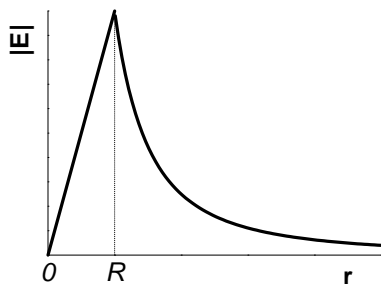
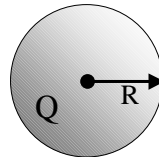
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\int_0^r x^2 \rho(x) dx}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r. \quad (5.6)$$

Das Integral im Zähler kann man natürlich nur ausrechnen, wenn man die Funktion $\rho(r)$ konkret kennt. Trotzdem ist es üblich, diese Formel als eine Lösung zu bezeichnen. Integrieren ist ja schließlich was einfaches.

5.2.1 Geladene Vollkugel

In einer Kugel mit dem Radius R sei die Ladung Q gleichmäßig verteilt.

Außen gilt offensichtlich $Q_r = Q$ und innen $Q_r = Q \cdot (r/R)^3$. Also



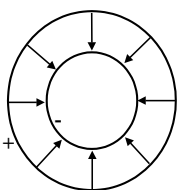
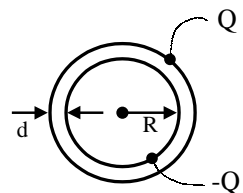
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \begin{cases} (r/R)^3 & \text{innen} \\ 1 & \text{außen} \end{cases} \quad (5.7)$$

- Innen steigt das Feld linear an.
- Außen ist es identisch mit dem einer Punktladung Q im Ursprung. (eine homogen geladene Kugel wirkt auf entfernte Körper also wie eine Punktladung.)

5.2.2 Kugelkondensator

Von 2 ineinander geschachtelten metallischen Kugelschalen trägt eine die Ladung Q , die andere $-Q$.

Zwischen den Kugelschalen gilt offensichtlich $Q_r = -Q$, sonst $Q_r = 0$. Also



$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \begin{cases} 1 & \text{zwischen Kugelschalen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.8)$$

¹²Bei kugelsymmetrischen Integranden wäre es ungeschickt, das Integrations-Volumen in lauter kleine Quader zu zerlegen. Statt dessen nimmt man lieber lauter Kugelschalen der infinitesimalen Dicke dr als Volumenelemente. Deren Volumen ist Oberfläche \times Dicke, $dV = 4\pi r^2 dr$. Das Volumenintegral wird so zu einem gewöhnlichen Integral.

Bei Kondensatoren spielen noch die Begriffe Spannung und Kapazität eine wichtige Rolle.

elektrische Spannung zwischen den Kugelschalen

Ist die Arbeit pro Ladung, die das elektrische Feld leistet, wenn die Ladung von einer Schale zur anderen bewegt wird:¹³

$$U = - \int_{Schale1}^{Schale2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \pm \int_R^{R+d} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \mp \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 R(R+d)}. \quad (5.9)$$

Kapazität

Gibt an, wie viel Ladung man pro Spannung auf dem Kondensator speichern kann.

$$C := \left| \frac{Q}{U} \right| = \epsilon_0 \frac{4\pi R(R+d)}{d} \quad (\text{Maßeinheit: Farad} \quad 1F = 1As/V) \quad (5.10)$$

¹³In der Elektrostatik gilt $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = 0$, so daß diese Arbeit vom Weg unabhängig ist.

5.3 Geladene Platte

Wir betrachten eine Ebene G mit konstanter Flächenladungsdichte σ (Ladungsmenge pro Flächeneinheit).
magnetischer Feldanteil: verschwindet, weil kein Strom fließt.

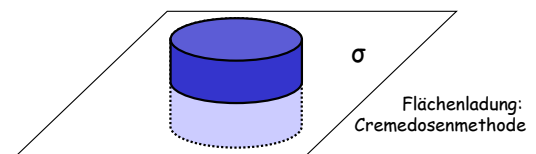
Zuständige Gleichung für elektrischen Feldanteil:

$$\oint_{(V)} \vec{D} d\vec{A} = \sigma \cdot A_{G \cap V} \quad \text{hier bedeutet } A_{G \cap V} \text{ den Flächeninhalt des Teils der Ebene } G, \text{ der in } V \text{ liegt.} \quad (5.11)$$

Ausnutzen der Symmetrie:

- Koordinatensystem: Wir legen den Ursprung $\vec{r} = 0$ in die Ebene und die z -Achse senkrecht zu ihr.
- Translationssymmetrie: $\vec{D}(\vec{r}) = \vec{D}(z)$
Weil alle Punkte der Ebene gleichwertig.
- Richtung des D-Feldes: $\vec{D}(\vec{r})$ normal zur Ebene, $\vec{D}(z) = (0, 0, D(z)) = D(z)\vec{e}_z$.
Keine Tangentialkomponenten. Weil diese müßten ja in eine bestimmte Tangential-Richtung zeigen. In der Ebene gibt es aber keine bevorzugte Richtung.
- Spiegelsymmetrie: $D(z) = -D(-z)$ (Feld entweder auf beiden Seiten weg von der Platte gerichtet, oder auf beiden Seiten hin zu ihr.)

- Angepaßtes Integrationsgebiet: Schlanke Säule, die senkrecht durch die Ebene stößt. Dann ist
- $A_{G \cap V}$ gerade ihre Querschnittsfläche, sagen wir $A_{\text{Säule}}$.



Rechnung:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot A_{\text{Säule}} &= \oint_{\text{Säule}} D(z)\vec{e}_z d\vec{A} \quad | \quad \text{auf Seitenflächen } \vec{e}_z \cdot d\vec{A} = 0, \text{ dort kein Beitrag} \\ &= \int_{\text{Grundfläche}} D(z)\vec{e}_z d\vec{A} + \int_{\text{Deckfläche}} D(z)\vec{e}_z d\vec{A} \quad | \quad \text{oben } d\vec{A} \text{ gleichgerichtet } \vec{e}_z, \text{ unten entgegen} \\ &= (D(z_+) - D(z_-)) \cdot A_{\text{Säule}} \quad | \quad \text{hier } z_- \text{ die Position der Grundfläche, } z_+ \text{ der Deckfläche} \end{aligned}$$

Fläche kürzt sich raus, also

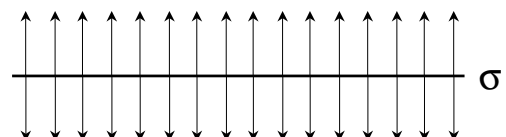
$$\boxed{D(z_+) - D(z_-) = \sigma} \quad \text{Das gilt immer, auch wenn andere Ladungen ausserhalb der Fläche die Symmetrie stören. Denn deren Feldbeiträge gehen kontinuierlich durch die Fläche durch.} \quad (5.12)$$

Dies für beliebige z_{\pm} , also $D(z)$ unterhalb der Ebene konstant und auch oberhalb der Ebene konstant. Beide Werte unterscheiden sich wegen der Spiegelsymmetrie nur durch das Vorzeichen. Mithin

Ergebnis für das Feld:

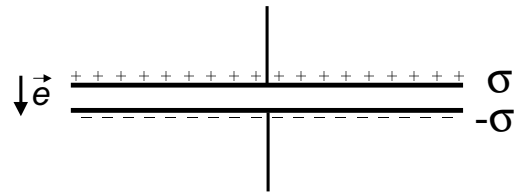
$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z \quad \text{bzw.} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z \quad (5.13)$$

In Worten: Das elektrische \vec{D} -Feld einer geladenen Ebene mit der Flächenladungsdichte σ ist normal zur Ebene. Sein Betrag ist überall $\sigma/2$. Die Feldrichtungen über und unter der Ebene sind entgegengesetzt.



5.4 Plattenkondensator

Modell: 2 planparallele Metallplatten mit der Fläche A . Darauf entgegengesetzte Ladungen $\pm Q$ mit den Flächendichten $\pm\sigma = \pm Q/A$ verteilt. Der Abstand d der beiden Platten sei sehr viel kleiner, als die Ausdehnung der Platten.



Bestimme das Feld im zentralen Bereich, wo Randeffekte vernachlässigbar sind!

Ausnutzen Superpositionsprinzip:

Gesamtfeld ist Addition der Felder (5.13) zweier entgegengesetzt geladener Platten.

Zwischen den Platten beide Felder parallel, außen antiparallel, also

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{e}_{\pm} \sigma / \varepsilon_0 & \text{zwischen Platten} \\ 0 & \text{außen} \end{cases} \quad (\vec{e}_{\pm} \text{ Einheitsvektor von } + \text{ nach } -) \quad (5.14)$$

Der ideale Plattenkondensator erzeugt ein homogenes elektrisches Feld zwischen den Platten und kein Feld außerhalb.

elektrische Spannung zwischen den Platten

Ist die Arbeit pro Ladung, die das elektrische Feld leistet, wenn die Ladung von einer Platte zur anderen bewegt wird.

$$U = - \int_{Platte1}^{Platte2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \pm \sigma d / \varepsilon_0 = \pm \frac{Qd}{A\varepsilon_0}. \quad (5.15)$$

Kapazität

Gibt an, wie viel Ladung man pro Spannung auf dem Kondensator speichern kann.

$$C := \left| \frac{Q}{U} \right| = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad (\text{Maßeinheit: Farad} \quad 1F = 1As/V) \quad (5.16)$$

5.5 Magnetfeld eines Drahtes

Stromdurchflossene Drähte erzeugen bekanntlich ein Magnetfeld.

Als Modell betrachten wir einen Draht, der infinitesimal dünn, unendlich lang, und gerade ist. Er möge vom Strom I durchflossen werden.

Wir bestimmen sein elektromagnetisches Feld aus den Maxwellgleichungen.

elektrischer Feldanteil: verschwindet, weil der Draht elektrisch neutral ist.

Symmetrien: Drehung um Draht, Translation entlang Draht, Zeitverschiebung

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = H_\rho(\rho)\vec{e}_\rho + H_\varphi(\rho)\vec{e}_\varphi + H_z(\rho)\vec{e}_z$$

Die Feldkomponenten in Zylinderkoord. hängen nur vom Abstand ρ vom Draht ab.

Bestimmung der Feldkomponenten aus den MGL.:

Zuerst nehmen wir einen Zylinder mit Höhe h und Radius R ("Cremedose") mit Draht in Zylinderachse als Integrationsgebiet für $\text{div } \vec{B} = 0$. Das gibt

$$0 = \mu_0 \oint_{(V)} \vec{H} \cdot d\vec{A} \stackrel{\text{Cremedose}}{=} \underset{h,R}{H_\rho(R) \cdot 2\pi R h} \Rightarrow \boxed{H_\rho \equiv 0}$$

Die Beträge von Deckel und Boden der Dose unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen und heben sich hierbei weg.

Nun ein Rechteck der Höhe h und Breite b mit Flächennormale senkrecht zu Draht als Integrationsgebiet für $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$:

Der Strom durch die eingeschlossene Fläche ist null (der Draht durchstößt sich nicht).

Die Beiträge 2 und 4 zum Zirkulationsintegral verschwinden, weil hier $d\vec{s} \parallel \vec{e}_\rho$ und $H_\rho = 0$.

Auf den Vertikalen 1 u. 3 ist $d\vec{s} \parallel \vec{e}_z$ und $H_z(\rho)$ ist jeweils konstant

Also bleibt $(H_z(\rho_1) - H_z(\rho_3))h = 0 \Rightarrow H_z = \text{const.}$

Das vom Draht erzeugte Feld muss aber für $\rho \rightarrow \infty$ verschwinden, also $\boxed{H_z \equiv 0}$.

Es bleibt also nur noch $H_\varphi(\rho)$ zu bestimmen.

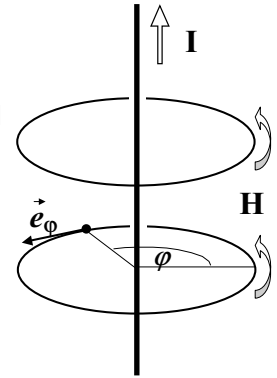
Angepaßter Integrationsweg: Kreis mit Radius R um den Draht. Strom I fließt durch $\Rightarrow I_A = I$.

$$I = \oint_{\rho=R} H_\varphi(\rho)\vec{e}_\varphi \cdot d\vec{s} \stackrel{d\vec{s} \parallel \vec{e}_\varphi}{=} H_\varphi(R) \oint_{r=R} ds = H_\varphi(R) 2\pi R. \quad (\forall R)$$

Ergebnis für das Feld:

$$\boxed{\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi} \quad \text{bzw.} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

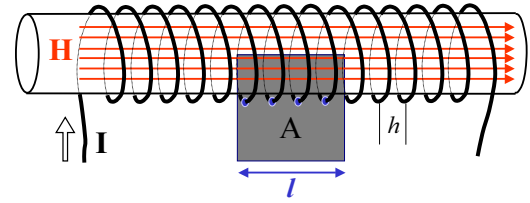
Richtung von \vec{e}_φ : Rechtsschraubenregel (in Stromrichtung hineingeschraubt) bzw. Rechte-Hand-Regel (Daumen in Stromrichtung, Finger umschliessen Draht in φ -Richtung). (5.17)



5.6 Schlanke Spule

Im Innern von Spulen herrschen relativ starke homogene Magnetfelder.

Als Modell betrachten wir eine Spule, die dicht gewickelt (Abstand h zwischen Windungen klein gegen Spulendurchmesser), unendlich lang (Länge viel größer als Durchmesser) und gerade ist.



Wir bestimmen das elektromagnetische Feld im Innern der vom Strom I durchflossenen Spule aus den Maxwellgleichungen.

elektrischer Feldanteil: verschwindet wieder, weil der Draht elektrisch neutral ist.

Zuständige Hauptgleichung für magnetischen Feldanteil:

$$\oint_{(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_A \quad (5.18)$$

Ausnutzen der Symmetrie:

- Koordinatensystem: Wir legen z -Achse in die Spulenachse.
- Bei langer dicht gewickelter Spule Feld praktisch unabhängig von z .
- Richtung des H -Feldes in der Spule:
Feldlinien dürfen nirgendwo beginnen, wegen der Zylindersymmetrie also keine radiale Komponenten möglich, sondern nur z -Komponenten¹⁴
- Angepaßtes Integrationsgebiet:
Rechteck A , wovon eine Seite der Länge l innen parallel z läuft und die beiden angrenzenden Seiten radial von der Spule nach außen gehen.

Rechnung:

Linke Seite von (5.18): Der Hauptbeitrag $H \cdot l$ kommt von der innen parallel den Feldlinien liegenden Seite. Die innen senkrecht zu den Feldlinien verlaufenden Teile des Umfangs tragen nichts bei, weil $\vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$. Vom außen liegende Teil des Umfangs von A kommen nur die Streufeld-Beiträge – die sollen vernachlässigbar klein sein.

Rechte Seite von (5.18): Der Draht durchstößt die Kontrollfläche mehrfach (in der Skizze 4 mal, im allgemeinen l/h -fach). Entsprechend ist die rechte Seite lI/h .

Die rechte Seite ist unabhängig davon, wo die innere Begrenzungslinie in der Spule genau liegt. Also ist H ebenfalls von der Position in der Spule unabhängig, es handelt sich um ein homogenes Feld¹⁵

Ergebnis für das Feld im Innern:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{h} \vec{e}_z \quad \text{bzw.} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{h} \vec{e}_z. \quad (5.19)$$

¹⁴die Feldlinien treten an einem Ende aus der Spule, machen eine extrem weite Kurve zurück (Streufeld) und treten am anderen Ende wieder ein. Das Streufeld ist schwach und wird hier vernachlässigt.

¹⁵näherungsweise, solange der Abstand von der Wicklung viel größer als deren Steighöhe h ist.

6 Allgemeine Theorie des elektromagnetischen Feldes im Vakuum

6.1 Grundaufgabe der Elektrodynamik

Gegeben: Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ und Stromdichte $\vec{J}(\vec{r}, t)$

Gesucht: die elektromagnetischen Felder als Funktion von Ort \vec{r} und Zeit t .

In der Grundaufgabe der Elektrodynamik werden Ladungen und Ströme als gegebene Ursachen des elektromagnetischen Feldes angesehen, analog zur Grundaufgabe der Mechanik, wo die wirkenden Kräfte Ursache für die zu berechnende Bewegung der Körper sind.

Anmerkung:

Das ist noch nicht der Weisheit letzter Schluß! Denn die Felder wirken über die verallgemeinerte Lorentzkraft auf die Ladungen zurück. Deren Bewegung wird dadurch beeinflusst, damit auch wieder die Felder, usw. usw.

In diesem Kapitel beschränken wir uns aber auf die Grundaufgabe.

6.2 Einige allgemeine Folgerungen aus den MGI im Vakuum

Wir werden von der differentiellen Formulierung ausgehen.

6.2.1 Mathematische Charakterisierung

Für den Vakuumfall lassen sich die Felder \vec{D} und \vec{H} mit Hilfe der Materialgleichung eliminieren. Schreibt man weiter nur das gegebene immer rechts, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \rho / \varepsilon_0 & \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{J} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Zur mathematischen Charakterisierung dieser Gleichungen läßt sich u.a. sagen:

1. Es sind inhomogene partielle Differentialgleichungen erster Ordnung in Ort und Zeit.
 $\xRightarrow{\text{u.a.}}$ Für die eindeutige Lösung sind Rand- und Anfangsbedingungen erforderlich.
 Wir werden diese später bei den allgemeinen Lösungsformeln erörtern.
2. Es sind lineare Gleichungen $\xRightarrow{\text{u.a.}}$ Es gilt das Superpositionsprinzip (s.u.)
3. Es sind insgesamt 8 skalare Gleichungen für nur 6 unbekannte Feldkomponenten.
 $\xRightarrow{\text{u.a.}}$ Sind das etwa zu viele Gleichungen? (s.u.)

6.2.2 Superpositionsprinzip

Die MGI sind linear sowohl in den unbekannten Feldern als auch in den Inhomogenitäten ρ, \vec{J} . Ohne Rand-Anfangsbedingung gilt dann:

- 1.) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich durch Addition der allgemeinen (einer beliebigen) Lösung der homogenen Gleichungen zu einer speziellen Lösung der inhomogenen.

II.) Wenn \vec{E}_1, \vec{B}_1 Lösungen zu ρ_1, \vec{J}_1 und \vec{E}_2, \vec{B}_2 Lösungen zu ρ_2, \vec{J}_2 sind, so sind $\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ Lösungen zu $\rho_1 + \rho_2, \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ (= Superpositionsprinzip)

6.2.3 Widerspruchsfreiheit bei Ladungserhaltung

Wir hatten festgestellt, daß die MGI (6.1) 8 Gleichungen für nur 6 Unbekannte sind. Das System scheint überbestimmt zu sein. Wir werden sehen, daß das nicht der Fall ist, wenn \vec{J} und ρ bestimmte Bedingungen erfüllen.

