Übungen zum Standardmodell der Teilchenphysik

5. Freier Propagator

Ein freies, nicht-relativistisches, quantenmechanisches Teilchen der Masse m bewege sich im 3-dimensionalen Raum. Berechnen Sie die Übergangsamplitude vom Punkt $\vec{x}$ zur Zeit $t = 0$ zum Punkt $\vec{x}'$ zur Zeit $t = T$ mit dem Pfadintegral-Formalismus.

Vergleichen Sie das Resultat mit dem Fall, bei welchem nur der klassische Pfad berücksichtigt wird.

Lösung

Die Übergangsamplitude nach dem Pfadintegralformalismus ist (gemäß Vorlesung) wie folgt definiert:

$$\langle \vec{x}' | \hat{U}(T,0) | \vec{x} \rangle = \int Dx \, \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i}{\Delta} \right)^2 - V(\vec{x}_i) \right] \right) \tag{1}$$

Für ein freies Teilchen ist das Potential $V(\vec{x}_i) = 0$. Das Funktionalintegral $\int Dx$ ist definiert als:

$$\int Dx = \lim_{\Delta \to 0} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta} \right)^{\frac{d}{2} N} \int d^d x_1 \, d^d x_2 \ldots d^d x_{N-1} \tag{2}$$

In unserem Beispiel ist $d = 3$. Wir zerlegen den Pfad von $\vec{x} = \vec{x}_0$ nach $\vec{x}' = \vec{x}_N$ in N Teilstücke. Im Limes betrachten wir den Übergang $\Delta \to 0$. Mit $t_N - t_0 = T = N \cdot \Delta$ ergibt sich natürlich auch $N \to \infty$. Damit gilt es zu lösen:

$$\langle \vec{x}' | \hat{U}(T,0) | \vec{x} \rangle = \lim_{\Delta \to 0} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta} \right)^{\frac{3}{2} N} \int d^3 x_1 \, d^3 x_2 \ldots d^3 x_{N-1} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \Delta \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i}{\Delta} \right)^2 \right) \tag{3}$$

Das eine Δ im Exponenten können wir vor die Summe ziehen. Die verbleibenden Faktoren vor der Summe fassen wir zusammen:

$$C = \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\Delta}$$

Offensichtlich ist $\Re\mathrm{e}(C) = 0$. Bei den N Integrationen sind jeweils nur einige Terme der Summation im Exponenten der Exponentialfunktion zu berücksichtigen. Für die erste Integration $\int d^3 x_1$ suchen wir daher die Lösung von

$$\int d^3 x_1 \exp\left(C(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)^2 - C(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 \right)$$

An dieser Stelle möchten wir als mathematischen Einschub die allgemeine Lösung einer Formel dieser Struktur einfügen. Sie gilt unter der Bedingung $\Re\mathrm{e}(\alpha) \leq 0$ und $\Re\mathrm{e}(\beta) \leq 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^3 y \, \exp\left[\alpha(x-y)^2 + \beta(z-y)^2 \right] = \left(\frac{-\pi}{\alpha + \beta} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} (z-x)^2 \right] \tag{4}$$

Die Bedingung ist offenbar erfüllt. Damit läßt sich die erste Integration ausführen:

$$\int d^3 x_1 \, \exp\left[C(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)^2 + C(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 \right] = \left(\frac{-\pi}{2C} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{C}{2} (\vec{x}_2 - \vec{x}_0)^2 \right] \tag{5}$$

Auch die nächste Integration möchten wir noch explizit ausführen:

$$\begin{aligned}\int d^3x_1\, d^3x_2\; e^{C(\vec{x}_1-\vec{x}_0)^2+C(\vec{x}_2-\vec{x}_1)^2+C(\vec{x}_3-\vec{x}_2)^2} &= \left(\frac{-\pi}{2C}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3x_2\, \exp\left[\frac{C}{2}(\vec{x}_2-\vec{x}_0)^2 + C(\vec{x}_3-\vec{x}_2)^2\right] \\ &= \left(\frac{-\pi}{2C}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{-\pi}{\frac{3}{2}C}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{\frac{1}{2}C^2}{\frac{3}{2}C}(\vec{x}_3-\vec{x}_0)^2\right] \\ &= \left(\frac{(-\pi)^2}{3C^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{C}{3}(\vec{x}_3-\vec{x}_0)^2\right] \qquad (6)\end{aligned}$$

