Ana 3

exakte DGL

$P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\mu \cdot P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \cdot Q)$

$\frac{\mu(x)}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}$

$\frac{\mu(y)}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{\partial u}{\partial y}$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \;\vdots\; \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$

DGL-Systeme

$y' = A \cdot y$ | $\boxed{y' = (T^{-1} \cdot A \cdot T) \cdot y}$

λ_i: EW von A | $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$

f_i EV von λ_i | $\mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot \mathbb{1}) f_i = 0$

$y = \sum_i f_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t}$ | n-facher EW λ: $e^{\lambda x} + x \cdot e^{\lambda x} + \ldots$

entkoppeln über Polarkoordinaten

$x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta$ | 1. Multiplizieren $\sin\theta$, $\cos\theta$ | 2. voneinander abziehen

Exp-Matrix

$e^M = \exp(M) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} = \mathbb{1} + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3$

$\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \underline{0} + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

$\exp\begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\varphi^2 & 0 \\ 0 & -\varphi^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & \varphi^3 \\ -\varphi^3 & 0 \end{pmatrix} + \ldots = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\exp(\underline{0}) = \mathbb{1}$ | e^A invertierbar | $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ | $\det(e^A) = e^{\mathrm{Spur}(A)}$ Satz v. Liouville

$e^A = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{A}{n}\right)^n$, $B \cdot e^A \cdot B^{-1} = e^{B \cdot A \cdot B^{-1}}$

Lipschitz-Bedingung

$f: I \times I' \Rightarrow \mathbb{R}$

$\exists L > 0: \forall x \in I \wedge y, \tilde{y} \in I:$

$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq L \cdot |y - \tilde{y}|$

existiert $\frac{\partial f}{\partial y}$ & ist beschränkt $\Rightarrow f$ ist L-B

Stabilität

$y' = f(x,y) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_k = (x_0, y_0)$

$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_y}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_y}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_y}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_y}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ λ_i EW von J_f

asymptotisch stabil: $\forall \lambda_i: \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$

instabil: $\exists \lambda_i: \mathrm{Re}\{\lambda_i\} > 0$

ansonsten: keine Aussage.

$\Rightarrow$ Ljapunov-Fkt. $V(x_k)$ $\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

1.) $V(x_k) = 0$

2.) $V(x) > 0 \;\forall x \in U \setminus \{x_k\}$

3.) $\dot{V} := \langle \vec{\nabla} V, f \rangle \;\forall x \in U \setminus \{x_k\}$

$\dot{V} \leq 0$ Ljapunov | ~~asymptotisch~~ stabil

$\dot{V} < 0$ ~~sterk~~ Lja. | asymptotisch stabil

Fourier-Reihe

$[a,b]$ periodisch

$S_m := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(kx)\right)$

$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$; $a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \cos(kx)\,dx$; $b_k = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\,dx$

Fourier Konvergenz:

$\pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right) \leq \|f(x)\| = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$

gleichmäßig:

1.) $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$

2.) stückweise stetig, diffbar, endlich viele Unstetigkeiten, Minima, Maxima

Cauchy-Folge

$\forall \varepsilon > 0: \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \|x_k - x_l\| < \varepsilon \quad \forall l, k \geq N(\varepsilon)$

greensche Funktion

$L \cdot u = \frac{d}{dx}(pu') + q \cdot u$

$\begin{cases} L \cdot u = 0 \\ R_1(u) = R_2(u) \end{cases}$; $W(y) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$

$G(x,y) = \frac{1}{p(y)W(y)}\begin{cases} u_1(x) \cdot u_2(y), & a \leq x < y \leq b \\ u_1(y) \cdot u_2(x), & a \leq y \leq x \leq b \end{cases}$

$u(x) = \int_a^b G(x,y) f(y)\,dy$

Banachraum etc.

Banachraum: vollständig, normiert, jede Cauchyfolge konvergent

prä-Hilbertraum: normiert, Skalarprodukt, jede Cauchyfolge konvergent

Hilbertraum: vollständig, normiert, Skalarprodukt, jede Cauchyfolge konvergent

Skalarprodukte

$\langle v, v \rangle > 0 \;\forall v \neq 0$

$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

$\langle \lambda u + \mu \cdot v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$

Normen

$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

VR-Gleichungen

- Phytagoras: $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$
- Cauchy-Schwarz: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

Parallelogramm-Gleichung

$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2 \cdot \|v\|^2 + 2\|w\|^2$

Basen: $\forall i,j: \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$; $\|b_i\| = 1$

Besselsche Ungleichung

$\forall f \in \mathcal{H}: \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n \rangle^2 \leq \|f\|^2$

Gram-Schmidt

$\hat{e}_1 = v_1 \cdot \frac{1}{\|v_1\|}$

$\hat{e}_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1}{\|v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1\|}$

$\hat{e}_{n+1} = \frac{v_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle v_{n+1}, e_i \rangle e_n}{\|v_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle v_{n+1}, e_n \rangle e_n\|}$