Vorgehen schrittweise.

1. Schritt

Wir zeigen: für beliebiges \vec{E} sind Induktionsgleichung (rechts unten) und magnetische Monopolgleichung (links unten) nicht widersprüchlich
[das sind 4 Gleichungen für 3 Unbekannte]

Wir bilden die Divergenz der Induktionsgleichung:

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.2)$$

$$\text{NR1:} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) \stackrel{\text{Spat}}{=} (\nabla \times \nabla) \vec{E} = 0 \quad (6.3)$$

$$\text{NR2:} \quad \operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} \quad (\text{Vertauschbarkeit Reihenfolge Ableitung}) \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} \quad (\operatorname{div} \vec{B} \text{ ist zeitlich konstant.}) \quad (6.5)$$

Das ist mit der (keine magnetische) Monopolgleichung offensichtlich immer verträglich.

Schritt 2

Analog für die anderen beiden MGI.

$$\mu_0 \operatorname{div} \vec{J} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.6)$$

$$= 0 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} \stackrel{\text{Coulomb}}{=} -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) \quad (6.7)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad \text{Kontinuitätsgleichung} \quad (6.8)$$

Nur wenn die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist, sind die MGI. also widerspruchsfrei.

Fazit

Man kann also Stromdichten \vec{J} und Ladungsdichten ρ für die Grundaufgabe der Elektrodynamik nicht ganz beliebig vorgeben, sondern nur solche, die der Kontinuitätsgleichung (2.5) genügen, d.h. das Gesetz von der Erhaltung der Ladung nicht verletzen.

6.3 Die elektrodynamischen Potentiale

= Schlüssel zur allgemeinen Lösung der Maxwell-Gleichungen!

6.3.1 Einführung der elektrodynamischen Potentiale

Ausgangspunkt: die Maxwell-Gleichung $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

Diese wird automatisch gelöst durch den Ansatz

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \text{weil für beliebiges Feld } \vec{A} \text{ gilt} \quad \text{div rot } \vec{A} \equiv 0. \quad (6.9)$$

Setzen wir den Ansatz in die MGI $\text{rot } \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$ ein, so ergibt sich

$$0 = \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{E} + \text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \text{rot } \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \quad (6.10)$$

Dies wird seinerseits automatisch gelöst durch den Ansatz

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi, \quad \text{da} \quad \text{rot grad } \varphi \equiv 0 \quad \text{für beliebige } \varphi. \quad (6.11)$$

Zusammengefaßt: Durch die Ansätze

$$\boxed{\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi} \quad (6.12)$$

werden 4 von den 8 MGI. automatisch gelöst. Hier werden die elektromagnetischen Felder \vec{E} und \vec{B} durch Differentiation aus den Feldern \vec{A} und φ gewonnen. Letztere heißen deshalb elektrodynamische Potentiale, genauer:

$$\vec{A}(\vec{r}) - \text{Vektorpotential} \quad \varphi(\vec{r}) - \text{Skalarpotential}. \quad (6.13)$$

Woher bekommt man aber die Potentiale?

6.3.2 Die inhomogenen Wellengleichungen

Um Bestimmungsgleichungen für die Potentiale zu erhalten, setzt man die Ansätze (6.12) in die restlichen MGI ein:

Durchflutungsgleichung:

$$\text{rot rot } \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi = \mu_0 \vec{J} \quad (6.14)$$

Coulombgleichung:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} - \text{div grad } \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (6.15)$$

Das ist die Rohform der gesuchten Gleichungen. Noch recht kompliziert. Gute Physik ist meistens einfach. Wir versuchen also zu vereinfachen. Wir werden zunächst die Doppel-Operatoren umschreiben (s. Merkzettel zu Nabla, Grad, usw.):

$$\text{rot rot } \vec{A} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \quad \left| \text{ [bac-cab-Regel] } \right. \quad (6.16)$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (6.17)$$

$$= \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} \quad \left| \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ Laplace-Operator. } \right. \quad (6.18)$$

$$\text{div grad } \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi. \quad (6.19)$$

Damit werden die beiden Rohform-Gleichungen zu

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \text{grad} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{A} \right) \quad (6.20)$$

$$\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (6.21)$$

Das ist immer noch recht unübersichtlich. Gute Gleichungen sind noch einfacher. Ein Wissenschaftler, der das weiß, gibt sich mit solchen Gleichungen nicht zufrieden. Er sucht weiter nach Vereinfachungen. Aber wie? Nun, er probiert dies und das. Selten klappt es auf Anhieb. Aber wenn man zäh genug ist und eine Vereinfachung überhaupt möglich, dann findet man sie auch irgendwann.

In unserem Falle zeigt sich:

Die Potentiale sind durch (6.12) noch nicht eindeutig festgelegt. Unter den vielen Möglichkeiten kann man sich nun jene raussuchen, die möglichst einfache Gleichungen erfüllen. Das geschieht durch die sogenannte

Lorentz-Eichung

$$\boxed{\text{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0} \quad (6.22)$$

Dadurch verschwindet der störende Gradient rechts in (6.20) und in (6.21) kann $\text{div} \vec{A}$ eliminiert werden:

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \quad (6.23)$$

$$\Delta \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.24)$$

Das sieht doch schon viel freundlicher aus.

Interessant: Links bei beiden Gleichungen die gleiche Kombination von Orts- und Zeitableitungen. Für diese hat sich die Abkürzung d'Alembert-Operator

$$\boxed{\square := \Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}} \quad (6.25)$$

eingebürgert. Damit dann endgültig

$$\boxed{\begin{aligned} \square \vec{A} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \square \varphi &= -\rho/\varepsilon_0 \end{aligned}} \quad \underline{\text{inhomogene Wellengleichungen}} \quad (6.26)$$

Diese Gl. sind doch schön einfach. Zusammen mit (6.12) und der Lorentz-Eichung (6.22) sind sie den Maxwell-Gleichungen äquivalent.

Vorzüge:

- die Gleichungen für die 3 Komponenten von \vec{A} sind voneinander und von der für φ entkoppelt.
- links immer der gleiche Operator, also auch gleiche Lösungsmethode anwendbar.
- Es gibt eine allgemeine Lösungsformel!

Bevor wir letzteres zeigen,

Ergänzung zur Eichung ¹⁶

Wieso darf man Lorentz-eichen? Dazu folgende Überlegungen.

Wenn die Potentiale \vec{A} und φ gegeben sind, dann auch die physikalischen Felder durch (6.12). Umgekehrt ist das nicht der Fall! Wenn ich z.B. zu φ eine Konstante und zu \vec{A} einen konstanten Vektor addiere, so ändern sich \vec{E} und \vec{B} nicht (weil die Konstanten beim Differenzieren verschwinden). Aber die Vieldeutigkeit von \vec{A} und φ ist noch viel größer! Auch die Potentiale

$$\vec{A}' = \vec{A} - \text{grad } f \quad \text{und} \quad \varphi' = \varphi + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6.27)$$

erzeugen die gleichen Felder, wie \vec{A} und φ . Dabei kann $f(\vec{r})$ eine beliebige Funktion sein! (Natürlich differenzierbar). Beweis durch Einsetzen:

$$\text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} - \text{rot grad } f = \text{rot } \vec{A} = \vec{B} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \text{grad } \varphi' &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } f - \text{grad } \varphi - \text{grad } \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi = \vec{E}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Den Übergang (6.27) nennt man Eichtransformation. Man muß diese Transformation aber nicht explizit ausführen, den es gilt:

Behauptung:

Die Lösungen \vec{A} und φ der inhomogenen Wellengleichungen (6.26) erfüllen automatisch die Lorentz-Eichung, wenn diese auf dem Rand (im Unendlichen) gilt und \vec{J} und ρ der Kontinuitätsgleichung genügen.

Beweis: Addiere die Divergenz der inh. Wellengl. für \vec{A} und $\varepsilon_0\mu_0 \partial/\partial t$ angewendet auf die für φ . Das gibt zunächst

$$\square \left(\text{div } \vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \left(\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right). \quad (6.30)$$

Die Klammer rechts verschwindet wegen der Kontinuitätsgleichung. Damit bleibt $\square G = 0$, wenn man die Klammer links mit G abkürzt. Dies hat aber nur die triviale Lösung $G \equiv 0$, wenn $G = 0$ auf dem Rande und bei $t = 0$.

¹⁶das Kleingedruckte in Vorlesung nur verbal umrissen

6.3.3 Allgemeine Lösungsformeln

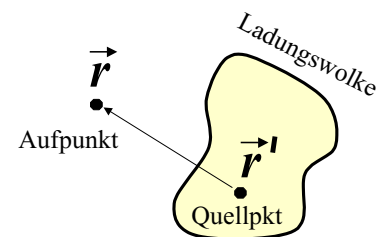
Diese wurden schon lange versprochen. Ich will sie deshalb erst hinschreiben, dann diskutieren und erst danach begründen. Sie lauten:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \end{aligned} \quad \text{retardierte Potentiale} \quad (6.31)$$

wobei $t' = t - \sqrt{\epsilon_0\mu_0} |\vec{r} - \vec{r}'|$.

Diskussion:

- Gleiche Struktur für die 3 Komponenten des Vektorpotentials und das Skalarpotential. Es genügt deshalb, letzteres zu diskutieren.
- Das Feld im Aufpunkt \vec{r} hängt von den Ladungsdichten in allen Quellpunkten \vec{r}' ab, das V' -Integral geht über den ganzen Raum.
- Die Ladungen eines Quellpunktes \vec{r}' wirken aber nicht momentan auf das Potential am Aufpunkt \vec{r} , sondern erst nach einer zeitlichen Verzögerung $t - t' = \sqrt{\epsilon_0\mu_0} |\vec{r} - \vec{r}'|$. Sie entspricht gerade der Laufzeit von Licht vom Quell zum Aufpunkt ($\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 1/c$). Deshalb heißen diese Potentiale retardiert (= verzögert, zurückgeblieben).
- Qualitativ sagen diese Formeln: die Felder quellen aus den Ladungen und Strömen heraus und breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit in den Raum hinaus aus.
Dies ist offensichtlich verträglich mit der Relativitätstheorie.



„Herleiten“ der Lösungsformeln

Nicht mathematisch, sondern physikalisch heuristisch.

Betrachten o.B.d.A. $\square\varphi = -\rho/\epsilon_0$.

Dabei $\rho(\vec{r})$ praktisch die Ladungsdichteverteilung des ganzen Kosmos. Diese setzt sich aber letztlich aus lauter einzelnen Teilladungen zusammen. Gemäß Superpositionsprinzip ist das Gesamt- φ die Überlagerung der φ 's der Teilladungen. Man kann also schrittweise vorgehen.

1. Schritt: Ruhende Punktladung im Ursprung

Wir können uns das Potential beschaffen, ohne die inhomogene Wellengleichung explizit lösen zu müssen. Wir kennen ja schon das elektrische Feld durch direkte Lösung der MGL:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (6.32)$$

Dies hängt mit dem Potential über $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ zusammen (wegen Stationarität ist $\dot{\vec{A}}$ null). Man überzeugt sich leicht (Übung!), daß dies durch

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{Coulomb-Potential} \quad (6.33)$$

gelöst wird.

2. Schritt: Ruhende Punktladung bei $\vec{r}' \neq 0$

Der Abstand des Aufpunktes \vec{r} von dem Ladungspunkt ist jetzt nicht mehr r , sondern $|\vec{r} - \vec{r}'|$. Also

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.34)$$

3. Schritt: Viele Punktladungen i , an den Orten \vec{r}_i' ruhend

Superpositionsprinzip: Addition der Potentiale (6.34)

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i'|}. \quad (6.35)$$

4. Schritt: Grenzübergang zu kontinuierlicher Ladungsdichte $\rho(\vec{r}')$

Q_i geht über in $\rho(\vec{r}')$, wo δV_i Volumen um Ladung i herum

Im Grenzübergang immer kleinerer Volumina gilt $\sum_i \delta V_i \longrightarrow \int dV'$, also

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.36)$$

5. Schritt: zeitabhängige Ladungsdichte $\rho(\vec{r}', t)$

Wenn Ladungsdichte t -abhängig, dann auch φ . Wegen Relativtheorie wird der Beitrag aus einem entfernten Quellpunkt nicht durch die momentan dort herrschende Ladungsdichte bestimmt, sondern durch die zu einer um die Laufzeit des Lichtes früheren Zeit t' . Also,

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}', t')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{mit} \quad t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c. \quad (6.37)$$

Das ist genau die allgemeine Lösungsformel für das Skalarpotential, wenn man $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ setzt.

Anmerkung 1:

So weit die heuristische "Herleitung". Die eigentlich schwierige Stelle mit der retardierten Zeit wurde hier durch ein physikalisches Argument bewältigt. Daß (6.31) wirklich eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung ist, kann man natürlich durch Einsetzen direkt überprüfen. Das erfordert dann aber einige Rechnung, die nichts neues bringt und hier nicht vorgeführt werden soll.

Anmerkung 2:

Die retardierten Potentiale sind in zweierlei Hinsicht eigentlich gar keine *allgemeinen* Lösungsformeln.

- Erstens sind das solche Lösungen, die im Unendlichen verschwinden (Randbedingung), wenn Ladungen und Ströme auf ein endliches Gebiet beschränkt sind. Diese Randbedingung wird bereits durch das Coulomb-Potential (6.32) hineingebracht. Sie ist aber physikalisch äußerst sinnvoll.
- Zweitens gibt es rein formal noch eine zweite Sorte von Lösungen, die sogenannten *avancierten* Potentiale. Bei diesen liegt t' nicht um die Laufzeit zurück in der Vergangenheit, sondern um die Laufzeit voraus in der Zukunft. Da dies dem Kausalitätsprinzip widerspricht, werden diese Lösungen aber verworfen.

7 Kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen

Alle Inertialsysteme sind gleichwertig. In jedem gelten die Maxwellgleichungen. Diese liefern $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ für die Geschwindigkeit c , mit der sich elektromagnetische Felder ausbreiten. c ist also eine universelle Konstante – unabhängig vom Bezugssystem. Daraus folgt die spezielle Relativitätstheorie. Diese haben wir schon in der Mechanik behandelt. Ein Ergebnis war der Minkowski-Raum als adequates Modell für die Raum-Zeit. Und: physikalische Gleichungen müssen Tensorgleichungen sein. Wir wollen jetzt die Maxwellgleichungen in die richtige Tensorform bringen.

7.1 Erinnerung an die Relativitätstheorie

4-dimensionale Raum-Zeit, Punkte x darin haben 2 Sorten von Koordinaten

kontravariante Koordinaten x^i : $(ct, \vec{r}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

kovariante Koordinaten x_i : $(ct, \vec{r}) = (-x_0, x_1, x_2, x_3)$

Relation dazwischen: $x_i = g_{ij}x^j$ bzw. $x^i = g^{ij}x_j$ (Einsteinkonvention: über gleiche Indizes absummieren)

$$\text{Metrik-Tensor: } g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = g^{ij}. \quad (7.1)$$

Der metrische Tensor ist fast die Einheitsmatrix – bis auf das Vorzeichen der Zeitkomponente.

Ableitung nach kontravarianten Koordinaten $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ ist kovarianter 4er-Vektor.

4er-Vektoren transformieren sich bei Übergang zwischen Inertialsystemen mit der Lorentz-Transformation.

7.2 Elektrodynamische 4er-Tensoren

Lorentzkonvention: $0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{A}$. Das läßt sich formal schreiben als

$$\boxed{\partial_i A^i = 0} \quad \text{4er-Lorentzkonvention mit } A^0 = \frac{\varphi}{c} \text{ und } (A^1, A^2, A^3) = \vec{A}. \quad (7.2)$$

Da ∂_i ein kovarianter 4er-Vektor ist und die rechte Seite eine Invariante, müssen die A^i Komponenten eines kontravarianten 4er-Vektors sein.

$$\text{Das zugehörige kovariante 4er-Potential ist offensichtlich } (A_0, \dots, A_3) = \left(-\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right). \quad (7.3)$$

Kontinuitätsgleichung: $0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } J = \frac{\partial \rho c}{\partial ct} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \dots$

$$\boxed{\partial_i J^i = 0} \quad \text{4er-Kontinuitätsgleichung mit } J^0 = \rho c \text{ und } (J^1, J^2, J^3) = \vec{J}. \quad (7.4)$$

Die J^i müssen Komponenten eines kontravarianten 4er-Vektors sein, damit dies in allen I-Systemen gilt.

$$\text{Die zugehörige kovariante 4er-Stromdichte ist offensichtlich } (J_0, \dots, J_3) = (-c\rho, \vec{J}). \quad (7.5)$$

4er-Wellengleichung: $\boxed{\square A_i = -\mu_0 J_i}$ (7.6)

Resultierende **elektromagnetische Feldkomponenten:**

$$\begin{aligned} B_1 &= (\text{rot } \vec{A})_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} & E_1 &= -(\text{grad } \varphi)_1 - \frac{\partial A_1}{\partial t} = c \left(\frac{\partial A_0}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^0} \right) \\ B_2 &= (\text{rot } \vec{A})_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} & E_2 &= -(\text{grad } \varphi)_2 - \frac{\partial A_2}{\partial t} = c \left(\frac{\partial A_0}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^0} \right) \\ B_3 &= (\text{rot } \vec{A})_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} & E_3 &= -(\text{grad } \varphi)_3 - \frac{\partial A_3}{\partial t} = c \left(\frac{\partial A_0}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^0} \right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Offensichtlich sind die Feldkomponenten alle Elemente der Matrix

$$\boxed{F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i} \quad \text{Elektromagnetischer Feldtensor} \quad (7.8)$$

Das ist offensichtlich ein antisymmetrischer 4er-Tensor. Die 4 Diagonalelemente verschwinden, und die 6 oberen (wie auch die 6 unteren) Nebendiagonalelemente werden durch (7.7) festgelegt. Das gibt

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_1}{c} & -\frac{E_2}{c} & -\frac{E_3}{c} \\ \frac{E_1}{c} & 0 & +B_3 & -B_2 \\ \frac{E_2}{c} & -B_3 & 0 & +B_1 \\ \frac{E_3}{c} & +B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Analog } F^{ij} = g^{ik} g^{jl} F_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_1}{c} & \frac{E_2}{c} & \frac{E_3}{c} \\ -\frac{E_1}{c} & 0 & +B_3 & -B_2 \\ -\frac{E_2}{c} & -B_3 & 0 & +B_1 \\ -\frac{E_3}{c} & +B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Lorentz-Transformation der elektromagnetischen Felder:

Bei Übergang in ein anderes Inertialsystem transformieren sich die Koordinaten entsprechend (s. Relativtheorie)

$$x'^k = a_j^i x^j. \quad \text{Spezielle Lorentztrafo: } a_j^i = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \& \quad \beta = \frac{v}{c} \alpha. \quad (7.10)$$

Der Feldtensor transformiert sich also wie $F'^{kl} = a_i^k a_j^l F^{ij}$. Er bleibt dabei natürlich antisymmetrisch.

