Übungen zum Standardmodell der Teilchenphysik

3. Baker-Campbell-Hausdorff Formel

Gegeben seien die beschränkten Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$, und ε sei ein infinitesimaler Parameter. Für das Produkt der Exponentialfunktionen $\exp(\varepsilon\hat{A})\cdot\exp(\varepsilon\hat{B})$ machen wir den Ansatz

$$\exp(\varepsilon\hat{A})\cdot\exp(\varepsilon\hat{B}) = \exp(\varepsilon\hat{X}+\varepsilon^2\hat{Y}+\varepsilon^3\hat{Z}+\mathcal{O}(\varepsilon^4)).$$

Bestimmen Sie $\hat{X}$, $\hat{Y}$ und $\hat{Z}$, und suchen Sie kompakte Ausdrücke dafür.

Lösung

Die Exponentialfunktion $\exp(\hat{A})$ ist auch für Operatoren in einer Reihe definiert:

$$\exp(\hat{A}) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\hat{A}^k \tag{1}$$

In Produkten von e-Funktionen lassen sich die Exponenten somit offensichtlich nicht trivial addieren. Daher verknüpfen wir in unserem Ansatz die Operatoren mit einem infinitesimalen Parameter ε:

$$\exp(\varepsilon\hat{A})\cdot\exp(\varepsilon\hat{B}) = \exp(\varepsilon\hat{X}+\varepsilon^2\hat{Y}+\varepsilon^3\hat{Z}+\mathcal{O}(\varepsilon^4)) \tag{2}$$

Nun untersuchen wir unseren Ansatz mithilfe der Reihendefinition bis zur dritten Ordnung in ε. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\exp(\varepsilon\hat{A})\exp(\varepsilon\hat{B}) &= \sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n!}\varepsilon^{k+n}\hat{A}^k\hat{B}^n \\
&= 1+\varepsilon(\hat{A}+\hat{B})+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\hat{A}^2+\hat{A}\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{B}^2\right)+\varepsilon^3\left(\frac{1}{6}\hat{A}^3+\frac{1}{2}\hat{A}^2\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{A}\hat{B}^2+\frac{1}{6}\hat{B}^3\right)+\mathcal{O}(\varepsilon^4)
\end{aligned}$$

Der rechte Teil unseres Ansatzes liefert:

$$\begin{aligned}
\exp(\varepsilon\hat{X}+\varepsilon^2\hat{Y}+\varepsilon^3\hat{Z}+\mathcal{O}(\varepsilon^4)) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\varepsilon\hat{X}+\varepsilon^2\hat{Y}+\varepsilon^3\hat{Z}+\mathcal{O}(\varepsilon^4))^k \\
&= 1+\varepsilon\hat{X}+\varepsilon^2\left(\hat{Y}+\frac{1}{2}\hat{X}^2\right)+\varepsilon^3\left(\hat{Z}+\frac{1}{2}\hat{X}\hat{Y}+\frac{1}{2}\hat{Y}\hat{X}+\frac{1}{6}\hat{X}^3\right)+\mathcal{O}(\varepsilon^4)
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt in der ersten Ordnung von ε für $\hat{X}$:

$$\hat{X} = \hat{A}+\hat{B}$$

In der Ordnung ε^2 erhalten wir für $\hat{Y}$:

$$\begin{aligned}
\hat{Y} &= \frac{1}{2}\hat{A}^2+\hat{A}\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{B}^2-\frac{1}{2}\hat{X}^2 \\
&= \frac{1}{2}\hat{A}^2+\hat{A}\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{B}^2-\frac{1}{2}\left(\hat{A}^2+\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}+\hat{B}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\hat{A}\hat{B}-\frac{1}{2}\hat{B}\hat{A} \\
\hat{Y} &= \frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]
\end{aligned}$$