Der Vergleich von (6) mit (5) liefert den rekursiven Charakter aller $N-1$ Integrationen. Das Gesamtintegral ergibt somit:

$$\begin{aligned}&\int d^3x_1 d^3x_2 \ldots d^3x_{N-1} \exp\left(C\sum_{i=0}^{N-1}(\vec{x}_{i+1}-\vec{x}_i)^2\right) \\ &\qquad = \left(\frac{(-\pi)^{N-1}}{((N-1)+1)C^{N-1}}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{C}{(N-1)+1}(\vec{x}_{(N-1)+1}-\vec{x}_0)^2\right] \\ &\qquad = \left(\frac{(-\pi)^{N-1}}{NC^{N-1}}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{C}{N}(\vec{x}_N-\vec{x}_0)^2\right] \qquad (7)\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis können wir nun in (3) einsetzen:

$$\begin{aligned}\langle\vec{x}'|\hat{U}(T,0)|\vec{x}\rangle &= \lim_{\Delta\to 0}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta}\right)^{\frac{3}{2}N} \int d^3x_1\ldots d^3x_{N-1}\exp\left(C\sum_{i=0}^{N-1}(\vec{x}_{i+1}-\vec{x}_i)^2\right) \\ &= \lim_{\Delta\to 0}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta}\right)^{\frac{3}{2}N}\left(\frac{(-\pi)^{N-1}}{NC^{N-1}}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{C}{N}(\vec{x}_N-\vec{x}_0)^2\right] \\ &= \lim_{\Delta\to 0}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta}\right)^{\frac{3}{2}(N-1)}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{(-\pi)}{C}\right)^{\frac{3}{2}(N-1)} \exp\left[\frac{C}{N}(\vec{x}_N-\vec{x}_0)^2\right] \\ &= \lim_{\Delta\to 0}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta N}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta}\right)^{\frac{3}{2}(N-1)}\left(\frac{(-\pi)2\hbar\Delta}{im}\right)^{\frac{3}{2}(N-1)} \exp\left[\frac{C}{N}(\vec{x}_N-\vec{x}_0)^2\right] \\ &= \lim_{\Delta\to 0}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta N}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{C}{N}(\vec{x}_N-\vec{x}_0)^2\right]\end{aligned}$$

Nun setzen wir wieder die Definition von $C = \frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\Delta}$ ein. Mit $T = \Delta N$ entfällt auch die Limesbildung. Auch ersetzen wir $\vec{x}_N = \vec{x}'$ sowie $\vec{x}_0 = \vec{x}$ und erhalten als Endergebnis:

$$\boxed{\langle\vec{x}'|\hat{U}(T,0)|\vec{x}\rangle = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2T}(\vec{x}'-\vec{x})^2\right]} \qquad (8)$$

Die klassische Betrachtung liefert die Wirkung:

$$S[x] = \int dt\, L(x,\dot{x}) = \int_0^T dt\,\frac{mv^2}{2} = T\frac{m}{2}v^2 = T\frac{m}{2}\frac{(x'-x)^2}{T^2} = \frac{m}{2}\frac{(x'-x)^2}{T}$$

Der Pfadintegralformalismus liefert also exakt das gleiche Ergebnis wie die klassische Betrachtung.

Es gibt noch einen alternativen Lösungsweg, der weitaus kürzer (und eleganter) ist:

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{x}' | \hat{U}(T,0) | \vec{x} \rangle &= \langle \vec{x}' | \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} T \right) | \vec{x} \rangle \\
&= \int d^3p \langle \vec{x}' | \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} T \right) | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x} \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \, \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} T \right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} p (\vec{x}' - \vec{x}) \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{2\pi\hbar m}{iT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(\vec{x}' - \vec{x})^2}{T} \right) \\
&= \left(\frac{m}{2\pi i\hbar T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(\vec{x}' - \vec{x})^2}{T} \right)
\end{aligned}
$$