In Matrixschreibweise bei spezieller Lorentztrafo, $e_i = E_i/c$ und o.B.d.A $E_3 = 0$:

$$\begin{aligned} F' &= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -e_1 & -e_2 & 0 \\ e_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ e_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ 0 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta e_1 & -\alpha e_1 & -e_2 & 0 \\ \alpha e_1 & -\beta e_1 & -B_3 & B_2 \\ \alpha e_2 - \beta B_3 & -\beta E_2 + \alpha B_3 & 0 & -B_1 \\ \beta B_2 & -\alpha B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ich gebe nun nur die} \\ \text{untere Hälfte der resul-} \\ \text{tierenden antisymmetri-} \\ \text{schen Matrix an:} \end{array} \\ &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\beta^2 e_1 + \alpha^2 e_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha e_2 - \beta B_3 & -\beta E_2 + \alpha B_3 & \cdot & \cdot \\ \beta B_2 & -\alpha B_2 & B_1 & \cdot \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das bedeutet fuer die Feldkomponenten:

$$\begin{aligned} E_1 &= E'_1 & E'_2 &= \alpha(E_2 - vB_3) & E'_3 &= \alpha v B_2 \\ B_1 &= B'_1 & B'_2 &= \alpha B_2 & B'_3 &= \alpha(B_3 - vE_2/c^2) \end{aligned}$$

Voraussetzung war $E_3 = 0$. Man sieht sofort, wo das E_3 fehlt:

$$\boxed{\begin{aligned} E_1 &= E'_1 & E'_2 &= \alpha(E_2 - vB_3) & E'_3 &= \alpha(E_3 + vB_2) \\ B_1 &= B'_1 & B'_2 &= \alpha(B_2 + vE_3/c^2) & B'_3 &= \alpha(B_3 - vE_2/c^2) \end{aligned}} \quad (7.11)$$

Die magnetischen und elektrischen Komponenten transversal zur Bewegungsrichtung mischen sich.

Allerdings nicht beliebig:

$$\text{Behauptung : } \boxed{\vec{E} \cdot \vec{B} \text{ und } |\vec{E}|^2 - |c\vec{B}|^2 \text{ sind Invarianten.}} \quad (7.12)$$

Beweis: Teil einer Übungsaufgabe.

Tensorielle Maxwellgleichungen:Behauptung:

Die 4er-Tensor-Form der Maxwellgleichungen lautet

$$\boxed{\partial^i F_{ij} = \mu_0 J_j} \quad (a) \quad \text{und} \quad \boxed{\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0} \quad (b) \quad (7.13)$$

Beweis (a):

$$\begin{aligned} \mu_0 J_0 &= \partial^i F_{i0} = \partial^0 F_{00} + \partial^1 F_{10} + \partial^2 F_{20} + \partial^3 F_{30} = 0 + \partial_1(E_1/c) + \partial_2(E_2/c) + \partial_3(E_3/c) \\ &= \operatorname{div} \vec{E}/c \Rightarrow \operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 c(\rho) = \rho \quad \text{das ist gerade das Coulombgesetz.} \\ \mu_0 J_1 &= \partial^i F_{i1} = \partial^0 F_{01} + \partial^1 F_{11} + \partial^2 F_{21} + \partial^3 F_{31} = -\frac{1}{c} \partial_t \frac{E_1}{c} + \partial_1 0 + \partial_2 B_3 + \partial_3(-B_2) \\ &= (\operatorname{rot} \vec{B})_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} \quad \text{das ist die 1-Komponente des Durchflutungsgesetzes.} \\ &\quad \text{Komponenten } j=2 \text{ u. } 3 \text{ folgen analog.} \end{aligned}$$

(a) entspricht also gerade dem Coulomb- und Durchflutungsgesetz.

Beweis (b):Die linke Seite ist nur von null verschieden, wenn alle Indizes i, j, k verschieden sind.Wir unterscheiden 2 Fälle: ba) kein Index ist 0 oder bb) einer (o.B.d.A. i).(ba): $i, j, k = 1, 2, 3$. Dann steht da

$$0 = \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = \partial_1(-B_1) + \partial_2(-B_2) + \partial_3(-B_3) = -\operatorname{div} \vec{B}$$

Das ist offensichtlich die Nichtexistenz magnetischer Monopole.

(bb): $i, j, k = 0, 1, 2$ (u. andere Kombinationen räumlicher Indizes). Es steht dann da

$$0 = \partial_0 F_{12} + \partial_2 F_{01} + \partial_1 F_{20} = \partial_0(B_3) + \partial_2(E_1/c) + \partial_1(-E_2/c) = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} \right)_3$$

Das ist offensichtlich die Komponente 3 des Induktionsgesetzes. Für $j, k = 1, 3$ und $2, 3$ ergeben sich analog die Komponenten 2 und 1.

(b) entspricht also gerade den Monopol- und Induktionsgesetzen.

q.e.d.

8 Stationäre Felder

Hauptergebnis des letzten Kapitels war die allgemeine Lösung der Grundaufgabe der Eldyn in der Form

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} & \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
 \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi & \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
 & & \text{wobei } t' &= t - \sqrt{e_0\mu_0} |\vec{r} - \vec{r}'|.
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Damit können die elmag. Felder im Prinzip aus den Ladungs- und Stromdichten berechnet werden. Eigentlich hat man ρ und \vec{J} des ganzen Universums einzusetzen. Dank Superpositionsprinzip kann man aber auch die Felder studieren, die von bestimmten speziellen ρ und \vec{J} erzeugt werden. Bei deren Vorgabe muß aber die Kontinuitätsgleichung beachtet werden.

In diesem Kapitel wollen wir zeitunabhängige Ladungen und Ströme betrachten. Dann sind auch die Potentiale und die Felder in (8.1) zeitunabhängig. Weil die Zeitableitung des Vektorpotentials verschwindet, sind elektrische und magnetische Feldanteile entkoppelt. Die elektrische Feldstärke ergibt sich ausschließlich aus dem Potential und dieses aus der Ladungsdichte. Die magnetische Induktion andererseits ist nur durch das Vektorpotential bestimmt und jenes durch die Stromdichten. Man kann deshalb elektrische und magnetische Phänomene getrennt untersuchen. Wir werden mit der Elektrostatik beginnen und danach stationäre Ströme betrachten.

8.1 Elektrostatik

Aus der allgemeinen Lösung (8.1) ergibt sich unmittelbar für Potential und Feldstärke einer beliebigen statischen Ladungsverteilung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \tag{8.2}$$

Rechnung: $\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{grad} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$

$$NR: \quad \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Die allgemeinen Formeln nun anwenden auf verschiedene spezielle Ladungsverteilungen.

8.1.1 Punktladung

Annahme: Eine Punktladung Q sitze am Ort $\vec{r}' = 0$.

Wir wissen: $\rho(\vec{r}') = 0$ für $\vec{r}' \neq 0$.

Damit können wir in den Integralen überall $\vec{r}' = 0$ setzen, außer in ρ selbst und alle Faktoren außer ρ vor das Integral ziehen. Das verbleibende Integral über die Ladungsdichte ist die Gesamtladung Q . Beim φ -Integral also z.B.:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho(\vec{r}') dV' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Einschub: δ -Funktion

Wir wollen uns nochmals die Ladungsdichte der Punktladung als Funktion des Ortes anschauen. Für diese gilt:

$$\rho(\vec{r}) = 0 \text{ für } \vec{r} \neq 0 \quad \text{und} \quad \int \rho(\vec{r}) dV = Q.$$

Sie ist überall 0, außer in einem Punkt. Dieser Punkt hat aber so viel Gewicht, daß das Integral $\neq 0$ wird. Also muß $\rho(0) = \infty$ sein. Aber ein definiertes ∞ . Um das auszudrücken, schreibt man

$$\rho(\vec{r}) = Q \delta(\vec{r}) \quad (8.3)$$

und $\delta(\vec{r})$ ist die sogenannte Delta-Funktion mit der Eigenschaft

$$\int f(\vec{r}) \delta(\vec{r}) dV = f(\vec{r} = 0) \quad \text{für alle stetigen } f(\vec{r}). \quad (8.4)$$

Es gilt

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}). \quad (8.5)$$

Beweis:

Zu beweisen ist, daß a) die linke Seite überall null ist, außer im Ursprung und b) ihr Integral über ein Volumen mit dem Ursprung im Innern gleich -4π ist.

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{r} \neq 0: \quad \nabla^2 \frac{1}{r} &= \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) = \nabla \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} (\nabla \cdot \vec{r}) - \left(\nabla \frac{1}{r^3} \right) \cdot \vec{r} \\ &= -\frac{3}{r^3} - \left(-3 \frac{1}{r^4} \frac{\vec{r}}{r} \right) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0. \\ \text{b) } \int_{r < R} \nabla^2 \frac{1}{r} dV &= \int_{r < R} \text{div} \left(\text{grad} \frac{1}{r} \right) dV \stackrel{\text{Gauss}}{=} \oint_{r=R} \text{grad} \frac{1}{r} d\vec{A} = - \oint_{r=R} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{A}}{r^3} \\ &\stackrel{|\vec{r}|=R}{=} - \oint_{r=R} \frac{dA}{r^2} = -\frac{1}{R^2} \oint_{r=R} dA = -\frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$$

wobei die Faktoren rechts eindimensionale δ -Funktionen sind, für die gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(x = 0) \quad \text{für alle stetigen } f(x). \quad (8.6)$$

Wir werden im folgenden bei Bedarf mit diesen δ -Funktionen operieren.

Ende
Einschub

Damit ist die Ladungsdichte einer im Ursprung sitzenden Punktladung

$$\rho(\vec{r}) = Q \delta(\vec{r}) \quad \text{Ladungsdichte einer Punktladung} \quad (8.7)$$

Wir wenden dies an zur Berechnung des Feldstärkeintegrals rechts in Gl.8.2:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int Q \delta(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = \frac{Q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int \delta(\vec{r}') dV' = \frac{Q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

So ergeben sich zusammengefaßt die bekannten Formeln

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (8.8)$$

Grafische Veranschaulichung der Felder:

dazu dienen Äquipotentialflächen und Feldlinien.

Äquipotentialfläche:

Definitionsgleichung $\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0)$ wo \vec{r}_0 beliebig aber fest.

Alle Punkte gleichen Potentials bilden i.allg. eine Fläche. Diese läßt sich u.U. schwer zeichnen. Deshalb werden bei hochsymmetrischen Problemen nur die Schnittlinien mit bestimmten Ebenen gezeichnet. Konkret bei Punktladung:

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{const.}$$

Äquipotentialflächen sind hier Kugelflächen. Schnitt derselben mit z.B. der Ebene $z = 0$ sind Kreise.

Nun zu den Feldlinien. Sie veranschaulichen $\vec{E}(\vec{r})$.

Bei einer Punktladung Q ist das Feldlinienbild klar. Sie gehen radial nach außen für $Q > 0$ und radial nach innen für $Q < 0$.

Wichtige allgemeine Regeln für das Zeichnen von Feldlinien:

- ihre Tangente in jedem Punkt parallel zu \vec{E}
- sie beginnen bei positiven Ladungen und enden bei negativen
- die Zahl der aus einem Volumen netto herausgehenden Feldlinien ist proportional zur Ladung im Innern.

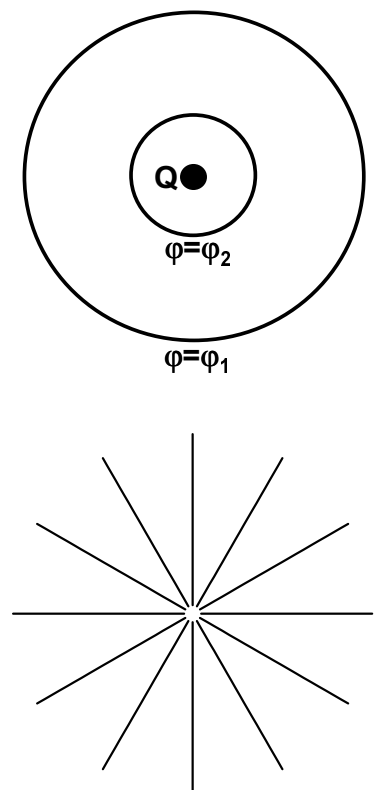
Einiges bleibt der Intuition überlassen, z.B. wie viele Feldlinien eine Ladung Q erzeugt.

Man kann sich den Verlauf der Feldlinien auch berechnen. Die Kurve $\vec{r}(s)^{17}$ einer Feldlinie genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds} \vec{r}(s) = \frac{\vec{E}(\vec{r}(s))}{|\vec{E}(\vec{r}(s))|} \quad (8.9)$$

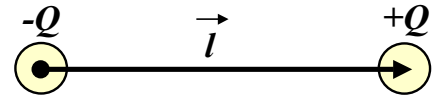
Damit habe ich alle folgenden Feldlinienbeispiele berechnet.

¹⁷ s ist die auf der Kurve zurückgelegte Wegstrecke



8.1.2 Elektrischer Dipol

Ein Dipol besteht aus 2 entgegengesetzt geladenen Punktladungen. Der Verbindungsvektor von der negativen zur positiven Ladung sei \vec{l} . Die negative Ladung sitze o.B.d.A. bei $\vec{r} = 0$



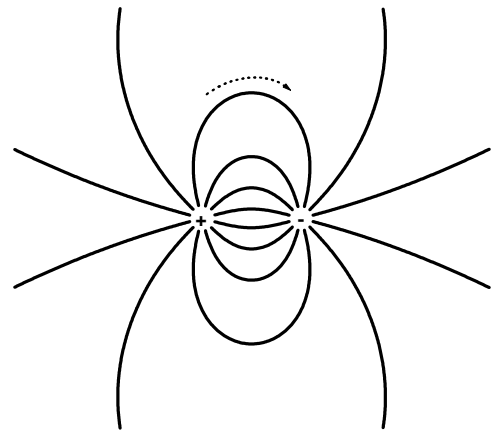
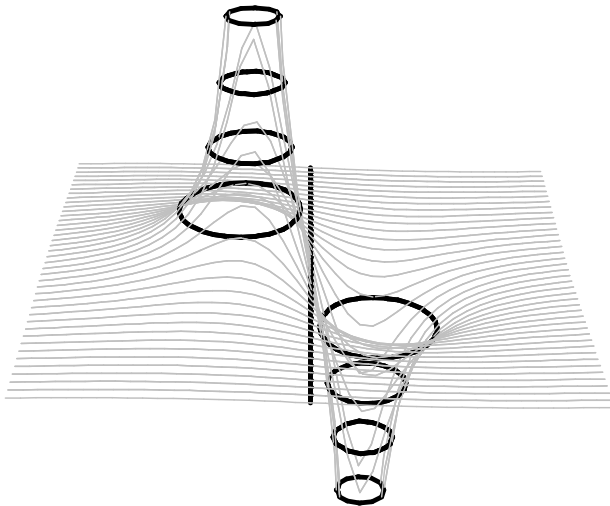
Ladungsdichte: $\rho(\vec{r}) = -Q \delta(\vec{r}) + Q \delta(\vec{r} - \vec{l})$.

Einsetzen in Potentialformel 8.2 gibt

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{l}) - \delta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{l}|} - \frac{1}{|\vec{r}|} \right). \quad (8.10)$$

Analog für die Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - \vec{l}}{|\vec{r} - \vec{l}|^3} - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right). \quad (8.11)$$



Veranschaulichung von Potential (links, 3D-Ansicht) und Feldlinien (rechts) des Dipols. Das Potentialgebirge hat einen sehr (∞) hohen Berg bei der positiven Ladung und eine entsprechend tiefe Kuhle bei der negativen Ladung.

Wichtig für spätere Medien-Elektrodynamik:

Idealer Dipol:

- vernachlässigbar kleine Länge ($\vec{l} \rightarrow 0$)
- endliches Dipolmoment $\vec{p} := Q \cdot \vec{l}$.

Mathematisch läßt sich der Grenzübergang wie folgt vollziehen.

Wir nutzen die Taylor-Reihe von 8.10 für kleine \vec{l} :

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{l}|} = \frac{1}{r} + \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot (-\vec{l}) + \mathcal{O}(l^2) = \frac{1}{r} + \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \cdot (-\vec{l}) + \mathcal{O}(l^2) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{l}}{r^3} + \mathcal{O}(l^2)$$

Dies in den ersten Potentialterm gesetzt gibt

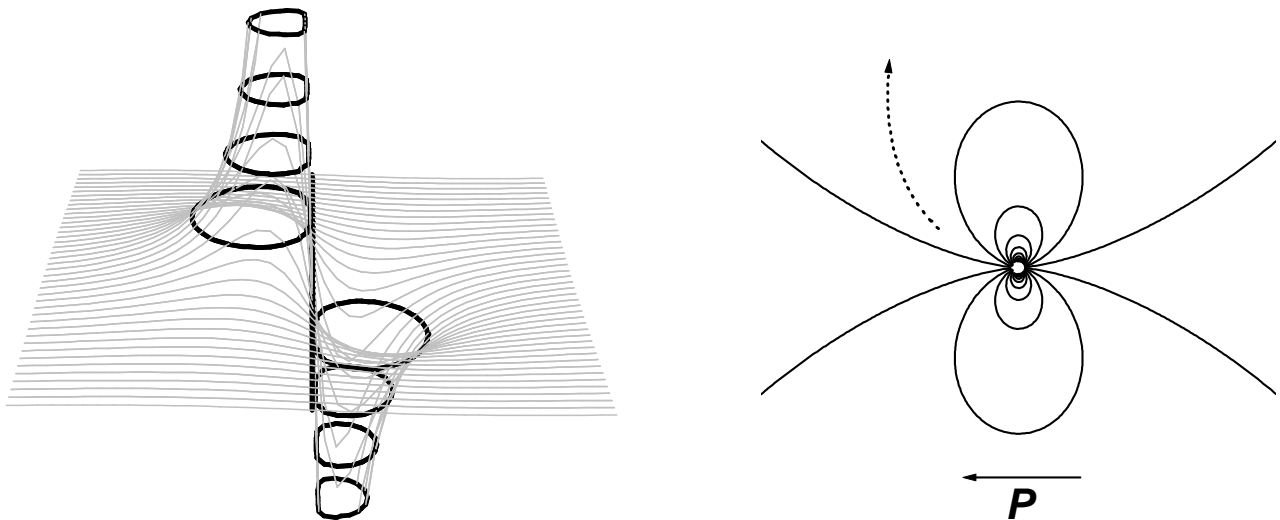
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{l}}{r^3} + \mathcal{O}(l^2) - \frac{1}{r} \right) = \frac{\vec{r} \cdot Q\vec{l}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + Ql \cdot \mathcal{O}(l)$$

Beim Grenzübergang $l \rightarrow 0$ und $\vec{p} = Q\vec{l} = \text{const.}$ bleibt der erste Term unverändert, der zweite geht gegen null. Nach dem Grenzübergang bleibt deshalb

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{Potential eines idealen Dipols mit dem Dipolmoment } \vec{p} \quad (8.12)$$

Für das elektrische Feld ergibt sich analog

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r}) - \vec{p}r^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} \quad \text{elektrische Feldstärke eines idealen Dipols mit dem Dipolmoment } \vec{p} \quad (8.13)$$



Veranschaulichung des Potentials (links) und der Feldlinien (rechts) eines idealen Dipols.