Hilbertbasen

(b_n) - $\mathcal{H}$-Basis

$\Leftrightarrow U := \mathrm{span}(b_n \mid n \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow \forall f \in U: f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n \rangle b_n$

$\Leftrightarrow$ Parsevallgleichung $\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n \rangle \langle g, b_n \rangle$

$\Leftrightarrow$ Besselsche (Un)gleichung

Äquivalenzaussagen Hilberträume

$\dim U < \infty$

$\Leftrightarrow$ $\forall$ injektive, lin. Abb. $U \to U$ gilt Surjektivität

$\Leftrightarrow$ $\forall$ surjektive lin. Abb. $U \to U$ gilt Injektivität

$\Leftrightarrow \dim U = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$

$\Leftrightarrow V \subseteq U$ | wenn $U \mapsto V$ bijektiv $\Rightarrow U = V$

$\Leftrightarrow$ alle Normen äquivalent

$\Leftrightarrow$ alle beschränkten Folgen haben konvergente Teilfolgen

$\Leftrightarrow$ jeder Teilraum ist abgeschlossen

$\Leftrightarrow$ jede lin. Abb. $U \to \mathbb{K}$ ist stetig

Komplexer $\mathcal{H}$-Raum

(1) $\langle v, v \rangle > 0 \;\forall v \neq 0$

(2) $\langle \lambda \cdot u + \mu \cdot v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$

$\langle u, \lambda \cdot v + \mu \cdot w \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle + \bar{\mu} \langle u, w \rangle$

(3) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

Operatornorm

- $\|T^2\| \leq \|T\|^2$

$\|T\| := \inf\{M \geq 0 \mid \|T \cdot x\| \leq M \cdot \|x\|\}$

- $\|T \cdot x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$
- $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T \cdot x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T \cdot x\| = \sup_{\|x\| = 1} \|T \cdot x\|$

Funktionsfolgen Konvergenz

$k \in \mathbb{N}$

- Punktweise: $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f^*(x)$, $\lim_{n \to \infty} |f_n(x) - f^*(x)| = 0$

- gleichmäßig

  punktweise $f^*(x)$ muss stetig sein

  $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in D} \{|f_n(x) - f^*(x)|\} = 0$

Operatoren Stetigkeit

1.) ε-δ-Def.

2.) $\exists M > 0 \mid \|T \cdot x\| \leq M\|x\| \;\forall x$

3.) stetig um 0

4) gleichm. stetig

5.) beschränkt

6.) endlicher VR

Kompakte Operatoren

1.) $T_1 + T_2 \in K(X,Y)$, $\forall T_1, T_2 \in K(X,Y)$

2.) $\alpha \cdot T_1 \in K(X,Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$

3.) $0 \in K(X,Y)$

$K(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y) := \{T, \text{ stetig } X \to Y\}$

adjungierte Operatoren

1.) $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$

2.) $(S + T)^* = S^* + T^*$

3.) $(\lambda \cdot S)^* = \bar{\lambda} \cdot S^*$

4.) $(R \cdot S)^* = S^* \cdot R^*$

5.) $(S^*)^* = S$

6.) $\mathrm{Ker}\, S = (\mathrm{Im}\, S^*)^{\perp}$

7.) $\|T^2\| = \|T\|^2$

Spektraltheorie

für $\dim X < \infty$: $\lambda \in$: $(\lambda - T)$ nicht injektiv, nicht surjektiv

resolvente Menge:

$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda - T) \text{ bijektiv}, (\lambda - T)^{-1} \text{ stetig}\}$

Spektrum: $\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T)$

Punktspektrum: $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda - T) \text{ nicht injektiv}\}$

Kontinuierliches Spektrum: $\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda - T) \text{ injektiv, dicht, nicht surjektiv}\}$

Restspektrum: $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda - T) \text{ injektiv, nicht dicht}\} = \sigma \setminus \{\sigma_p \cup \sigma_c\}$

Trigonometrie

- $\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\{\sin[(m+n)x] + \sin[(m-n)x]\}$
- $\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\{\cos[(m+n)x] + \cos[(m-n)x]\}$
- $\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\{\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x]\}$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$; $\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 2$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$; $\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$
- $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$
- $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$

$\int dx\, f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'\,dx$

Orthogonale Projektion

$A \neq \{0\} \subset \mathcal{H}$ abgeschlossener UVR

$\exists$ ortho-Projektion P_A

$\|P_A\| = 1$ & $\mathrm{Ker}\, P_A = (\mathrm{Im}\, P_A)^{\perp} = A^{\perp}$

1.) $P_A^2 = P_A$

2.) $\mathrm{Ker}\, P_A = (\mathrm{Im}\, P_A)^{\perp}$

exakte DGL Bsp.

$P = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$; $Q = -\frac{x}{y^2}$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P$

$F(x,y) = \int P\,dx + \varphi(y)$

$\to \frac{\partial F}{\partial y} = Q = \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx + \varphi'(y)$

$\varphi(y) = \int dy\left(Q - \frac{\partial}{\partial y} \cdot \int P\,dx\right)$ $\longrightarrow$ Lösung

Reihen

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k = \log(1+x)$, $|x| < 1$

$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$