Ana 1 | Grenzwerte

Start

Einsetzen → Ziel

$a < \ln(x) < \ln(x)^k < x < x^k < k^x < n! < x^x$

$\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ → L'hospital

$\infty - \infty$ → zum Bruch

Taylor

Formen mit $\lim_{n\to\infty}$:

- $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n\cdot b} = e^{a\cdot b}$
- $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^a} = 0 \quad a > 1 \wedge a \in \mathbb{Z}$
- $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{n} = 1$
- $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \cdot a = a \cdot \frac{1}{e}$

Ziel

Sandwichlemma ← $[b^x + c^x]^{\frac{1}{x}} \xRightarrow{b<c} (c^x)^{\frac{1}{x}} < \dots < (2\cdot c^x)^{\frac{1}{x}} = c$

$\lim_{n\to\infty}(n) \Leftrightarrow \lim_{n\to 0}\left(\frac{1}{n}\right)$

$e^{\ln()}$-Trick → Potenz ausklammern

Erweitern ← $\sqrt{f} - g = (\sqrt{f} - g)\frac{\sqrt{f}+g}{\sqrt{f}+g}$

Umformen

Konvergenz Reihen:

Leibniz: $\sum_n (-1)^n \cdot s_n \mid s_n$ monotone Nullfolge

$\sum |a_n|$ absolut konvergent

Quotientenkrit: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ absolut

Wurzelkrit: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$; $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$

Majorante: $\sum b_n > \sum a_n$, b_n konvergent $\Rightarrow a_n$ konvergent

Minorante: $\sum b_n < \sum a_n$, b_n divergent, a_n divergent

a_n Nullfolge

Konvergenzradius $\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$:

$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)}$

$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Reihen ∞

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$; $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2$; $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \to \infty$

$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$, $|x| < 1$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k \cdot b^{n-k}$

Länge einer Kurve: $\int |dr(t)|$ $\quad \Gamma \to \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\Sigma (r_n'(t))^2}\,dt$

$r = \sqrt{Re^2 + Im^2}$

$\varphi = \arctan\frac{Im}{Re}$

$Re = r\cdot\cos\varphi$

$Im = r\cdot\sin\varphi$

Eine Menge & Menge d. Teilmenge sind nicht gleichmächtig — Satz v. Cantor

Jede nach $\frac{\text{oben}}{\text{unten}}$ beschränkte Folge welche monoton $\frac{\text{steigt}}{\text{fällt}}$ hat einen Grenzwert

$x_n \to x :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_0 \mid |x_n - x| < \varepsilon$

Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m,n \geq N_0 : |x_m - x_n| \leq \varepsilon$

Jede beschränkte Folge, hat mindestens eine konvergente Teilfolge (Häufungspunkt)

$f_n \to f$ punktweise Konvergenz

$:\Leftrightarrow \forall x \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists N_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \to f(x)$

$f_n \to f$ gleichm. Konvergent

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{N_0(\varepsilon)}{N_0} \in \mathbb{N} : \forall x \in X\ \forall n \geq N_0 : \underbrace{|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon}_{f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon}$

$\lim_{n\to 0}\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| = 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f(a) < 0 \wedge f(b) > 0 : \exists x_0 \in (a,b) \mid f(x_0) = 0$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$\exists \vartheta \in (a,b)$ $\Rightarrow f'(\vartheta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

f beschränkt & $\{x \in [a,b] : f$ nicht stetig in $x\}$ maß Null / Nullmenge.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n} f\left(a + (j-1)\frac{b-a}{n}\right)$

$f(x)$	$f'(x)$	$F(x) + C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\cdot\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	/
$\text{arcsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	/
$\text{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	/
$\text{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	/