- Er hat das gleiche Dipolmoment, wie der nach Gl. 8.11 dargestellte nichtideale Dipol, bei dem die Ladungen noch einen endlichen Abstand hatten.
- Die Felder unterscheiden sich im Zentrum deutlich, der Unterschied wird nach außen hin aber immer geringer.
- Während die Feldlinien beim realen Dipol von der positiven Ladung ausgehen und in der negativen enden, sind sie beim idealen Dipol praktisch geschlossen (weil Anfang und Ende an der gleichen Stelle). Sie verlaufen in Richtung des Dipolmoments durch den Dipol durch.

Wir wollen noch eine Formel für die Ladungsdichte des idealen Dipols ableiten:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \text{div } \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) = -\text{div } \epsilon_0 \text{grad } \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\vec{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\vec{p} \cdot \nabla [\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right)] \right) = \frac{1}{4\pi} (\vec{p} \cdot \nabla [-4\pi \delta(\vec{r})]) \end{aligned}$$

Die 4π kürzen sich, also

$$\rho(\vec{r}) = -(\vec{p} \cdot \nabla \delta(\vec{r})) \quad \text{Ladungsdichte eines idealen Dipols mit dem Dipolmoment } \vec{p} \quad (8.14)$$

Edyn-Übungsaufgabe zum 22.5.00

Gegeben sei ein idealer Dipol am Orte $\vec{r}' = 0$ mit dem Dipolmoment \vec{p} .

Beweisen Sie, daß er das elektrische Feld (8.13) erzeugt

- durch Ausführen des Grenzübergangs $\vec{l} \rightarrow 0$ bei $Q\vec{l} = \vec{p} = \text{const.}$ in der Formel (8.11) für die elektrische Feldstärke eines endlichen Dipols,
- durch Bildung des Gradienten des Potentials (8.12) eines idealen Dipols.

8.1.3 Potential einer weit entfernten Ladungsverteilung

Wir haben dieses Kapitel mit einer Punktladung begonnen. Das ist ein Modell. Es gibt in der Realität kaum wirkliche Punktladungen. Da erhebt sich die Frage: wann ist dieses Modell anwendbar?

Antwort: Wenn man hinreichend weit weg ist !

Das ist Motivation dafür, das Potential in hinreichend großer Entfernung zu untersuchen.

Gegeben: endlich ausgedehnte Ladungsdichte $\rho(\vec{r}')$. Es gelte $\rho(\vec{r}') = 0$ falls $|\vec{r}'| > R$.

Gesucht: $\varphi(\vec{r})$ weit weg! (Für $|\vec{r}| \gg R$).

Weit weg gilt $|\vec{r}'| < R \ll |\vec{r}|$. Also können wir im Potential (8.2) wieder Taylor anwenden, wie bei Dipol:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \mathcal{O}((r'/r)^2)$$

Einsetzen ergibt

$$\vec{\varphi}(\vec{r}) = \frac{\int \rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{r} \cdot \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

Der erste Term ist das Potential einer Punktladung mit der

Gesamtladung $Q = \int \rho(\vec{r}') dV'$,

der zweite Term das Potential eines idealen Dipols mit dem

Dipolmoment $\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'. \quad (8.15)$

Damit ergibt sich endgültig

$$\vec{\varphi}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

Multipolentwicklung (8.16)

Für $t \rightarrow \infty$ gehen die Terme in der Summe verschieden schnell gegen 0:

Monopolterm $\sim 1/r$

Dipolterm $\sim 1/r^2$

höhere Multipolterme $\sim 1/r^n$ ($n > 2$).

Also:

- falls $Q \neq 0$, dominiert hinreichend weit weg der Monopolterm, d.h., das Potential wird mehr und mehr das einer Punktladung.
- falls $Q = 0$ & $\vec{p} \neq 0$, dominiert hinreichend weit weg der Dipolterm, d.h., das Potential wird mehr und mehr das eines Dipols.

- usw, um die höheren Momente wollen wir uns aber nicht kümmern.

Anmerkung 1:

Bei neutralen Körpern verschwindet der erste Term, man kann also erwarten, daß sich diese in weiter Entfernung wie ein Dipol verhalten. Oft verschwindet aber auch das Dipolmoment aus Symmetriegründen und es geht mit irgendeiner höheren Ordnung los – sofern die nicht alle verschwinden, wie z.B. bei kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen.

Anmerkung 2:

Bei nicht neutralen Körpern hängt das Dipolmoment von der Lage des Ursprungs ab (wie in der Mechanik das Impulsmoment=Drehimpuls).

Wie groß ist das Dipolmoment eines Dipols?

$$\vec{p} = \int \vec{r}' Q \left(\delta(\vec{r}' - \vec{l}) - \delta(\vec{r}') \right) dV' = Q \left(\vec{l} - \vec{0} \right) = Q\vec{l} \quad (8.17)$$

Das ist tatsächlich, was wir in Abschnitt 8.1.2 bereits als Dipolmoment bezeichnet haben.

8.2 Magnetfelder stationärer Ströme

Stationäre Ströme sind zeitlich konstant: $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r})$.

Ihr Magnetfeld ist es auch und gegeben durch

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) \quad \text{mit dem Vektorpotential} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (8.18)$$

Das gilt allgemein. Wir werden nacheinander 2 Spezialfälle betrachten, a) Stromfluß durch Drähte und b) Magnetfeld weit entfernter Ströme.

8.2.1 Stromfluß durch Drähte: das Biot-Savart-Gesetz

Das Biot-Savart-Gesetz gibt eine quantitative Beschreibung für die magnetische Wirkung, die von einem durch einen Leiter fließenden Strom in einem beliebigen Raumpunkt erzeugt wird. Es wurde schon 1820 von Jean Baptiste Biot (1774-1862) und Felix Savart (1791-1841) formuliert. Wir wollen es nun aus (8.18) herleiten.

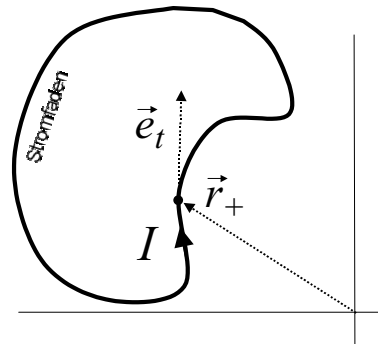
Annahme: der Querschnitt, durch den der Strom I fließt, sei vernachlässigbar klein.

Dieses Modell für den Stromfluß durch dünne Drähte heißt Fadenstrom

Bei stationären Fadenströmen muß wegen $\text{div } \vec{J} = 0$ die Stromstärke entlang eines Drahtstückes konstant sein, an Verzweigungen die Summe der einlaufenden Ströme gleich der Summe der auslaufenden sein (Kirchhoff's Knotensatz), sie können insbesondere im Endlichen weder beginnen noch enden.

Mathematische Beschreibung:

$\vec{r}_+(s)$ = Jener Punkt auf dem Faden (Draht), zu dem man kommt, wenn man auf dem Draht die Strecke s in Stromrichtung zurücklegt (von einem beliebig wählbaren aber dann festen Ausgangspunkt aus).



Stromrichtung in $\vec{r}_+(s)$: $\vec{e}_t(s) = d\vec{r}_+(s)/ds$.

Die Stromdichte einer einfachen geschlossenen Drahtschleife mit der Stromstärke I ist

$$\vec{J}(\vec{r}) = \oint ds I \vec{e}_t(s) \delta(\vec{r} - \vec{r}_+(s)) \quad (\text{integriert wird rund um die Drahtschleife}) \quad (8.19)$$

Dies in das Vektorpotential in (8.18) gibt zunächst

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \oint ds \frac{I \vec{e}_t(s) \delta(\vec{r} - \vec{r}_+(s))}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Herausziehen der Konstanten, Vertauschen von \vec{r}' - und s -Integration, Abtöten des \vec{r}' -Integrals mit der δ -Funktion, sowie Einführen von $\vec{ds} = \vec{e}_t(s) ds$ führt als Zwischenergebnis auf

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\vec{ds}}{|\vec{r} - \vec{r}_+(s)|} \quad \text{Vektorpotential eines Fadenstromes} \quad (8.20)$$

Das ist schon eine recht einfache Formel. Jedes Drahtstück \vec{ds} des Strompfades liefert einen Beitrag, der im ganzen Raum

- parallel zu \vec{ds} ist (tangential zum Drahtstück),
- proportional zur Stromstärke I ,
- umgekehrt proportional zum Abstand $|\vec{r} - \vec{r}_+(s)|$ des Drahtstückes vom Aufpunkt \vec{r} .

Nun Berechnen des Magnetfeldes:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \nabla \times \frac{\vec{ds}}{|\vec{r} - \vec{r}_+(s)|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_+(s)|} \right) \times \vec{ds} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left(-\frac{\vec{r} - \vec{r}_+(s)}{|\vec{r} - \vec{r}_+(s)|^3} \right) \times \vec{ds} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left(-\frac{\vec{r} - \vec{r}_+(s)}{|\vec{r} - \vec{r}_+(s)|^3} \right) \times \vec{ds}\end{aligned}$$

Vertauschen der Faktoren im Kreuzprodukt und Division durch μ_0 gibt für die magnetische Feldstärke

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint \vec{ds} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_+(s)}{|\vec{r} - \vec{r}_+(s)|^3} \quad \text{Gesetz von Biot-Savart} \quad (8.21)$$

Jedes Drahtstück \vec{ds} des Strompfades liefert einen Beitrag zur magnetischen Feldstärke \vec{H} im Aufpunkt \vec{r} ,

- dessen Betrag proportional zur Stromstärke I durch das Drahtstück und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen Drahtstück und Aufpunkt ist und
- dessen Richtung senkrecht zur Flußrichtung \vec{ds} des Stromes und zum Verbindungsvektor $\vec{r} - \vec{r}_+(s)$ vom Drahtstück zum Aufpunkt entsprechend der Rechte-Hand-Regel (Rechtsschraubenregel) ist.

Einfachster Fall: Gerader Draht¹⁸

Übung!

Günstige Koordinaten: z -Achse entlang Draht in Stromrichtung, \vec{r} auf x -Achse dann $\vec{r}_+(s) = z\vec{e}_z$, $\vec{r} = x\vec{e}_x$, $\vec{ds} = \vec{e}_z$, also

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \vec{e}_z \times \frac{x\vec{e}_x - z\vec{e}_z}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0 \quad \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{x\vec{e}_z \times \vec{e}_x}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} \\ &= \frac{I}{4\pi} x\vec{e}_z \times \vec{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} = \frac{I}{4\pi} x\vec{e}_z \times \vec{e}_x \left. \frac{z}{x^2 \sqrt{x^2 + z^2}} \right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{I}{2\pi x} \vec{e}_z \times \vec{e}_x.\end{aligned}$$

Allgemeine Lage: $x \rightarrow \rho$ (Abstand v. Draht), $\vec{e}_x \rightarrow \vec{e}_\rho$, $\vec{e}_z \rightarrow \vec{e}_I$ (Stromrichtung), damit

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{e}_I \times \vec{e}_\rho \quad (8.22)$$

Das haben wir schon früher in der Form (5.17) direkt aus den MGI erhalten. Und zwar einfacher. Das Biot-Savart-Gesetz läßt aber auch noch in weniger symmetrischen Fällen auswerten, in denen eine direkte Lösung der MGI sehr aufwendig ist. Insbesondere eignet es sich für numerische Rechnungen.

¹⁸der schließt sich im Unendlichen

8.2.2 Magnetfeld weit entfernter Ströme

In der Elektrostatik hatten wir gesehen, daß das elektrische Feld einer begrenzten Ladungsverteilung in großer Entfernung das einer Punktladung mit der Gesamtladung Q ist, oder – bei neutralen Körpern – das eines idealen elektrischen Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{P} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$.

Ähnliches werden wir jetzt für Magnetfelder herleiten.

Wir gehen wieder von der allgemeinen Form (8.18) des Vektorpotentials aus.

- Annahmen:
- $\vec{J}(\vec{r}') = 0$ für $r' > R$ (räumlich begrenzte Ströme)
 - $r \gg R$ (Aufpunkt weit entfernt)

Unter

diesen Bedingungen gilt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

mit dem magnetischen Dipolmoment $\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV'$ (8.23)

Der Beweis ist etwas knifflig und wird deshalb an den Schluß des Abschnitts geschoben.

Vorher: Berechnung des Magnetfeldes

Das geht am besten mit folgender Darstellung des Vektorpotentials:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \left(-\nabla \frac{1}{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\vec{m}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \frac{\vec{m}}{r}.$$

Damit zunächst

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \text{rot} \frac{\vec{m}}{r} = \frac{1}{4\pi} (\text{grad} \text{div} \frac{\vec{m}}{r} - \Delta \frac{\vec{m}}{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi} (\text{grad} (\nabla \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \vec{m}) - \Delta \left(\frac{1}{r}\right) \vec{m}). \end{aligned}$$

Dahinein die uns schon bekannten Ausdrücke $\nabla(1/r) = -\vec{r}/r^3$ und $\Delta(1/r) = -4\pi\delta(\vec{r})$ gibt als wichtigen Zwischenschritt

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad} \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \right) + \vec{m} \delta(\vec{r}). \quad (8.24)$$

Diskussion:

- 1.Term ist ein Gradient. Dies ist ein "konservativer" Feldanteil, er hat keine geschlossenen Feldlinien.
- Magnetfeldlinien müssen aber geschlossen sein.
- das bewirkt anscheinend der 2.Term. Der wirkt zwar nur bei $\vec{r} = 0$ schließt aber dort die Feldlinien.
- Er darf nicht weggelassen werden, weil ansonsten $\text{div} \vec{B} = 0$ verletzt wird!
- Die Größe, von der der Gradient gebildet wird, hat die gleiche Ortsabhängigkeit, wie das Skalarpotential (8.12) eines idealen elektrischen Dipols.

- Das Magnetfeld einer begrenzten Stromverteilung ist in der Ferne also ein Dipolfeld.¹⁹
- Es spielt dabei keine Rolle, wie die Ströme genau fließen. Das Feld hängt nur von einem Parameter ab, ihrem magnetischen Dipolmoment \vec{m} , gegeben in Formel (8.23).
- Insbesondere trifft das auf die Atome und Moleküle zu, aus denen sich Medien zusammensetzen. In jedem Punkt eines makroskopischen Mediums ist man von fast allen Atomen weit weg im Vergleich zu deren winzigen Abmessungen. Sie können also als magnetische (bzw. elektrische) Dipole mit den Dipolmomenten \vec{m} (bzw. \vec{P}) behandelt werden. Das wird die Grundidee für die Medien-Elektrodynamik sein.

Ersetzen des Gradienten durch das bekannte Dipolfeld gibt als Endformel

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - \vec{m}r^2}{4\pi r^5} + \vec{m} \delta(\vec{r})$$

Magnetfeldstärke in großer Entfernung von einer räumlich begrenzten Stromverteilung (8.25)

Nachtrag: Beweis von Formel (8.23)

Wir starten mit dem Vektorpotential in Formel (8.18).

Weil in großer Entfernung von den Strömen $r' \ll r$ gilt, können wir zunächst wieder die Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots$$

einsetzen. Das gibt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{J}(\vec{r}') dV' + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dV' + \dots \quad (8.26)$$

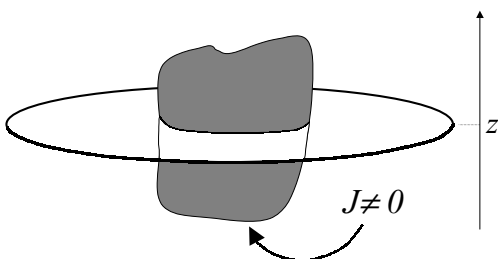
Wir werden uns mit den beiden Termen einzeln befassen.

Erster Term von (8.26)

Das Integral von \vec{J} sind eigentlich 3 Integrale über je eine Komponente von \vec{J} . Alle sind null.

Es genügt, dies für die z -Komponente zu zeigen. Wir zerlegen dazu die Integration über das Volumen in eine über z und für jedes z eine über die zur z -Achse senkrechte xy -Ebene. Das gibt

$$\int J_z dV = \int I(z) dz \quad \text{mit} \quad I(z) = \int J_z(x, y, z) dx dy. \quad (8.27)$$



$I(z)$ ist der Strom, der eine xy -Ebene in der Höhe z nach oben netto durchfließt. Im stationären Fall verschwindet aber der Strom durch jede Ebene, die das Stromgebiet schneidet, weil ansonsten die Ladungsmenge auf einer Seite der Ebene zu- und auf der anderen abnehmen würde.

Damit ist auch das Volumenintegral über J_z null. Analog für die anderen beiden Komponenten, mithin verschwindet der erste Term. – q.e.d.

¹⁹es sei denn ihr Dipolmoment verschwindet. Dann werden evtl. Multipolterme wichtig, die wollen wir uns hier aber nicht antun.

Zweiter Term von (8.26)

Dieser ergibt das gesuchte (8.23), wenn gilt

$$2 \int (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dV' \stackrel{?}{=} \int dV' (\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')) \times \vec{r} = \int dV' \vec{r} \times (\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{r}'). \quad (*)$$

Wir werden die rechte Seite in die linke umformen.