Die dritte Ordnung ε^3 liefert schließlich zu $\hat{Z}$:

$$\begin{aligned}
\hat{Z} &= \frac{1}{6}\hat{A}^3+\frac{1}{2}\hat{A}^2\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{A}\hat{B}^2+\frac{1}{6}\hat{B}^3-\frac{1}{2}\hat{X}\hat{Y}-\frac{1}{2}\hat{Y}\hat{X}-\frac{1}{6}\hat{X}^3 \\
&= \frac{1}{6}\hat{A}^3+\frac{1}{2}\hat{A}^2\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{A}\hat{B}^2+\frac{1}{6}\hat{B}^3-\frac{1}{2}\hat{X}\hat{Y}-\frac{1}{2}\hat{Y}\hat{X}-\frac{1}{6}\left(\hat{A}^3+\hat{A}^2\hat{B}+\hat{B}^2\hat{A}+\hat{B}^3+[\hat{A},\hat{B}]_+(\hat{A}+\hat{B})\right) \\
&= \frac{1}{12}\left(4\hat{A}^2\hat{B}+6\hat{A}\hat{B}^2-2\hat{B}^2\hat{A}-2[\hat{A},\hat{B}]_+(\hat{A}+\hat{B})-6\hat{X}\hat{Y}-6\hat{Y}\hat{X}\right)
\end{aligned}$$

Die beiden Terme $6\hat{X}\hat{Y}$ und $6\hat{Y}\hat{X}$ lassen sich mit dem Antikommutator zu $6[\hat{X},\hat{Y}]_+$ zusammenfassen und weiter umformen:

$$2[\hat{X},\hat{Y}]_+ = \left[\hat{A}+\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]\right]_+ = \hat{A}[\hat{A},\hat{B}] + [\hat{A},\hat{B}]\hat{A} + \hat{B}[\hat{A},\hat{B}] + [\hat{A},\hat{B}]\hat{B} = [\hat{A}^2,\hat{B}] + [\hat{A},\hat{B}^2]$$

Eingesetzt ergibt sich $\hat{Z}$:

$$\begin{aligned}
\hat{Z} &= \frac{1}{12}\left(4\hat{A}^2\hat{B} + 6\hat{A}\hat{B}^2 - 2\hat{B}^2\hat{A} - 2[\hat{A},\hat{B}]_+(\hat{A}+\hat{B}) - 3[\hat{A}^2,\hat{B}] - 3[\hat{A},\hat{B}^2]\right)\\
&= \frac{1}{12}\left(4\hat{A}^2\hat{B} + 6\hat{A}\hat{B}^2 - 2\hat{B}^2\hat{A} - 2[\hat{A},\hat{B}]_+(\hat{A}+\hat{B}) - 3\hat{A}^2\hat{B} + 3\hat{B}\hat{A}^2 - 3\hat{A}\hat{B}^2 + 3\hat{B}^2\hat{A}\right)\\
&= \frac{1}{12}\left(\hat{A}^2\hat{B} + 3\hat{B}\hat{A}^2 + 3\hat{A}\hat{B}^2 + \hat{B}^2\hat{A} - 2[\hat{A},\hat{B}]_+(\hat{A}+\hat{B})\right)\\
&= \frac{1}{12}\left(\hat{A}^2\hat{B} + 3\hat{B}\hat{A}^2 + 3\hat{A}\hat{B}^2 + \hat{B}^2\hat{A} - 2(\hat{A}\hat{B}\hat{A} + \hat{A}\hat{B}^2 + \hat{B}\hat{A}^2 + \hat{B}\hat{A}\hat{B})\right)\\
&= \frac{1}{12}\left(\underbrace{\hat{A}^2\hat{B} + \hat{B}\hat{A}^2 - 2\hat{A}\hat{B}\hat{A}}_{[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]} + \underbrace{\hat{A}\hat{B}^2 + \hat{B}^2\hat{A} - 2\hat{B}\hat{A}\hat{B})}_{[\hat{B},[\hat{B},\hat{A}]]}\right)\\
\hat{Z} &= \frac{1}{12}\left(\left[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]\right] + \left[\hat{B},[\hat{B},\hat{A}]\right]\right)
\end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt:

$$\boxed{\begin{gathered}
\exp(\varepsilon\hat{A})\exp(\varepsilon\hat{B}) = \exp(\varepsilon\hat{X} + \varepsilon^2\hat{Y} + \varepsilon^3\hat{Z} + \mathcal{O}(\varepsilon^4))\\
\text{mit}\\
\begin{aligned}
\hat{X} &= \hat{A}+\hat{B}\\
\hat{Y} &= \frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\\
\hat{Z} &= \frac{1}{12}\left(\left[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]\right] + \left[\hat{B},[\hat{B},\hat{A}]\right]\right)
\end{aligned}
\end{gathered}}$$