Übungen zum Standardmodell der Teilchenphysik

16. Der Noether Strom eines geladenen Skalarfeldes

Eine klassische Feldtheorie in einem Volumen V sei durch die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N)$ charakterisiert. Das System sei symmetrisch unter einer globalen, kontinuierlichen Transformation mit Parameter α.

Zeigen Sie, dass der Noether Strom

$$j^\mu = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \varphi_i \quad , \quad \varphi_i := \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \tag{1}$$

die Kontinuitätsgleichung erfüllt.

Betrachten Sie nun freie, komplexe Skalarfelder $\phi(x)$, $\phi^*(x)$ mit

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \phi^*, \partial_\mu \phi^*) = \partial_\mu \phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^*(x) \phi(x) \ .$$

Welcher Noether Strom und welche erhaltene Ladung resutiert aus der globalen $U(1)$ Symmetrie

$$\phi(x) \to e^{i\alpha} \phi(x) \quad , \quad \phi^*(x) \to e^{-i\alpha} \phi^*(x) \quad ?$$

Woran scheitert die Interpretation der 4er-Strom Komponente j^0 als Wahrscheinlichkeitsdichte? Wie könnte man stattdessen zu einer Interpetation als Ladungsdichte gelangen?

Lösung

Die Symmetrie des Systems unter einer globalen, kontinuierlichen Transformation mit Parameter α bedeutet

$$\mathcal{L}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N) = \mathcal{L}(\phi'_1, \phi'_2, \ldots, \phi'_N)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha} &= 0 \\ &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \frac{\partial(\partial_\mu \phi_i)}{\partial \alpha} \end{aligned} \tag{2}$$

Die partiellen Ableitungen ∂ bzw δ und ∂_μ im zweiten Summanden lassen sich vertauschen. Mit den Regeln für partielle Ableitungen kann man diesen weiter umformen und wieder zusammenfassen:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha} - \left(\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \right) \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha} + \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha} \right) \tag{3}$$

$$= \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} - \left(\delta_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \right) \right] \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha} + \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha} \right) \tag{4}$$

Der erste Summand entspricht den Euler-Lagrange-Gleichungen und ist somit 0. Damit ist nach Voraussetzung allerdings auch der zweite Summand Null. Diesen schauen wir uns etwas näher an:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha} &= \sum_{i=1}^{N} \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha} \right) \\ &= \partial_\mu \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \varphi_i \\ &= \partial_\mu j^\mu = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Der Noether Strom erfüllt also offensichtlich die Kontinuitätsgleichung.

Betrachten wir nun freie, komplexe Skalarfelder $\phi(x)$, $\phi^*(x)$ mit

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi^*) = \partial_\mu\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi^*(x)\phi(x) \ . \tag{6}$$

Das System ist offensichtlich invariant unter einer Phasentransformation (globale $U(1)$ Symmetrie):

$$\phi' = e^{i\alpha}\phi \quad , \quad \phi^{*\prime} = e^{-i\alpha}\phi^* \tag{7}$$

Damit ergibt sich für die φ_i im Noether Strom:

$$\varphi_1 = \frac{\partial\phi}{\partial\alpha} = i\phi \quad , \quad \varphi_2 = \frac{\partial\phi^*}{\partial\alpha} = -i\phi^*$$

Wir setzen dieses Ergebnis ein und erhalten den Noether Strom für komplexe, freie Skalarfelder:

$$\begin{aligned} j^\nu &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\nu\phi_i)}\varphi_i \\ &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\nu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\nu\phi^*)}\frac{\partial\phi^*}{\partial\alpha} \\ &= (\partial_\mu\phi^*)g^{\mu\nu}i\phi - (\partial^\nu\phi)i\phi^* \\ &= i\left((\partial^\nu\phi^*)\phi - (\partial^\nu\phi)\phi^*\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Hieraus resultiert die Ladung:

$$\begin{aligned} Q = \int_V d\vec{x}\, j^0 &= i\int_V d^3x\, \Big((\partial^0\phi^*)\phi - (\partial^0\phi)\phi^*\Big) \\ &= i\int_V d^3x\, \Big((\dot{\phi^*})\phi - (\dot{\phi})\phi^*\Big) \end{aligned} \tag{9}$$

Die Lösung der Klein-Gordon-Gleichung sind ebene Wellen:

$$\begin{aligned} \phi &= Ne^{+ipx} = Ne^{+ip^0x_0 - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \\ \phi^* &= Ne^{-ipx} = Ne^{-ip^0x_0 + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \end{aligned}$$

Damit läßt sich die j^0 Komponente des 4er-Stromes wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} j^0 &= i[(\partial^0\phi^*)\phi - (\partial^0\phi)\phi^*] \\ &= i[ip^0\phi^*\phi - (-i)p^0\phi\phi^*] \\ &= 2p^0|\phi|^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Das Betragsquadrat $|\phi|^2$ ist größer oder gleich Null. p^0 können wir die Energie E zuordnen. Diese ist mit $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ gegeben. Damit ist j^0 nicht positiv definit und nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte auffassbar.
Einen Ausweg schafft die Umeichung der Felder. Wir betrachten die in (7) definierte Phasentransformation und fügen ein e für die Ladung hinzu:

$$\phi' = e^{ie\alpha}\phi \quad , \quad \phi^{*\prime} = e^{-ie\alpha}\phi^* \tag{11}$$

Damit kann man nun j^0 als Ladungsdichte interpretieren. Ein negativer Wert deutet damit nur auf eine negative Ladung (z.B. Elektron) hin.