Zunächst ergibt sich mit der bac-cab-Regel $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\text{rechte Seite von } (*) = \int \left[\vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') - \vec{r}' (\vec{r} \cdot \vec{J}(\vec{r}')) \right] dV' \quad (**)$$

Der erste Term hier ist schon die Hälfte von dem, was wir brauchen. Und der zweite?

ite-Komponente des zweiten Terms von (**) =

$$\begin{aligned} &= - \int x'_i (\vec{r} \cdot \vec{J}(\vec{r}')) dV' = - \int x'_i \sum_j x_j J_j(\vec{r}') dV' \quad \left| \begin{array}{l} \text{im folgenden ohne Summenzeichen} \\ \text{mit der Einstein-Konvention:} \\ \text{über gleiche Inizes wird absummiert} \end{array} \right. \\ &= - \int x'_i x_j J_j(\vec{r}') dV' \quad \left| \begin{array}{l} \text{Einsetzen von } x_j = x_k \delta_{kj} \end{array} \right. \\ &= - \int x'_i x_k \delta_{kj} J_j(\vec{r}') dV' \quad \left| \begin{array}{l} \text{Einsetzen von } \delta_{kj} = \frac{\partial x'_k}{\partial x'_j} \end{array} \right. \\ &= - \int x'_i x_k \frac{\partial x'_k}{\partial x'_j} J_j(\vec{r}') dV' \quad \left| \begin{array}{l} \text{partielle Integration} \end{array} \right. \\ &= - \int \frac{\partial}{\partial x'_j} [x'_i x_k x'_k J_j(\vec{r}')] dV' + \int x_k x'_k \frac{\partial}{\partial x'_j} [x'_i J_j(\vec{r}')] dV' \\ &= - \int \text{div} [x'_i x_k x'_k \vec{J}(\vec{r}')] dV' + \int (\vec{r} \cdot \vec{r}') \left[\delta_{ij} J_j(\vec{r}') + x'_i \frac{\partial J_j(\vec{r}')}{\partial x'_j} \right] dV' \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{erstes Integral mit Gauß, } \frac{\partial J_j(\vec{r}')}{\partial x'_j} = \text{div } \vec{J} = 0, \quad \delta_{ij} J_j(\vec{r}') = J_i(\vec{r}') \end{array} \right. \\ &= - \oint_{(V)} [x'_i x_k x'_k \vec{J}(\vec{r}')] d\vec{A}' + \int (\vec{r} \cdot \vec{r}') J_i(\vec{r}') dV' \quad \left| \begin{array}{l} \text{da die Ströme vollständig innerhalb des Integrationsge-} \\ \text{bietes } V \text{ fließen, ist } \vec{J} \text{ auf dessen Rand } (V) \text{ null und das} \\ \text{Oberflächenintegral verschwindet.} \end{array} \right. \\ &= + \int (\vec{r} \cdot \vec{r}') J_i(\vec{r}') dV' \end{aligned}$$

Der zweite Term des Integrals (**) liefert also das gleiche, wie der erste. Mithin ist die rechte Seite von (*) tatsächlich gleich der linken und die Formel (8.23) bewiesen.

9 Medien in elektromagnetischen Feldern

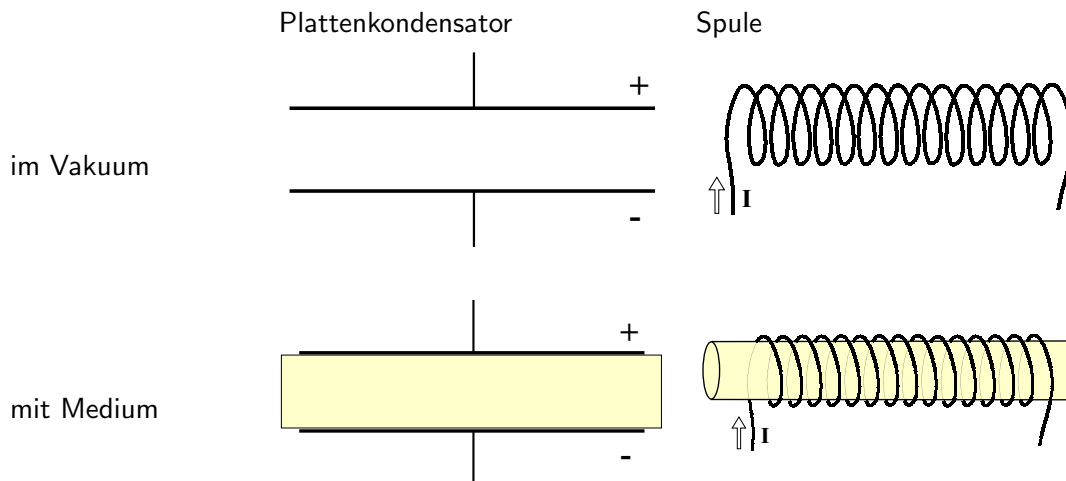
Bisher: Nur Vakuum mit ein paar Ladungen drin.

Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ und Stromdichte $\vec{J}(\vec{r}, t)$ als gegeben betrachtet.

Daraus die erzeugten Felder berechnet (geht prinzipiell immer mit retardierten Potentialen).

Jetzt: Noch ein Körper dazu aus irgendwelchem Stoff (=Medium)

Simple Beispiele:



Wie wird das elmag. Feld beeinflusst?

Das hängt natürlich vom Medium ab

(z.B. ob Metall, Dielektrikum, magnetischer Werkstoff ...)

Wie kann man das theoretische beschreiben?

- Dielektrika im elektrischen Feld

Antwort nicht allgemein, sondern f. stationäre

- Leiter im elektrischen Feld
- Nichtleiter im Magnetfeld

Dabei werden wir insbesondere zurückgreifen auf folgende Ergebnisse des letzten Kapitels:

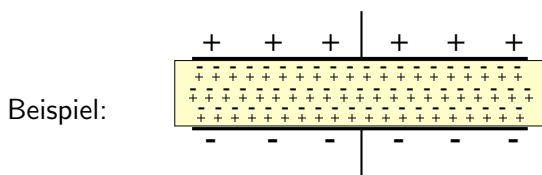
Dipolfelder (id. Dipol im Koordinatenursprung)

	Feld	Quelldichte	
elektrisch:	$\epsilon_0 \vec{E} = -\nabla \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \vec{r} - \vec{r}' ^3} \right)$	$\rho(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \nabla \delta(\vec{r})$	(9.1)
magnetisch:	$\vec{H} = -\nabla \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi \vec{r} - \vec{r}' ^3} \right) + \vec{m} \delta(\vec{r})$	$\vec{J}(\vec{r}) = -\vec{m} \times \nabla \delta(\vec{r})$	

\vec{p} : elektrisches Dipolmoment

\vec{m} : magnetisches Dipolmoment

9.1 Dielektrika im elektrischen Feld



Erinnerung an wohlbekannte Physik:

Schiebt man Dielektrikum zwischen die Platten, so sinkt Spannung, d.h. Feld wird geschwächt

Warum? positive Ladungen auf einer Platte ziehen die Elektronen an, negative auf der anderen die Atomkerne. Beide sind nicht frei beweglich, aber sie verschieben sich ein wenig. Die Atome werden polarisiert.

Ergebnis: im Innern bleibt der Stoff neutral, aber an den Oberflächen bei den Platten entstehen Ladungen. Das von diesen Polarisationsladungen erzeugte Feld ist dem von den externen Ladungen auf den Kondensatorplatten erzeugten entgegengesetzt, es schwächt dieses.

Aufgabenstellung der Theorie

Gegeben: externe Ladungsdichte $\rho_{ext}(\vec{r})$ und Dielektrikum in einem Volumen V .

Gesucht: Das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$.

Zur Lösung braucht man natürlich noch ein vernünftiges Modell des Dielektrikums.

9.1.1 Kontinuums-Modell eines Dielektrikums

Dielektrikum = ein Kontinuum von idealen Dipolen im Vakuum mit dem Dipolmoment pro Volumeneinheit $\vec{P}(\vec{r})$.

Anmerkung: Kontinuum als Grenzprozeß zu verstehen.

Das Dipolmoment pro Volumeneinheit heißt POLARISATION.

Diese sei zunächst gegeben. Wie groß ist dann das elektrische Feld?

Nun, wir haben nur Vakuum mit der externen Ladungsdichte $\rho_{ext}(\vec{r})$ und den Polarisationsladungen der Dichte $\rho_{pol}(\vec{r})$ drin – und sonst nichts. Also gelten die Vakuum-MGL, insbesondere

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \rho_{ext} + \rho_{pol}. \quad (9.2)$$

Die Polarisationsladungsdichte müssen wir uns nun noch aus $\vec{P}(\vec{r})$ beschaffen.

9.1.2 Polarisationsladungsdichte

Gegeben: $\vec{P}(\vec{r})$ Gesucht: $\rho(\vec{r})$

Ein Volumenelement dV' um den Ort \vec{r}' im Medium herum hat das Dipolmoment $\vec{p} = \vec{P}(\vec{r}')dV'$.

Entsprechend (9.1) hat es die Ladungsdichte $-\vec{p} \cdot \nabla \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\nabla \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}') \vec{P}(\vec{r}')dV'$.

Integration über dV' , Vertauschen von Integration und Ableitung ∇ nach \vec{r} , Ausnutzen der δ -Funktion gibt

$$\boxed{\rho_{pol}(\vec{r}) = -\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r})}. \quad (9.3)$$

9.1.3 Das D -Feld im Medium

Setzen wir nun (9.3) in die Vakuum MGl. (9.2) ein, folgt

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \rho_{ext} - \operatorname{div} \vec{P}.$$

Bis hier hatten wir die Polarisation \vec{P} ebenso wie die externen Ladungsdichten ρ_{ext} als gegeben betrachtet. Meist ist die Situation aber anders:

es ist nur nur ρ_{ext} gegeben²⁰ und die Polarisation entsteht erst in Reaktion darauf²¹, ist also ebenfalls unbekannt. Also diese Unbekannte auch auf die andere Seite:

$$\operatorname{div} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{ext}.$$

Das sieht der MGl. $\operatorname{div} D = \rho$ sehr ähnlich.

Konvention: In Medien wird das \vec{D} -Feld wie folgt festgelegt:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{und die zuständige MGl lautet} \quad \operatorname{div} D = \rho_{ext} \quad (9.4)$$

Anmerkung: Das verallgemeinert die Definition (4.5) fürs Vakuum – dort ist halt $\vec{P} = 0$.

Nun muß nur noch ein Zusammenhang zwischen \vec{P} und \vec{E} hergestellt werden.

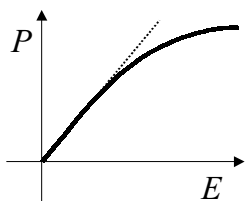
9.1.4 Polarisation als Funktion der Feldstärke

Die Polarisation eines Dielektrikums hängt in der Regel von der Feldstärke ab.

Für $\vec{E} = 0$ sind entweder keine Dipole aufgespannt, oder (in Gasen und Flüssigkeiten) die vorhandenen atomaren (molekularen) Dipole sind durch die thermische Bewegung zufällig orientiert und kompensieren sich.²²

Mit zunehmender Feldstärke spannen sich die Dipole auf oder orientieren sich durch das wirkende Drehmoment (bis ein Stoß die Orientierung wieder zunichte macht). Das geht zunächst linear los und sättigt bei höheren Feldstärken.

Typisches Bild:



Für nicht zu große Felder gilt oft Proportionalität:

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad (9.5)$$

Proportionalitätsfaktor χ_e : elektrische Suszeptibilität.
Er ist eine charakteristische Konstante für das jeweilige Material.

Einsetzen von (9.5) in (9.4) ergibt für den linearen Bereich

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad \text{mit der relativen Dielektrizitätskonstanten} \quad \varepsilon = 1 + \chi_e. \quad (9.6)$$

²⁰z.B. durch das Aufladen des Kondensators

²¹durch Aufspannen bzw. Drehen der atomaren bzw. molekularen Dipole

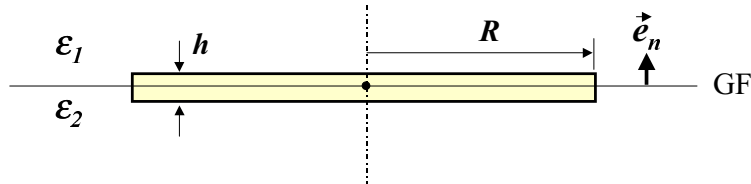
²²In polaren Festkörpern mit axialer Symmetrie kann auch bei $\vec{E} = 0$ schon eine makroskopische Polarisation existieren (Ferroelektrika) - die wollen wir aber nicht näher betrachten.

9.1.5 Grenzflächen zwischen Dielektrika

Behauptung: An der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika sind die Normalkomponente von \vec{D} und die Tangentialkomponenten von \vec{E} stetig.

a) D-Feld

Beweis mit der integralen Form $\int_{(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_V^{ext}$ der MGI (9.4). Als Integrationsgebiet wählen wir einen flachen Zylinder (Cremedose), so daß der Deckel über und der Boden unter der Grenzfläche liegt und der interessierende Punkt der Grenzfläche in der Mitte.



Dann lassen wir die Dose auf den Punkt in der Mitte zusammenschrumpfen.

Aber nicht irgendwie, sondern geschickt, nämlich links und rechts $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \lim_{h \rightarrow 0}$:

linke Seite:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{Dose} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \left[\int_{Deckel} D_n dA - \int_{Boden} D_n dA \right] = D_n^{oben} - D_n^{unten}$$

rechte Seite:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \lim_{h \rightarrow 0} Q_{Dose}^{ext} =: \sigma_{GF} \quad \text{Grenzflächenladungsdichte}$$

Fazit:

$$D_n^{oben} - D_n^{unten} = \sigma_{GF}$$

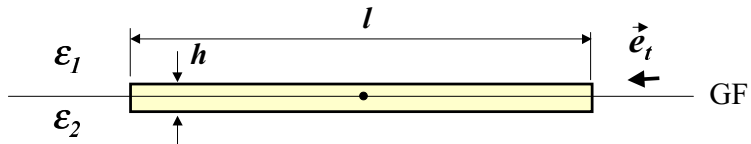
die Normalkomponente von \vec{D} ist stetig bei Fehlen von Flächenladungen.

(9.7)

Flächenladungen: Ihre Ausdehnung senkrecht zur Grenzfläche ist vernachlässigbar klein.

b) E-Feld

Beweis mit der zuständigen MGI $\int_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ (Statik!). Integrationsfläche A jetzt flaches Rechteck hochkant zur GF und mit der langen Seite parallel zur GF mit dem Punkt \vec{r} in der Mitte.



Dann lassen wir dieses wieder auf den Punkt in der Mitte zusammenschrumpfen.

Und zwar gemäß $\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \lim_{h \rightarrow 0}$:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \left[\int_{Oberseite} E_t ds - \int_{Unterseite} E_t ds \right] = E_t^{oben} - E_t^{unten}$$

Die rechte Seite ist null, also

Fazit:

$$E_t^{oben} - E_t^{unten} = 0$$

die Tangentialkomponenten von \vec{E} sind immer stetig.

(9.8)

Was gilt für die anderen Feldkomponenten? Ganz einfach:

$$\frac{D_t^{oben}}{\varepsilon^{oben}} = \frac{D_t^{unten}}{\varepsilon^{unten}} \quad \varepsilon^{oben} E^{oben} - \varepsilon^{unten} E^{unten} = \sigma_{GF}. \quad (9.9)$$

Anschaulich bedeutet dies, daß Feldlinien, die schräg auf eine GF auftreffen, dort einen Knick haben. Das soll hier aber nicht vertieft werden.

9.2 Leiter im statischen elektrischen Feld

Wir werden lernen: Abschirmung, Influenz, Spiegelladungsmethode.

Gegeben: $\rho_{ext}(\vec{r})$ + Leiter Gesucht: $\vec{E}(\vec{r})$ bzw. $\varphi(\vec{r})$.

Für die Lösung brauchen wir zuallererst ein

Modell für Leiter: Ein Teil der Elektronen ist frei beweglich, so daß jedes elektrische Feld einen Stromfluß hervorruft. Es gilt das Ohmsche Gesetz:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \text{ die Leitfähigkeit } \sigma \text{ ist eine Materialkonstante.} \quad (9.10)$$

Der Rest der Elektronen ist an den jeweiligen Kern gebunden wie in einem Dielektrikum. Dieser Teil erzeugt die Polarisation $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$. Zwischen allen Teilchen herrscht Vakuum.

Natürlich sind auch hier die Vakuum-MG! gültig, u.a.:

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho_{ext} + \rho_{Leiter}. \quad (9.11)$$

Aber die zum Leiter gehörenden Ladungen ρ_{Leiter} hängen selbst wieder von \vec{E} ab.

Wie?

Im statischen Fall so, daß überall $\vec{J}(\vec{r}) \equiv 0$ gilt. Im Leiter gilt aber auch $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, also muß das Feld dort verschwinden:

$$\text{im Leiter: } \vec{E} \equiv 0. \quad (9.12)$$

Schlußfolgerungen für das Leiterinnere:

$$\text{a) } \vec{E} = 0 \implies \operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho_{ext} + \rho_{Leiter} = 0, \text{ also}$$

$$\rho_{Leiter}(\vec{r}) = -\rho_{ext}(\vec{r}) \quad \text{im Leiter}$$

(9.13)

Eine innerhalb des Leiters befindliche fremde Ladung wird durch eine entgegengesetzt gleich große leitende Ladung am gleichen Ort unwirksam gemacht. Man nennt das vollständige ABSCHIRMUNG.²³

²³wie konsequente Manndeckung beim Fußball

b) $\vec{E} = 0 \implies \vec{E} = -\text{grad } \varphi = 0$, also

$$\varphi(\vec{r}) = \text{constant innerhalb eines Leiters} \quad (9.14)$$

Leiter sind also Äquipotential-Körper. Deswegen kann man mit Drähten elektrische Spannungen über weite Entfernungen transportieren.

c) $\vec{E} = 0 \implies \vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = 0$, das Leiterinnere ist nicht polarisiert. (9.15)

\implies Die Größe der Suszeptibilität χ_e bzw. der relativen Dielektrizitätskonstanten ε des Leiters spielt keine Rolle. Sie kann statisch also auch nicht gemessen werden.

Schlußfolgerungen für die Oberfläche (OF) des Leiters:

d) \vec{E} steht außen senkrecht auf der OF: $\vec{E} = E_{OF} \vec{e}_n$ (9.16)

Beweis: $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ ist stets senkrecht zu Äquipotentialflächen.
Die OF ist wegen b) immer eine Äquipotentialfläche.

e) Das Außenfeld E_{OF} erzeugt die Flächenladungsdichte $\sigma_{OF} = \varepsilon_0 E_{OF}$ an der Leiter-Oberfläche (9.17)

Das ist **INFLUENZ**.

