Ana II Spickzettel

Kugelkoord. $\vec r=(r,\varphi,\vartheta)$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\varphi=\arctan(y/x)\{+\pi\}$

$\vartheta=\arccos(z/r)$

$x=r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\vartheta$

$y=r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\vartheta$

$z=r\cdot\cos\vartheta$

$dr\,d\varphi\,d\vartheta\cdot r^2\cdot\sin\vartheta$

Zylinderkoord.

$\vec r=(r,\varphi,z)$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi=\arctan(y/x)\{+\pi\}$

$z=z$

$x=r\cdot\cos\varphi$

$y=r\cdot\sin\varphi$

$z=z$

$dr\,d\varphi\,dz\cdot r$

wichtige Grenzwerte:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, $a=$const.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}=1/e$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=1/e^x$

Wichtige Reihen:

$\sin x=x+(-\frac{1}{6})x^3+O(x^5)$

$\cos x=1+(-\frac{1}{2})x^2+O(x^4)$

$\ln(1+x)=x+O(x^2)$ $|x|<1$

$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+O(x^2)$

$\sin x=\sum_{l=0}(-1)^l\frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}$; $\cos x=\sum_{l=0}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}$

$\log(1+x)=\sum_{k=1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$; $|x|<1$; $\sqrt{1+x}=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n(2n)!\,x^n}{(1-2n)(n!)^2(4^n)}$

Taylor:

1D: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k \xrightarrow{x_0=0} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)\cdot x^k$

nD: $v=\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}$, 2D: $p_l^{f,x}(v)=\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\partial_1^k\partial_2^{j-k}f(x)\cdot v_1^k\cdot v_2^{j-k}$

$\hookrightarrow p_2^{f,x}(v)=f(x)+\langle\nabla f(x),v\rangle+\frac{1}{2}\langle H_f(x)\cdot v,v\rangle+O$

Hesse-Matrix / Jacobi-Matrix

Hesse-Matrix: $H_f(x):=[\partial_j\partial_k f(x)]_{j,k=1,\dots,n}$

Jacobi-Matrix: $J_f(x):=[\partial f_i(x)/\partial x_j]_{i,j=\{1,\dots,m;1,\dots,n\}}$

Extrema: ohne NB

1. $\nabla f(x)\overset{!}{=}0$
2. Gleichungssystem lösen
3. $H_f(x)$ bilden
4. Punkte aus 2. einsetzen und nach Definitheit prüfen (Krit v. Silvester)

mit NB:

1. $g(x)=0$ erzeugen
2. $L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x)$
3. $\nabla L\overset{!}{=}0$
4. lösen (evtl. mit $\nabla g\overset{!}{=}0$)
5. 3/4. von 'ohne NB'

Abstandsbestimmung: $f(x)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$, $g(x)=$ Figur/Körper

Definitheit:

$x^T\cdot A\cdot x>0$, pos

$x^T\cdot A\cdot x\geq 0$, pos. sem.

$x^T\cdot A\cdot x<0$, neg

$x^T\cdot A\cdot x\leq 0$, neg. sem.

Kriterien v. Silvester:

H_j: j-te Hauptminore: $j=1,\dots$

$H_i>0,\ \forall i\Rightarrow$ pos. def.

$\left.\begin{matrix}H_{2i+1}<0\\H_{2i}>0\end{matrix}\right\}\forall i\Rightarrow$ neg. def.

$\exists i: H_i=0\Rightarrow$ Wahrsch. indefinit

Tangentialebenen: best. Gleichung:

$f(x)=0$ best. Gleich. an Punkt P

$\nabla f(x)\overset{!}{=}0$, $\langle\vec v,\nabla f(p)\rangle=0$ $\quad v=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$

$T_pM=\{\vec p+\vec v:\langle\nabla f(p),\vec v\rangle=0\}$

Wegintegrale:

durch Feld: $\int\vec v\,d\vec\gamma=\int\vec v(\vec\gamma(s))\frac{d\vec\gamma}{ds}ds$

durch skalar: $\int v\,d\gamma=\int v(\gamma(s))\cdot\left|\frac{d\gamma}{ds}\right|\cdot ds$