Beweis: Mit "Cremedosen-Methode" analog zur Grenze zweier Dielektrika:

$$\begin{aligned} \sigma_{OF} &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{Dose} \rho_{tot} dV \\ &\quad \left| \int_{Dose} \rho_{tot} dV = \int_{Dose} \text{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) dV \stackrel{Gauss}{=} \oint_{(Dose)} \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{A} = \varepsilon_0 E_{OF} \cdot \pi R^2 \right. \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_0 \vec{E}_{OF} \cdot \pi R^2 = \varepsilon_0 E_{OF} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

- f) Die Gesamtladung Q eines Leiters befindet sich auf seiner Oberfläche (9.18)

Beweis: Wegen a) ist das Leiterinnere neutral \Rightarrow Ladungen höchstens an der OF!

Schlußfolgerungen für den Außenraum außerhalb des Leiters:

- g) Außerhalb der Leiter ist das Potential $\varphi(\vec{r})$ Lösung von

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho_{ext}(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad \text{POISSON-Gleichung}$$

$$\text{Randbedingung auf Außenfläche: } \left\{ \begin{array}{l} \varphi = const. \\ \oint_{OF} \text{grad } \varphi \cdot d\vec{A} = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \end{array} \right\} \quad (9.19)$$

Begründung:

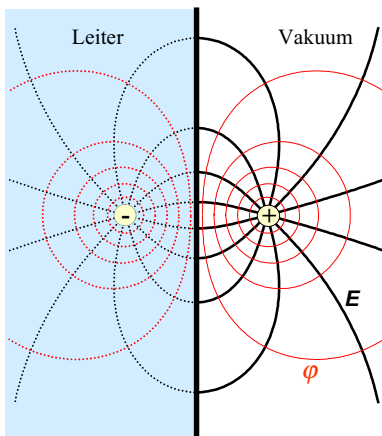
Außen ist $\rho_{tot} = \rho_{ext}$. Die Randbedingungen ergeben sich aus b) und f).

Problem: Wie das lösen?

dies ist Gegenstand einer mathematischen Disziplin, der POTENTIALTHEORIE.
in einigen Spezialfällen hilft aber ein pfiffiger Trick:

Die Spiegelladungsmethode

Beschränkung auf einfachsten Fall: ebene Leiterplatte und Punktladung.



Die Punktladung $Q > 0$ habe den Abstand d vom Leiter.

Sie beeinflusst negative Oberflächenladungen. Diese sind so verteilt, daß ihr Feld im Innern des Leiters gerade jenes von Q kompensiert, es ist also dort das einer entgegengesetzt geladenen fiktiven Punktladung am Orte der ursprünglichen. Das Feld ebener Flächenladungen ist aber symmetrisch zur Ebene. Also ist das Außenfeld der Flächenladungen ebenfalls das einer Punktladung $-Q$, die aber spiegelbildlich im Abstand d hinter der Oberfläche sitzt. Das Gesamtfeld im Außenraum ist also das Dipolfeld von Ladung und Spiegelladung.

Übungsaufgabe dazu:

Berechne a) die Grenzflächenladungsdichte, b) die beeinflusste Gesamtladung, c) das Potential des von ihr erzeugten Feldes und d) die auf sie wirkende Kraft.

9.3 Nichtleiter im statischen Magnetfeld

9.3.1 Von den Vakuum-MG1 zu den Medien-MG1

Gegeben: Äußere Stromdichte $\vec{J}_{ext}(\vec{r})$ + Medium

Gesucht: Magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ (das in die Lorentzkraft eingehende Feld)

Modell für Medium:

Kontinuum atomarer geschlossener Ströme ("Kreisströme").

Magnetisches Dipolmoment pro Volumeneinheit = $\vec{M}(\vec{r})$ (MAGNETISIERUNG).

Ansonsten Vakuum.

Natürlich gelten die Vakuum-MGL., insbesondere

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{ext} + \mu_0 \vec{J}_{mag}$$

für das resultierende totale Magnetfeld. Rechts stehen neben der gegebenen externen Stromdichte die Magnetisierungsstromdichte, die sich aus der Überlagerung der mikroskopischen Ströme im Medium ergibt.

Magnetisierungsströme und Magnetisierung hängen wie folgt zusammen (Beweis später):

$$\vec{J}_{mag}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{M}(\vec{r}) \quad (9.20)$$

Dies hinein in die MGL und alles Unbekannte nach links:

$$\text{rot } (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{J}_{ext}$$

Vergleich mit der Maxwellschen Feldgleichung (4.3) legt nahe, die Magnetfeldstärke \vec{H} im Medium durch die Materialgleichung

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{bzw.} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (9.21)$$

zu definieren. Die magnetische Feldgleichung bleibt dann (im statischen Fall)

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

mit der Konvention

$$\vec{J} = \vec{J}_{ext} \quad \text{In den Medien-MGL. bedeutet } \vec{J} \text{ die externe Stromdichte.} \quad (9.22)$$

9.3.2 Beweis von $\vec{J}_{mag} = \text{rot } \vec{M}$

Entsprechend Vakuum-MGL. gilt

$$\vec{J}_{mag} = \text{rot } \vec{H}_M \quad \text{wo } \vec{H}_M \text{ die Überlagerung der von allen atomaren "Kreisströmen" des Mediums im Vakuum erzeugte Magnetfeldstärke ist.} \quad (9.23)$$

Wir nutzen jetzt die Formel (8.24) des Kapitels 8.2.2, nach der das Magnetfeld einer räumlich begrenzten Stromverteilung in großen Entfernungen \vec{r} entsprechend

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad} \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \right) + \vec{m} \delta(\vec{r})$$

allein durch deren magnetisches Dipolmoment \vec{m} (8.23) bestimmt wird.

Im Medium sind fast alle atomaren Kreisströme sehr weit weg von einem gegebenen Aufpunkt \vec{r} .

Das magnetische Dipolmoment eines Volumenelements dV' ist laut Kontinuumsmodell gerade $\vec{M}(\vec{r}')dV'$.

Also die Überlagerung der Felder aller Volumenelemente

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_M(\vec{r}) &= \int \left[-\text{grad} \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) + \vec{M}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right] dV' \\
 &= -\text{grad} \left(\int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \right) + \int \vec{M}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' \\
 &= -\text{grad}(\dots) + \vec{M}(\vec{r})
 \end{aligned}$$

Beim Einsetzen in (9.23) liefert der erste Term wegen $\text{rotgrad} \equiv 0$ nichts, der zweite gibt gerade (9.20) – q.e.d.

9.3.3 Magnetische Eigenschaften verschiedener Medien

Bis hier die Magnetisierung \vec{M} als gegeben betrachtet.

Aber: Das Magnetfeld \vec{B} wirkt vermittels der magnetischen Lorentzkraft $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$ auf die atomaren Kreisströme zurück. Die Medien reagieren verschieden auf diese Rückwirkung.

In vielen Medien gilt Linearität:

$$\mu_0 \vec{M} = \alpha \vec{B} \quad \text{mit der Materialkonstante } \alpha \text{ (Magnetisierbarkeit)}. \quad (9.24)$$

Damit auch Linearität zwischen \vec{M} und \vec{H} :

$$\mu_0 \vec{M} = \alpha \vec{B} = \alpha \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \Rightarrow (1 - \alpha) \vec{M} = \alpha \vec{H}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \text{mit } \chi_m = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \text{ magnetische Suszeptibilität.} \quad (9.25)$$

Damit auch lineare Beziehung zwischen \vec{B} und \vec{H} : $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\chi_m + 1) \vec{H}$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad \text{mit } \mu = 1 + \chi_m = \frac{1}{1 - \alpha} \text{ relative magnetische Permeabilität.} \quad (9.26)$$

Material	α	χ_m	μ	
H_2O , Glas	-10^{-5}	-10^{-5}	0.99999	$\alpha < 0$ diamagnetisch
Wismut	$-2 \cdot 10^{-4}$	$-2 \cdot 10^{-4}$	0.9998	
Luft	$+4 \cdot 10^{-7}$	$+4 \cdot 10^{-7}$	1.0000004	$\alpha > 0$ para- magnetisch
Al	$+2 \cdot 10^{-5}$	$+2 \cdot 10^{-5}$	1.00002	
Wolfram	$+2 \cdot 10^{-4}$	$+2 \cdot 10^{-4}$	1.0002	
Eisen	$\alpha \rightarrow 1$, d.h. $\mu \gg 1$ (Weicheisen) oder stark nichtlinear mit Hysterese			ferromagnetisch

Typische Daten:

Die Magnetisierung kann sowohl parallel zum Feld (Paramagnetismus) als auch antiparallel (Diamagnetismus) sein.

Einiges zu den mikroskopischen Ursachen:

a) Diamagnetismus

Die Atome (Moleküle) diamagnetischer Stoffe haben ohne Magnetfeld kein magnetisches Moment. Dieses wird durch das Einschalten von \vec{B} erst induziert:

- während des hochfahrens von \vec{B} herrscht entsprechend des Induktionsgesetzes $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ ein elektrisches Wirbelfeld.
- Dieses induziert im atomaren Elektronensystem einen zusätzlichen Kreisstrom um die Magnetfeldachse.
- Wegen des Minus-Zeichens im Induktionsgesetz ist dieser induzierte Kreisstrom linksdrehend, sein magnetisches Moment damit $\dot{\vec{B}}$ entgegengesetzt (bekannt als "Lenz'sche Regel").

Also ist $\alpha < 0$ und schwach von der Temperatur abhängig (weil inneratomarer Vorgang).

b) Paramagnetismus

Jedes Atom (Molekül) des Stoffs hat schon ohne Magnetfeld ein magnetisches Dipolmoment. Die Dipolmomente der verschiedenen Atome sind aber zufällig orientiert und werden deshalb makroskopisch nicht wirksam.

Mit Magnetfeld dann 2 gegensätzliche Tendenzen:

- Das Drehmoment von \vec{B} auf jeden Dipol (s. Übung) dreht diesen allmählich in Feldrichtung.
- Die Wärmebewegung (Stöße) baut die Orientierung wieder ab.

Netto also ein resultierendes $\vec{M} \parallel \vec{B}$, das mit B anwächst und mit der Temperatur fällt.

Empirisch gilt $\alpha \sim T^{-1}$.

c) Ferromagnetismus

Ferromagnetismus tritt in Materialien auf, deren Elementarbausteine bereits ein magnetisches Moment besitzen. Anders als bei Paramagnetika sind die individuellen Momente aber infolge komplexer quantenmechanischer Ursachen in makroskopischen Bereichen (Weiß'sche Bezirke) vollständig parallel. Bereits in kleinen Magnetfeldern können sich solche Bezirke als ganze umorientieren oder jene mit parallelem Moment wachsen auf Kosten solcher mit ungünstiger Orientierung. Dadurch entstehen riesige Magnetisierungen \vec{M} , die den Hauptbeitrag zu \vec{B} liefern, der selbst nach Abschalten des externen Magnetfelds bestehen bleibt (Hysterese), weil sich die internen Momente an dem von ihnen selbst erzeugten Riesenfeld ausrichten (kollektiver Effekt). Die Theorie des Ferromagnetismus ist eine eigene Vorlesung wert und soll hier nicht weiter vertieft werden.

Quantitativ:

Meist $|\alpha| \ll 1$ und damit der Magnetismus unbedeutend – außer bei ferromagnetischen Stoffen.

Zur Einführung fasse ich den Stand der Dinge bei Nichtleitern tabellarisch zusammen:

	elektrisch	magnetisch
auf die Dipole wirkende Felder	\vec{E}	\vec{B}
induziertes Dipolmoment pro Volumeneinheit	$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$	$\vec{M} = \vec{M}(\vec{B})$
Zusammenhang mit externen Quellen	$\text{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{ext}}$	$\text{rot}(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}) = \vec{J}_{\text{ext}}$
Neuinterpretation von \vec{D} und \vec{H}	$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{ext}}$ \vec{D} quillt aus den externen Ladungen	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ $\text{rot} \vec{H} = \vec{J}_{\text{ext}}$ \vec{H} zirkuliert um die externen Ströme

An Grenzflächen zwischen Dielektrika sind stetig:

Normalkomponenten von \vec{D} u. Tangentialkomponenten von \vec{E} .

Nun gleiches für Grenzflächen zwischen magnetischen Medien.

9.3.4 Grenzflächen zwischen Medien

An einer Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Medien gelten folgende Übergangsbedingungen zwischen den Feldkomponenten:

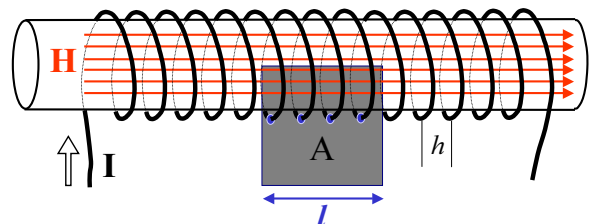
$$\vec{e}_n \cdot (\vec{B}_{\text{oben}} - \vec{B}_{\text{unten}}) = 0 \quad \vec{e}_t \cdot (\vec{H}_{\text{oben}} - \vec{H}_{\text{unten}}) = 0 \quad (9.27)$$

solange keine externen Grenzflächenströme fließen.

Beweis völlig analog zu den Grenzbedingungen für die elektrischen Felder in Abschnitt 9.1.5.

9.3.5 Anwendung: Schlanke Spule mit ferromagnetischem Kern

Aufgabe: Berechne das Magnetfeld in einer schlanke dichtgewickelten Spule mit ferromagnetischem Kern.



Aus Symmetriegründen ist \vec{H} im Innern entlang der Spulenachse \vec{e}_s gerichtet.

Also parallel zur Mantelfläche des Kerns und damit stetig.

Die zuständige integrale Maxwellgleichung ist $\int_{(A)} \vec{H} d\vec{s} = I_A^{\text{ext}}$.

Der externe Strom durch die Fläche A ist lI/h . Genau wie ohne Kern ergibt sich

$$\vec{H} = \frac{I}{h} \vec{e}_s \quad \text{homogenes Magnetfeld im Innern einer dichtgewickelten schlan-} \quad (9.28)$$

ken Spule mit Windungsabstand h .

Stimmt das? Machen nicht Eisenkerne das Magnetfeld von Spulen besonders gross?

Richtig, aber nicht \vec{H} , sondern \vec{B} ! Berechnen wir letzteres.

Wir setzen $\vec{H} = H\vec{e}_s, \vec{B} = B\vec{e}_s, \vec{M} = M\vec{e}_s$.

Entsprechend (9.21) gilt $H = B/\mu_0 - M$. Also in der Spule

$$\boxed{B - \mu_0 M(B) = \mu_0 \frac{I}{h}} \quad \text{Diese Gleichung muss nach } B \text{ aufgelöst werden. Das geht nur, wenn man die Magnetisierung } M \text{ als Funktion von } B \text{ kennt. Wir werden 2 unterschiedliche Fälle betrachten.} \quad (9.29)$$

Fall A: M wächst linear mit B .

$$\boxed{\mu_0 M(B) = \alpha B} \Rightarrow B = \mu_0 \mu_r \frac{I}{h} \quad \text{mit } \mu_r = \frac{1}{1 - \alpha}. \quad (9.30)$$

Für $\alpha \rightarrow 1$ wird $\mu_r \rightarrow \infty$ und B wird sehr gross.

Kann man das B im Eisenkern denn messen? Da kommt man doch nicht rein?

Es geht indirekt: \vec{B} ist normal zur Stirnfläche des Kerns, dort also stetig.

Draussen ist Vakuum, also $H_a = B_a/\mu_0$, also

$$H_a = \mu_r \frac{I}{h} \quad \text{Das H-Feld an der Stirnfläche des Kerns steht auf dieser senkrecht und ist aussen um den Faktor } \mu_r \text{ stärker als im Kern. Dies wird zur Erzeugung starker H-Felder ausgenutzt.} \quad (9.31)$$

Fall B: Sättigung der Magnetisierung.

Natürlich kann M nicht beliebig gross werden.

Es geht gegen eine Sättigungsmagnetisierung M_s , wenn praktisch alle Dipole ausgerichtet sind.

$$\text{Extremes Modell: } M(B) = M_s \frac{B}{|B|}. \quad \text{Der Kern ist immer gesättigt und die Richtung der Magnetisierung ist immer parallel zu } \vec{B}. \quad (9.32)$$

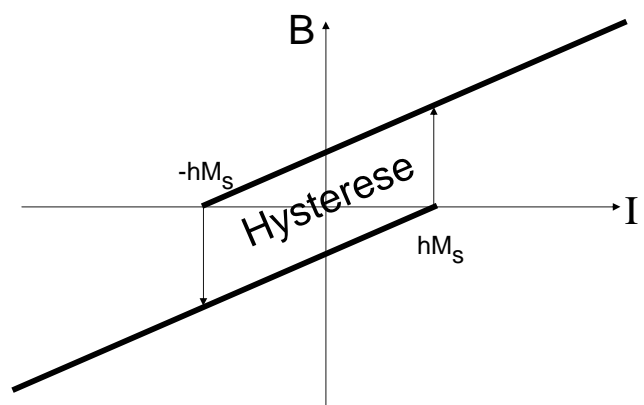
Wir lösen dafür nun Gleichung (9.29).

Sei $B > 0$. Dann folgt $B = \mu_0(I/h + M_s)$. Das ist aber > 0 nur solange $I > -hM_s$.

Sei $B < 0$. Dann folgt $B = \mu_0(I/h - M_s)$. Das ist aber < 0 nur solange $I < +hM_s$.

Beide Strombereiche überlappen sich.

Für $-hM_s < I < +hM_s$ sind beide Lösungen möglich. Das gibt Hysterese.



Im Hysteresegebiet hängt die Richtung der Magnetisierung und damit die von B von der Vorgeschichte ab.

10 Die Energie des elektromagnetischen Feldes

Die Erfahrung zeigt:

Elektromagnetische Felder können Energie enthalten und diese transportieren.

Beispiel: Sonnenstrahlen.

Sie haben den Energiebegriff bereits in der Mechanik kennengelernt.

Wir wollen ihn nun auf elmag. Erscheinungen verallgemeinern.

Einschränkung: Wir beschränken uns auf Medien, wo gilt

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E} \text{ und } \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \text{ mit konstanten } \epsilon, \mu. \quad (10.1)$$

Wir werden erst den "roten Faden" der Argumentation darlegen und dann den Beweis der Behauptungen nachholen.

Roter Faden:

Was ist Energie? Die Fähigkeit Arbeit zu verrichten!

Behauptung I: Die vom elektromagnetischen Feld pro Volumen- und Zeiteinheit geleistete Arbeit ist gleich $\vec{J} \cdot \vec{E}$ (Leistungsdichte).

Behauptung II: Für ein beliebiges Volumen V gilt

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = -\frac{d}{dt} \int_V w dV - \oint_{(V)} \vec{S} \cdot d\vec{A} \quad (10.2)$$

$$\text{mit } w = \frac{1}{2} (\mu\mu_0\vec{H}^2 + \epsilon\epsilon_0\vec{E}^2) \quad (10.3)$$

$$\text{und } \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \text{ (POYNTING-Vektor).} \quad (10.4)$$

Interpretation: dies läßt sich als Energiesatz interpretieren!

- linke Seite: die vom elmag. Feld in V umgesetzte Leistung.
(= Arbeit pro Zeiteinheit)
- 1. Term rechts: zeitliche Abnahme der Energie des Feldes im Volumen V .
 $\Rightarrow w$ = Energiedichte des elektromagnetischen Feldes.
- 2. Term rechts: durch die Oberfläche in das Volumen V hineinfließende Feldenergie (z.B. durch Strahlung).
 $\Rightarrow \vec{S}$ = Energieflußdichte des elmag. Feldes.

Das ist die gesuchte Verallgemeinerung des Energiesatzes der Mechanik.

Anmerkung:

In Medien mit der Leitfähigkeit σ gilt $\vec{J} = \sigma\vec{E}$. Folglich ist $\vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma\vec{E}^2$. Das ist stets positiv! Die vom Feld geleistete Arbeit wird in diesem Fall in Wärme umgewandelt, die sogenannte Joule'sche Wärme.

Nun sind nur noch die Beweise fällig:

Beweis von Behauptung I

Wie kann das elmag. Feld Arbeit leisten?

Durch seine Kraftwirkung auf geladene Körper und Teilchen!

Wir betrachten infinitesimal kleine Volumenelemente dV und Zeitschritte dt . Die an dV während dt geleistete Arbeit ist²⁴

$$\begin{aligned}
 dW &= \vec{F}_L \cdot \vec{ds} \quad \text{wo} \begin{cases} \vec{F}_L = \rho dV (\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})) & \text{verallg. Lorentzkraft auf } dV \\ \vec{ds} = \vec{v} dt & \text{Wegstück während } dt \text{ bei mittlerer Geschwindigkeit } \vec{v} \end{cases} \\
 &= \left(\rho \vec{v} \cdot \vec{E} + \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \right) dV dt \quad \left| \begin{array}{l} \vec{v} \perp (\vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow 2. \text{ Term null} \\ \rho \vec{v} = \vec{J} \end{array} \right. \\
 &= (\vec{J} \cdot \vec{E}) dV dt \\
 \Rightarrow \quad \frac{dW}{dV dt} &= \vec{J} \cdot \vec{E} = \text{Arbeit pro Volumen und Zeit} = \underline{\text{Leistungsdichte}}. \text{ q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung II

Zunächst Übergang zur differentiellen Formulierung von (10.2).

Dazu alle Terme auf die linke Seite, Anwenden von Gauß auf das Oberflächenintegral:

$$\int_V \left(\vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \vec{S} \right) dV = 0.$$

Dies soll für beliebige Volumina gelten, also muß der Integrand verschwinden:

$$\vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = 0 \quad \text{Energiesatz differentiell} \quad (10.5)$$

Dies läßt sich aus den MGl. beweisen. Zunächst 2 Nebenrechnungen:

$$\text{NR1:} \quad \text{div } \vec{S} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H}$$

$$\text{NR2:} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mu_0 \vec{H}^2 + \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}^2) = \mu \mu_0 (\vec{H} \cdot \dot{\vec{H}}) + \varepsilon \varepsilon_0 (\vec{E} \cdot \dot{\vec{E}}) = \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} + \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}}$$

Beide zusammen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \vec{S} &= \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} + \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H} = \vec{H} \cdot (\dot{\vec{B}} + \text{rot } \vec{E}) + \vec{E} \cdot (\dot{\vec{D}} - \text{rot } \vec{H}) \\
 &\stackrel{\text{MGl}}{=} \vec{H} \cdot (\dot{\vec{B}} - \dot{\vec{B}}) + \vec{E} \cdot (\dot{\vec{D}} - \vec{J} - \dot{\vec{D}}) = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

²⁴Kraft mal Weg

11 Quasistationäre Felder

Bisher haben wir nur zeitlich konstante Ladungs- und Stromdichten untersucht.

In der Technik wird aber viel mit Wechselströmen gearbeitet.

Wechselströme erzeugen Wechselfelder.

Die Feldänderungen breiten sich nur mit endlicher Geschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit) in den Raum aus.²⁵

Quasistationäre Felder variieren aber so langsam, daß die Laufzeit der Feldänderung durch das relevante Raumgebiet vernachlässigbar klein ist.

Beispiel: Bei 50 Hz Wechselstrom dauert eine Periode $T = 0.02\text{s}$. In dieser Zeit durchläuft die Feldänderung die Strecke $cT = 300000\text{km/s} \cdot 0.02\text{s} = 6000\text{km}$. Das ist etwa der Erdradius. In Gebieten, die viel kleiner als die Erde sind, ist gewöhnlicher Netzstrom also quasistationär. Das sind praktisch alle elektrischen und elektronischen Geräte.

In quasistationären Stromkreisen folgt das Magnetfeld den Stromänderungen momentan. Mathematisch kann unter diesen Bedingungen der Verschiebungsstrom $\partial \vec{D} / \partial t$ in den Maxwellgleichungen gegenüber dem eigentlichen Stromterm vernachlässigt werden,

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{ext}} + \cancel{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad \text{quasistationäres Magnetfeld.} \quad (11.1)$$

Das quasistationäre Magnetfeld im relevanten Raumgebiet ist jeweils gleich dem, das ein stationärer Strom mit der momentanen Stromstärke des Wechselstroms erzeugen würde.

11.1 Induktionsgesetz

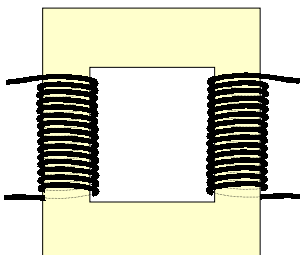
Magnetische Wechselfelder können in Leiterschleifen Spannungen induzieren.

Quantitativ wird dies beschrieben durch das Faraday'sche Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \begin{cases} U_{\text{ind}} & \text{in der Leiterschleife induzierte Spannung} \\ \Phi & \text{magnetischer Fluß durch die Leiterschleife} \end{cases} \quad (11.2)$$

Der magnetische Fluß durch die Leiterschleife ist mathematisch definiert durch

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \text{wobei } A \text{ die von der Leiterschleife eingeschlossene Fläche ist.} \quad (11.3)$$



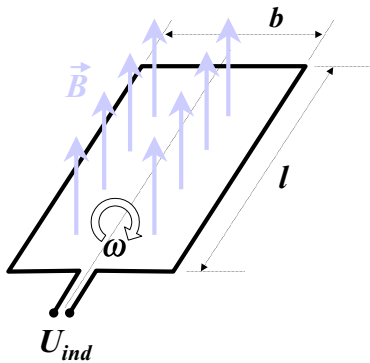
Beispiel 1: Dies wird bei Transformatoren ausgenutzt. Der Wechselstrom durch die Primärspule erzeugt ein magnetisches Wechselfeld, das in der Sekundärspule eine Wechselspannung induziert. Die Laufzeit der Felder ist dabei vernachlässigbar (weniger als eine Nanosekunde bei Trafogrößen im Zentimeterbereich), aber ohne die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses gäbe es keine induzierte Spannung.

²⁵ das zeigte die Diskussion der retardierten Potentiale (6.31) als allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen.

Beispiel 2:

Das Induktionsgesetz wird auch in Wechselstromgeneratoren ausgenutzt. Die Skizze in der folgenden Übungsaufgabe zeigt eine einfache Realisierung. Eine Leiterschleife wird in einem zeitlich konstanten Magnetfeld \vec{B} gedreht.

In diesem Falle ändert sich nicht \vec{B} , auch nicht die Flächengröße A der Leiterschleife, sondern der Winkel $\varphi = \omega t$ zwischen dem Magnetfeld und der Flächennormale. Wegen $\Phi = BA \cos \omega t$, wird eine harmonische Wechselspannung induziert.

Übungsaufgabe:

Eine rechteckige offene Leiterschleife (s. Skizze) werde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem konstanten homogenen Magnetfeld \vec{B} gedreht. Die Länge der Leiterschleife entlang der Drehachse sei l , ihre Breite senkrecht dazu b . Das Magnetfeld sei senkrecht zur Drehachse orientiert.

- Drücke die an den Kontakten induzierte Spannung U_{ind} durch die gegebenen Größen aus!
- Berechne ihre Amplitude für 2000 Umdrehungen pro Minute, $B = 0.1 \text{ T}$, $l = 20 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$!

Herleitung des Induktionsgesetzes aus den Maxwellgleichungen:

Wir werden $-\dot{\Phi}$ so lange umformen, bis U_{ind} herauskommt.

Im allgemeinen Fall kann sich sowohl das Magnetfeld ändern (wie in Beispiel 1), als auch die Lage bzw. Form der Leiterschleife (wie in Beispiel 2). Das gibt 2 Beiträge zur Änderung des Magnetflusses:

$$-\dot{\Phi} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{A=const.} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{B=const.}.$$

Für den ersten Beitrag ergibt sich

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{A=const.} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \Big|_{A=const.} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \\ &\stackrel{MGl.}{=} \int_A \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{A} \stackrel{Gauss}{=} \oint_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

Der zweite Beitrag ist etwas komplizierter. Wir gehen von der Definition des Differentialquotienten aus:

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{B=const.} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{A(t+\Delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{A} - \int_{A(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{A} \right]$$

Dabei ist $A(t)$ die von der Drahtschleife umschlossene Fläche zur Zeit t und $A(t + \Delta t)$ jene zur Zeit $t + \Delta t$. Wegen $\text{div } \vec{B} \equiv 0$ kann man diese Flächen beliebig ausbeulen – es muß nur ihr Rand mit der Leiterschleife übereinstimmen. Wir können deshalb $A(t + \Delta t)$ so wählen, daß sie aus $A(t)$ besteht plus die Fläche des 'Schlauches', den die Leiterschleife in der Zeit zwischen t und $t + \Delta t$ überstrichen hat. Im obigen Differenzenquotienten bleibt damit nur noch der Beitrag des 'Schlauchs' übrig. Wir betrachten jetzt ein Linienelement $d\vec{s}$ auf der Leiterschleife (rechtsorientiert zur gewählten Flächennormalen). Es durchwandert während Δt auf dem 'Schlauch' den Streckenvektor $\vec{v}\Delta t$, wobei \vec{v} die Geschwindigkeit ist, mit der sich der Draht an dieser Stelle bewegt. Dabei überstreicht es das Flächenelement $d\vec{A} = -\vec{v}\Delta t \times d\vec{s}$ auf dem

Schlauch. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \int_{A(t+\Delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{A} - \int_{A(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{A} &= \int_{\text{Schlauch}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{A} \\ &= \oint_{(A)} \vec{B}(t) \cdot (\vec{v} \Delta t \times d\vec{s}) \\ &= \oint_{(A)} (\vec{v} \Delta t \times \vec{B}(t)) \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

$d\vec{A} = -\vec{v} \Delta t \times d\vec{s}$ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$

Dies in obigen Differenzenquotienten eingesetzt, Δt herausgekürzt und den Limes ausgeführt ergibt

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{B=\text{const.}} = \oint_{(A)} (\vec{v} \times \vec{B}(t)) \cdot d\vec{s}$$

Fassen wir nun beide Beiträge zu $\dot{\Phi}$ zusammen, so ergibt sich gerade das Induktionsgesetz (11.2) mit

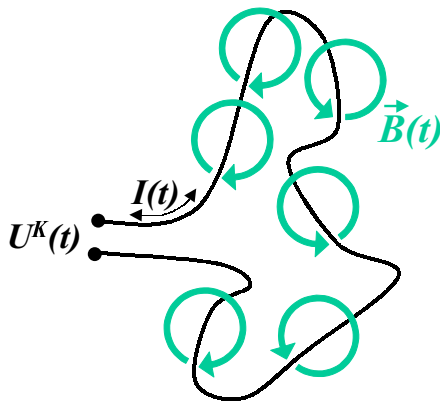
$$U_{\text{ind}} = \oint_{(A)} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}(t)) \cdot d\vec{s} \quad \text{in der Leiterschleife (A) induzierte Spannung.} \quad (11.4)$$

Die induzierte Spannung ist also die Arbeit pro Ladung, welche die Lorentzkraft bei einem Umlauf um die Leiterschleife leistet.

11.2 Der Wechselstromkreis

Es geht um das Zusammenspiel von ohmschen Widerständen, Induktivitäten (Spulen) und Kapazitäten (Kondensatoren).

11.2.1 Induktivität



Einfachster Stromkreis: Langer Draht. Ruhend.

An diesen die Wechselspannung $U^K(t)$ angelegt^a.

Dann fließt Wechselstrom $I(t)$.

Dessen Magnetfeld proportional $I(t)$ (Quasistationarität).

Damit auch dessen Fluß:

$$\Phi(t) = L I(t) \quad (11.5)$$

Der Proportionalitätsfaktor L heißt (Selbst-)Induktivität und ist eine charakteristische Konstante des Stromkreises.

^aBitte nicht aus der Steckdose!!!!

Damit wird das Induktionsgesetz

$$\oint_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\dot{\Phi} = -L \frac{dI}{dt},$$

wobei der Rand (A) der Fläche A den Draht entlang von einem Kontakt zum anderen läuft und sich durch die Luft zum Ausgangskontakt zurück schließt. Die entsprechenden Beiträge zum Integral links sind

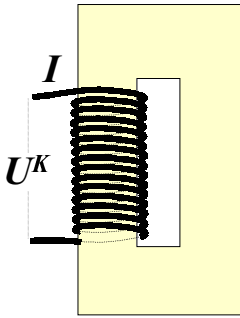
$$\begin{aligned} \int_{\text{Draht}} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= R I \quad \text{Ohm'scher Spannungsabfall} \\ \int_{\text{Luft}} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= -U^K \quad \text{angelegte Spannung} \end{aligned}$$

Damit liefert das Induktionsgesetz für diesen einfachen Stromkreis endgültig

$$U^K = U_R + U_L \quad \begin{cases} U_R = R \cdot I & \text{ohmsche Spannung} \\ U_L = L \cdot \frac{dI}{dt} & \text{induktive Spannung} \end{cases} \quad (11.6)$$

Die Spannungsabfälle durch den ohmschen Bahnwiderstand R und die Selbstinduktivität L addieren sich wie bei zwei in Reihe geschalteten Bauelementen.

Induktivität einer Spule



Spulen liefern extrem große Beiträge zur Induktivität.

Betrachten wir eine Spule mit Weicheisenkern ($\mu \gg 1$).

Sie habe N Windungen.

Strom I erzeugt innere Magnetfeldstärke $H \sim NI$ (der Proportionalitätsfaktor hängt von der Geometrie des Kerns ab).

Also Magnetfluß im Kern $\Phi_0 \sim \mu NI$.

Dieser geht durch jede der N Windungsflächen, der Gesamtfluß ist also $\Phi = N\Phi_0$, mithin

$$L = \frac{\Phi}{I} \sim \mu N^2 \quad (11.7)$$

Für $\mu \gg 1$ und $N \gg 1$ wird das sehr groß, so daß die Beiträge der Zuleitungen im Stromkreis vernachlässigt werden können.

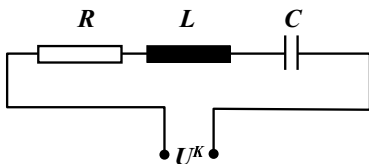
11.2.2 Kapazität

Neben ohmschen Widerständen und Induktivitäten spielen noch Kapazitäten eine große Rolle in Wechselstromkreisen. Sie werden durch Kondensatoren realisiert. Zwischen dem Spannungsabfall U an einem Kondensator und der Plattenladung Q besteht Proportionalität. Der Proportionalitätsfaktor in $Q = C \cdot U$ ist die Kapazität des Kondensators (vgl. Formeln 5.10 u. 5.16).

Bei Anlegen einer Wechselspannung ändert sich Q ständig. Ladungserhaltung verlangt dabei $\dot{Q} = I$. Also gilt für den kapazitiven Spannungsabfall U_C

$$C \frac{dU_C}{dt} = I. \quad (11.8)$$

11.2.3 Reihenschwingkreis I



Im Reihenschwingkreis addieren sich die Spannungen und die Ströme sind gleich:

$$U^K = U_R + U_L + U_C \quad I = I_R = I_L = I_C$$

Ableiten der Spannungsbeziehung nach der Zeit und Division durch L ergibt

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right) \frac{dI}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right) I = \frac{1}{L} \frac{dU^K}{dt} \quad \text{Diffgleichung Reihenschwingkreis} \quad (11.9)$$

Dies ist die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Resonanz-Frequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ und der Dämpfungskonstante $\gamma = R/L$, der durch die externe Kraft auf der rechten Seite angeregt wird.

Gewöhnlich hat man harmonische Wechselspannungen, $U^K(t) = U_0^K \cos(\omega t)$. Dann ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung die Superposition einer harmonischen Schwingung mit der Anregungsfrequenz ω und eines abklingenden Einschwingvorganges (s. Mechanik). Nach hinreichend langer Zeit sind die Einschwingvorgänge abgeschlossen und es bleibt nur die erzwungene Schwingung, d.h., ein harmonischer Wechselstrom. Dessen Amplitude kann man bestimmen, indem man einen entsprechenden harmonischen Lösungsansatz in die Differentialgleichung einsetzt.

Elegant und auch für komplexere Schaltungen erhält man die Wechselstromamplitude mit der Methode komplexer Amplituden.

11.2.4 Trick: Die Methode komplexer Amplituden

Eine harmonische Funktion $f(t) = f_0 \cos(\omega t + \varphi)$ ist durch ihre Amplitude f_0 , ihre Frequenz ω und ihre Phasenverschiebung (gegen den cosinus) festgelegt. Mit $\cos \alpha = \Re e^{i\alpha}$ kann man auch schreiben

$$f(t) = \Re[f_0 e^{i(\omega t + \varphi)}] = \Re[f_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t}] = \Re[\hat{f} e^{i\omega t}].$$

Hier ist Amplitude f_0 und Phasenverschiebung φ in der komplexen Amplitude $\hat{f} = f_0 e^{i\varphi}$ zusammengefaßt.