Flächenintegrale: nicht orientiert:

$\int_F f\,dF=\int_G f(\phi(x))\cdot\underbrace{|\partial_1\phi(x)\times\partial_2\phi(x)|}_{\text{Volumenelement bei entsprechender Parametrisierung}}dx_1dx_2$

$\int\vec v\cdot d\vec F=\iint_F\langle\vec v,\vec n\rangle dF$

orientiert:

$=\iint_G\langle\vec V(\phi(s,t)),\vec n(\phi(s,t))\rangle\cdot|\phi_s'\times\phi_t'|\cdot ds\,dt$

$=\iint\langle\vec v(\phi(s,t)),\phi_s'\times\phi_t'\rangle\,ds\,dt$

$n(\phi(x))=\pm\frac{\partial_1\phi(x)\times\partial_2(\phi(x))}{|\partial_1\phi(x)\times\partial_2\phi(x)|}$

Satz v. Stokes:

$\int_{\partial F}v\cdot d\gamma=\int_F\operatorname{rot}v\cdot dF$

Satz v. Gauß

$\oint_{\partial\Omega}\vec v\cdot dF=\int_\Omega\operatorname{div}\vec v\,dx$

Norm:

Definitheit: $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$

Homogenität: $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$

$\triangle$-Ungleichung: $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

Nullmenge:

$\epsilon>0$ abzählbare Intervalle I_n ! $M\subset\mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\leq\epsilon$

offene Menge: $M\ \nexists x\in M\Rightarrow x\notin\partial M$ z.B. $(0,1)\in\mathbb{R}$

abgeschl. Menge: $M\ \nexists x\in M\Rightarrow x\in\partial M$ z.B. $[0,1]\in\mathbb{R}$

glatter Rand: $\forall j\ \exists\epsilon_j>0,\forall\epsilon\in(0,\epsilon_j]$, $\forall x\in F_j: x+\epsilon n_j(x)\in\Omega$ $\wedge\ x-\epsilon n_j(x)\in\Omega$ ohne Spitzen & Schlitze

bogenzsh. Menge: $a,b\in A$

$\phi:[0,1]$, s.d. $\phi(0)=a\wedge\phi(1)=b$

$\Rightarrow$ alle Wege $\overline{ab}\in A$

$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)+C$
$1/x$	$-1/x^2$	$\ln x$
a^x	$a^x\cdot\log(a)$	$a^x/\log(a)$
$\log x$	$1/x$	$-x+x\cdot\log x$
$\arcsin x$	$(\sqrt{1-x^2})^{-1}$	
$\arccos x$	$-(\sqrt{1-x^2})^{-1}$	
$\arctan x$	$(1+x^2)^{-1}$	
$f'(x)/f(x)$	$-\frac{f'(x)^2}{f(x)^2}+\frac{f''(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$\cos x\cdot\sin x$	$\cos^2x-\sin^2x$	$-\frac{1}{2}\cos^2x$
$\sin^2x$	$2\cos x\sin x$	$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2x)$
$\cos^2x$	$-2\cos x\sin x$	$\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2x)$

$f(x)$	$F(x)+C$
$\sin^2x\cos x$	$\frac{\sin^3x}{3}$
$\sin x\cos^2x$	$-\frac{1}{3}\cos^3x$
$\sin^2x-\cos^2x$	$-\frac{1}{2}\sin(2x)$
$\cos^2x-\sin^2x$	$\frac{1}{2}\sin(2x)$
$\sin^2x\cdot\cos^2x$	$\frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin(4x)$
$\cos^nx\cdot\sin x$	$-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x$
$\sin^nx\cdot\cos x$	$\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x$
$(ax+b)^{-1}$	$\frac{1}{a}\ln(ax+b)$

$\int f'g=f\cdot g-\int f\cdot g'$

grad	rad	sin	cos
0	0	0	1
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt3/2$
60	$\pi/3$	$\sqrt3/2$	$1/2$
90	$\pi/2$	1	0
120	$2\pi/3$	$\sqrt3/2$	$-1/2$
150	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt3/2$
180	π	0	-1