Zwei harmonische Funktionen sind offensichtlich genau dann gleich, wenn die komplexen Amplituden und die Frequenzen übereinstimmen, d.h. u.a.

$$\text{aus } \Re[\hat{f} e^{i\omega t}] = \Re[\hat{g} e^{i\omega t}] \text{ folgt } \hat{f} = \hat{g}.$$

Wenden wir dies auf die Beziehungen zwischen Spannung und Strom vorgegebener Frequenz bei Widerstand, Induktivität und Kapazität an:

$$\text{Ohmscher Widerstand: } U = RI \rightarrow \Re[\hat{U} e^{i\omega t}] = \Re[R \hat{I} e^{i\omega t}] \rightarrow \hat{U} = R \hat{I} \quad (11.10)$$

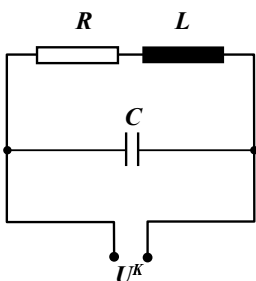
$$\text{Induktivität: } U = L \dot{I} \rightarrow \Re[\hat{U} e^{i\omega t}] = \Re[\hat{I} i\omega e^{i\omega t}] \rightarrow \hat{U} = i\omega \hat{I} \quad (11.11)$$

$$\text{Kapazität: } C \dot{U} = I \rightarrow \Re[C \hat{U} i\omega e^{i\omega t}] = \Re[\hat{I} e^{i\omega t}] \rightarrow \hat{U} = \frac{\hat{I}}{i\omega C} \quad (11.12)$$

Die erhaltenen Beziehungen sind alle vom Typ $\hat{U} = \hat{R} \cdot \hat{I}$ mit den komplexen Wechselstromwiderständen $\hat{R} = R, i\omega L, 1/(i\omega C)$ für ohmschen Widerstand, Induktivität und Kapazität.

Man kann damit die Gesamtwiderstände komplizierter Netzwerke solcher Bauteile mit den bekannten Regeln für Reihenschaltung (Widerstände addieren sich) und Parallelschaltung (Kehrwerte der Widerstände addieren sich) relativ einfach berechnen (ohne noch Differentialgleichungen lösen zu müssen).

Übungsaufgabe:

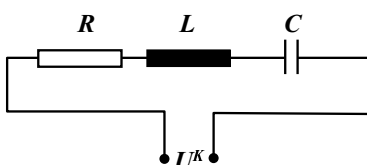


Behandle Parallel- und Reihenschwingkreis mit der Methode komplexer Amplituden. Die Anliegende Wechselspannung sei jeweils

$$U^K = U_0 \cos(\omega t).$$

Berechne jeweils den durch die Klemmen fließenden Strom $I(t)$ (Formel!).

Plotte die Amplitude dieses Stroms als Funktion der Frequenz $f = \omega/2\pi$ für $R = 1\Omega$, $L = 1\text{H}$ und $C = 1\mu\text{F}$.



12 Abstrahlung elektromagnetischer Wellen

Entdeckt 1886 by Heinrich Hertz

Heute: Weit genutztes Phänomen; schon Kinder wissen:
von Antennen kann man was aussenden und dies auch wieder mit Antennen empfangen.

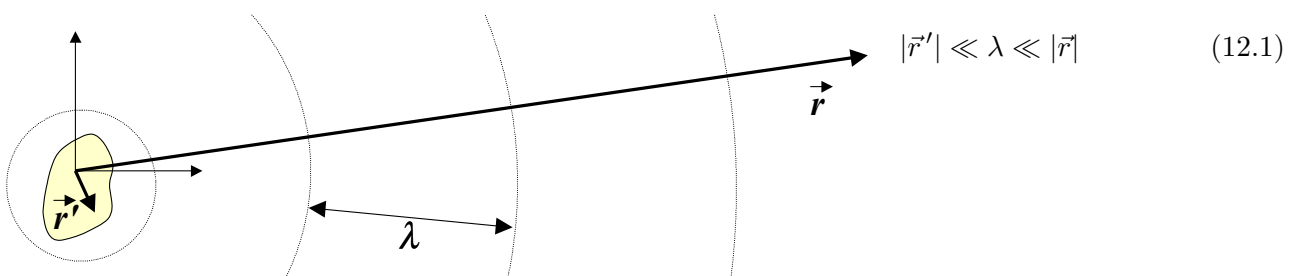
Was sagt die Theorie dazu? Welche Felder senden Antennen aus?

Wir betrachten Antennen als räumlich begrenzte zeitlich veränderliche Ladungs- und Stromverteilungen, $\rho(\vec{r}, t)$ u. $\vec{J}(\vec{r}, t)$.

Allgemeiner Fall: ziemlich schwierig.

Wir beschränken uns auf die einfachste²⁶ Situation:

- Antenne klein im Vergleich zur Wellenlänge λ
- Fernfeld:
Abstand des Aufpunktes \vec{r} von der Antenne groß im Vergleich zur Wellenlänge λ



12.1 Vektorpotential

Wir gehen aus von der allgemeinen Lösung (6.31)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \text{mit} \quad t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c. \quad (12.2)$$

Annahme 1: Laufzeit innerhalb d. Ladungsverteilung (Antenne) vernachlässigbar, $r' \ll \lambda$.

Annahme 2: Aufpunkt weit weg, $r' \ll r$ (Fernzone).

Dann r' in $|\vec{r} - \vec{r}'|$ vernachlässigbar und

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(t') \quad \text{mit} \quad t' = t - \frac{r}{c} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{p}}(t) = \int \vec{J}(\vec{r}', t) dV' \quad (12.3)$$

Das hängt nur noch vom Abstand r von der Antenne ab (Kugelwelle).

Anmerkung: $\dot{\vec{p}}(t)$ ist gerade die zeitliche Ableitung des Dipolmoments der Antenne.

²⁶und zum Glück in der Praxis auch wichtigste

Beweis: o.B.d.A. für die x -Komponente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_x &= \frac{d}{dt} \int_V x \rho(\vec{r}) dV = \int_V x \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}) dV \stackrel{\text{Kont. Gleichg.}}{=} - \int_V x \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}) dV \\ &= - \int_V \left[\operatorname{div}(x \vec{J}) - \vec{e}_x \cdot \vec{J} \right] \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \oint_{(V)} x \vec{J} \cdot d\vec{A} + \int_V J_x dV = \int_V J_x dV \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral verschwindet, weil V bei der Berechnung des Dipolmoments so gewählt werden muß, daß die Ladungs- und Stromverteilung vollständig im Innern liegt, J auf der Oberfläche also verschwindet.

12.2 Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\nabla \times \frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r} \right)$$

Annahme 3: Beschränkung auf Wellenzone: $\lambda \ll r$.

Dann kann der Nenner r als konstant betrachtet werden im Vergleich zum Zähler $\dot{\vec{p}}(t - r/c)$, der innerhalb einer Wellenlänge stark variiert:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\nabla \times \dot{\vec{p}}(t - r/c) \right) \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\nabla(t - r/c) \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c) \right) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left((-\vec{e}_r/c) \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c) \right) \end{aligned}$$

ergo

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \left(\ddot{\vec{p}}(t') \times \vec{e}_r \right) \quad \text{mit } t' = t - r/c. \quad (12.4)$$

Diskussion:

- überall $\vec{B} \perp \vec{r}$ (Magnetfeld transversal)
- $|\vec{B}| \sim |\ddot{\vec{p}}|$, die Amplitude des abgestrahlten Magnetfeldes ist (in der Ferne) proportional zur Beschleunigung der Ladungen in der Antenne.
- $\vec{B} = 0$ für $\vec{r} \parallel \ddot{\vec{p}}$, in Richtung der Beschleunigung des Dipolmoments der Antenne wird nicht abgestrahlt.

12.3 Das elektrische Feld

Man könnte wieder von den Potentialen ausgehen. Einfacher geht's direkt von den MGI:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}, \quad \text{also } \dot{\vec{E}} = c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \left(\nabla \times \left(\frac{\ddot{\vec{p}}(t - r/c)}{r} \times \vec{e}_r \right) \right)$$

wieder: stärkste r -Abhängigkeit in $\ddot{\vec{p}}$ (Wellenzone), also

$$\dot{\vec{E}} = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \left((\nabla(t - r/c)) \times \left(\frac{\ddot{\vec{p}}(t - r/c)}{r} \times \vec{e}_r \right) \right) = -c \left(\vec{e}_r \times \dot{\vec{B}} \right).$$

Dies zeitlich integriert gibt bis auf uninteressante Integrationskonstante

$$\vec{E}(\vec{r}) = c \left(\vec{B}(\vec{r}) \times \vec{e}_r \right). \quad (12.5)$$

Diskussion:

- überall $\vec{E} \perp \vec{r}$ (auch elektrisches Feld transversal)
- überall $\vec{E} \perp \vec{B}$!
- auch $\vec{E} = 0$ für $\vec{r} \parallel \ddot{\vec{p}}$, in Richtung der Beschleunigung des Dipolmoments der Antenne wird nicht abgestrahlt.

12.4 Energiedichte

Das abgestrahlte Feld hat die Energiedichte $w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right)$

$$\begin{aligned} \text{NR1: } \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} &= \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{4\pi r c} \ddot{\vec{p}}(t - r/c) \times \vec{e}_r \right)^2 \\ &= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^2 r^2} \ddot{\vec{p}}^2(t - r/c) \sin^2 \theta \quad \text{wo } \theta = \text{Winkel zw. } \ddot{\vec{p}} \text{ und } \vec{r}. \end{aligned}$$

$$\text{NR2: } \varepsilon_0 \vec{E}^2 = \varepsilon_0 c^2 (\vec{B} \times \vec{e}_r)^2 = \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \quad \text{weil } \vec{B} \perp \vec{r}$$

Aha: elektrische und magnetische Feldenergie der Strahlung sind gleich groß!

Explizit:

$$w = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^2 r^2} \ddot{\vec{p}}^2(t') \sin^2 \theta \quad \text{mit } t' = t - r/c. \quad (12.6)$$

12.5 Poynting-Vector in der Fernzone

Aus den Feldern läßt sich nun auch die Energiefußdichte berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{\mu_0} \left((\vec{B} \times \vec{e}_r) \times \vec{B} \right) = \frac{c}{\mu_0} \left(\vec{B} \times (\vec{e}_r \times \vec{B}) \right) \\ &\stackrel{a \times (b \times c) = b(ac) - c(ab)}{=} \frac{c}{\mu_0} \left(\vec{e}_r \vec{B}^2 - \vec{B}(\vec{e}_r \cdot \vec{B}) \right) \stackrel{=0}{=} \frac{c}{\mu_0} \vec{B}^2 \vec{e}_r = c\varepsilon_0 \vec{E}^2 \vec{e}_r. \end{aligned}$$

$$\text{Explizit: } \vec{S} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c r^2} \ddot{\vec{p}}^2(t') \sin^2 \theta \vec{e}_r \quad \text{mit } t' = t - r/c. \quad (12.7)$$

Diskussion:

- zeigt überall in Richtung von \vec{r}
- Vorfaktor vor \vec{e}_r ist immer $> 0 \Rightarrow$ die Energie fließt überall weg von dem Dipol. Das ist Abstrahlung.

- $|\vec{S}| \sim 1/r^2 \Rightarrow$ Energiefluß durch eine Kugeloberfläche um den Dipol herum hängt nicht von deren Radius ab.

Vergleich mit w gibt:

$$\vec{S} = c \cdot w \cdot \vec{e}_r \quad (12.8)$$

Interpretation: c ist die Geschwindigkeit, mit der die Feldenergie durch die abgestrahlte Welle transportiert wird.

12.6 Abgestrahlte Gesamtleistung

Integration über Kugelfläche mit Radius R gibt:

$$\begin{aligned} P_R &= \oint_{r=R} \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta R^2 \sin\theta \vec{e}_r \cdot \vec{S} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta R^2 \sin\theta \frac{\mu_0}{16\pi^2 c R^2} \ddot{p}^2(t - R/c) \sin^2\theta = \frac{2\pi\mu_0}{16\pi^2 c} \ddot{p}^2(t - r/c) \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta \\ &\quad \quad \quad = 4/3 \end{aligned}$$

mithin:

$$P_R(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2(t') \quad \text{mit } t' = \left(t - \frac{R}{c}\right) \quad (12.9)$$

Diskussion:

- unabhängig von R – bis auf die Verzögerung R/c .
- Einzelne Ladungen strahlen Energie ab, wenn sie sich beschleunigt bewegen.

12.7 Beispiel: Linearer Oszillator

Das Dipolmoment schwingt nur in eine Richtung periodisch mit der Frequenz ω :

$$\vec{p}(t) = p_0 \vec{e}_z \sin \omega t. \quad \text{Dann} \quad \ddot{\vec{p}}(t) = -p_0 \omega^2 \vec{e}_z \sin \omega t \rightarrow \ddot{\vec{p}}(t)^2 = p_0^2 \omega^4 \sin^2 \omega t$$

Also

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right) \quad \text{mit} \quad \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c r} (\vec{e}_r \times \vec{e}_z) \quad (12.10)$$

Das ist harmonische Kugelwelle.

Das Argument des Sinus ist ihre Phase.

Flächen konstanter Phase sind gegeben durch

$$\omega t - \frac{\omega}{c}r = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad r = r_0 + ct$$

c ist die Phasengeschwindigkeit.

Um sich die Feldrichtungen zu veranschaulichen, stelle man sich eine Kugel mit dem Radius r vor, analog zum Erdglobus, \vec{e}_z zeige in Richtung Erdachse.

Dann zeigt \vec{B} überall auf der Oberfläche horizontal in Richtung des Breitenkreises (Ost-West-Richtung, mit der Frequenz ω wechselnd, natürlich).

Die elektrische Feldstärke $\vec{E} = c(\vec{B} \times \vec{e}_r)$ senkrecht dazu in Nord-Süd-Richtung. Nach Norden, wenn \vec{B} westwärts zeigt und nach Süden, wenn \vec{B} ostwärts weist.

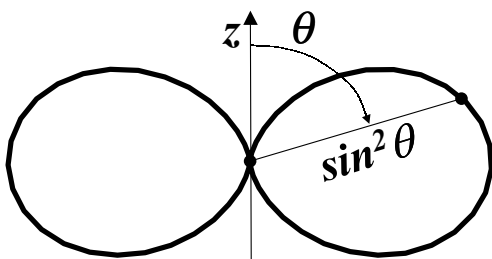
Beide Felder wechseln gleichzeitig das Vorzeichen (sind dann null).

Als Polarisation der elmag. Welle bezeichnet man die Schwingungsrichtung von \vec{E} , also nord-süd.

Die Feldamplituden sind am Äquator am größten, die Welle ist dort parallel zum Dipol polarisiert. Senkrecht zum Dipol wird am meisten abgestrahlt.

Am Nordpol verschwinden die Feldamplituden. In Richtung der Dipolachse wird nichts abgestrahlt.

Poynting-Vektor:



$$\vec{S} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c r^2} \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right) \sin^2 \theta \vec{e}_r \quad (12.11)$$

Die θ -Abhängigkeit ergibt die nebenstehend als Polardiagramm dargestellte Abstrahlcharakteristik.

Abgestrahlte Gesamtleistung

$$P_R(t) = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{6\pi c} \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega}{c}R\right)$$

Das schwankt zeitlich mit der Lichtfrequenz. Das ist unmeßbar schnell. Interessanter ist deshalb der zeitliche Mittelwert, den ein Strahlungsempfänger messen würde:

$$P_R(t) = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} = \frac{4\pi^3 p_0^2 c}{3\varepsilon_0 \lambda^4} \quad (12.12)$$

Diskussion:

- das ist unabhängig von R
- $\sim \lambda^{-4}$, bei gleicher Dipolstärke p_0 strahlen kurze Wellen viel stärker ab als lange.

Das ist Haupt-Ursache für den blauen Himmel:

Die Luftmoleküle werden vom weißen Sonnenlicht bei allen Wellenlängen gleichmäßig zum Schwingen angeregt.

Am blauen Ende des sichtbaren Spektrums ist die Wellenlänge aber etwa nur halb so groß, wie am roten Ende, also wird $2^4 = 16$ mal so viel Leistung abgestrahlt. Das fällt schon ins Auge.

12.8 Die ebene elektromagnetische Welle als Grenzfall

Die Phasenflächen der abgestrahlten Welle sind Kugeln mit dem Dipol im Mittelpunkt.

Oft ist das Beobachtungsgebiet aber klein gegen den Radius R der Kugelwelle.

Die Empfangsantenne ist in der Regel sogar winzig gegen den Abstand zum Sender.

Dann spielt die Krümmung der Phasenfläche keine Rolle [s. auch Skizze bei Formel (12.1)].

Sie kann lokal durch eine Ebene (Tangentialebene an die Kugel) approximiert werden.

Wie geschieht das mathematisch?

Indem man den Koordinatenursprung von der Sende- zur Empfangsantenne verlegt.

Man substituiert überall $\vec{r} \rightarrow \vec{R} + \vec{r}$, wobei \vec{R} der Vektor vom alten Ursprung in der Sendeantenne zu einem zentralen Punkt der Empfangsantenne ist und das neue \vec{r} nur noch von \vec{R} zum jeweiligen Aufpunkt im Empfangsgebiet reicht.

Dann gilt $r \ll R$. Für die Phase der Welle bedeutet das zunächst

$$t - \frac{r}{c} \rightarrow t - \frac{|\vec{R} + \vec{r}|}{c} \approx t - \frac{1}{c} \left(R + \frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{r} + \dots \right) = t - \frac{R}{c} - \frac{\vec{e}_R}{c} \cdot \vec{r} - \dots$$

Verlegt man noch den Zeitnullpunkt in R/c , so bedeutet das

$$\omega(t - r/c) \rightarrow \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \quad \text{mit dem Wellenvektor} \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_R = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_R$$

Die von einem linearen harmonischen Dipole ausgestrahlte elektromagnetische Welle hat dann im lokalen Empfangsgebiet die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{B}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) & \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \vec{E}_0 \perp \vec{k}, \quad \vec{B}_0 = \frac{1}{c} \left(\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}_0 \right). \end{aligned} \tag{12.13}$$

Diskussion:

- Die Flächen konstanter Phase sind jetzt die Ebenen $\vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t + \text{const.}$
- \vec{E}_0 und damit die Schwingungsrichtung von \vec{E} ist zeitlich konstant.

Man nennt das eine linear polarisierte ebene elektromagnetische Welle.