

PRAKTIKUM FÜR FORTGESCHRITTENE

Leitfähigkeit und Hall-Effekt

Martin Mücke

Matthias Kreier

21. Dezember 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Ladungsträgerdichte	3
1.2 Elektrische Leitfähigkeit	3
1.3 Hall-Effekt	4
1.4 Meßprinzip und Versuchsaufbau	4

2 Auswertung

2.1 Magnetfeld	5
2.2 Temperaturabhängigkeit von σ und R_H	6
2.3 Ladungsträgerkonzentration im Gebiet der Störstellenerschöpfung	8
2.4 Abschätzung der Breite der Energielücke	7
2.5 Beweglichkeit und Impulsrelaxationszeit im Gebiet der Störstellenerschöpfung	9
2.6 Bestimmung des Beweglichkeitsverhältnisses b	10

A Versuchsaufbau

B Meßprotokoll

1 Einleitung

Allgemein bezeichnet man einen Stoff, dessen spezifische Leitfähigkeit zwischen der von Metalle und der von Isolatoren liegt, als einen Halbleiter. Die spezifische Leitfähigkeit nimmt also Werte zwischen 10^{-9} und $10^2 (\Omega\text{cm})^{-1}$ an. Etwas besser werden Halbleiter durch ihre Eigenschaft definiert, bei tiefen Temperaturen zu isolieren, bei hohen Temperaturen jedoch eine meßbare Leitfähigkeit zu besitzen. Diese elektronische Leitfähigkeit der Halbleiter geht auf ihre wohldefinierte und durch Stromfluß unveränderliche chemische Zusammensetzung sowie auf physikalische Eingriffe von außerhalb zurück.

Seit der Entwicklung des Energiebändermodells der Quantenmechanik wird diese elektronische Leitfähigkeit auf die kovalente Bindung der Kristallbausteine zurückgeführt. Bindungselektronen der Atome können durch Energiezufuhr oberhalb einer Schwellenenergie (Anregung durch Wärme, Licht, X-Ray, ...) freigesetzt werden und Ladungstransport übernehmen.

1.1 Ladungsträgerdichte

Zur Beschreibung eines Halbleiters interessiert vor allem seine Ladungsträgerdichte. Aus dem Bändermodell erhält man mit der Energie oberen Kante des Valenzbandes E_V und der unteren Kante des Leitungsbandes E_L (siehe [2] Seite 285) folgende allgemein gültige Beziehung ($E_g = E_L - E_V$):

$$n \cdot p = N_{eff}^L \cdot N_{eff}^V e^{-\frac{E_g}{kT}} = 4 \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^3 (m_n^x m_p^x)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E_g}{kT}}$$

Man nennt diese Beziehung auch die Näherung der Nichtentartung, sie gilt für reine oder intrinsische sowie schwach dotierte Halbleiter. Hierbei sind N_{eff} die temperaturabhängigen effektiven Zustandsdichten des Leitungsbandes (L) bzw. des Valenzbandes (V).

Als intrinsische Halbleiter bezeichnet man einen Halbleiter, bei dem 'freie' Elektronen und Löcher nur durch elektronische Anregungen aus dem Valenzband ins Leitungsband zustande kommen. In diesem Fall gilt dann $n=p$. In der Realität sind alle Halbleiter zu einem gewissen Grad 'verunreinigt' oder dotiert. Diese Verunreinigungen oder Störstellen können entweder von Donatoren gebildet werden, die ein zusätzliches Valenzelektron besitzen, oder von Akzeptoren, die ein Elektron aufnehmen können.

Man spricht bei niedrigen Temperaturen von der *Störstellenreserve*, wenn noch genügend Donatoren ihr Valenzelektron behalten (n-Halbleiter) bzw. viele Akzeptoren noch kein Elektron aufgenommen haben (p-Halbleiter). Bei größeren Temperaturen sind alle Donatoren und Akzeptoren ionisiert, d. h. $n \approx N_D = \text{const.}$ bzw. $p \approx N_A = \text{const.}$ Diesen Zustand nennt man *Störstellenerschöpfung*.

In noch höheren Temperaturbereichen (relativ, abhängig vom Halbleiter und der Dotierung) verhält sich der Halbleiter wie ein intrinsischer Halbleiter und die *Eigenleitung* setzt ein.

1.2 Elektrische Leitfähigkeit

Allgemein kann man für die elektrische Leitfähigkeit schreiben:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p) \quad (1)$$

Hierbei sind \bar{U}_n und \bar{U}_p die Beweglichkeiten der Elektronen bzw. Löcher und n bzw. p die entsprechenden Volumenkonzentrationen der Ladungsträger.

Die Beweglichkeit ist eine temperaturabhängige Größe. Durch die Streuung der Ladungsträger an akustischen Phononen (in Elementhalbleitern, in Verbindungshalbleitern überwiegend an optischen Phononen, siehe [1] Seite 497) verhält sich die Beweglichkeit daher $\mu_{ph} \propto T^{-3/2}$. Ebenso werden die Ladungsträger allerdings an den ionisierten Störstellen gestreut, das beeinflusst die Beweglichkeit (siehe [2] Seite 295) wie folgt: $\mu_{st} \propto T^{+3/2}$.

Die Gesamtbeweglichkeit ergibt sich durch die *Matthiessen-Regel*:

$$\frac{1}{\mu_{ges}} = \frac{a}{\mu_{ph}} + \frac{b}{\mu_{st}} = aT^{3/2} - bT^{-3/2} \quad (2)$$

Offensichtlich wird der Streuvorgang mit der geringsten Beweglichkeit dominieren. Gemäß [2] Seite 295 überwiegt bei niedrigen Temperaturen die Streuung an ionisierten Störstellen, bei höheren Temperaturen hingegen die Streuung an Phononen.

1.3 Hall-Effekt

Der grundsätzlich Aufbau für den Halleffekt besteht aus einem elektrischen Feld \mathbf{E} , das einen Strom $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ in dessen Richtung verursacht. Durch ein homogenes Magnetfeld \mathbf{B} senkrecht dazu wirkt die Lorentzkraft $\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ auf die Ladungsträger. Die Ladung verteilt sich um, das Hall-Feld entsteht. Im stationären Zustand (kein Strom senkrecht zu \mathbf{E} und \mathbf{B}) kompensiert dieses Feld die Lorentzkraft. Man kann es als Hallspannung U_H messen. Es gilt:

$$U_H = R_H \frac{B}{d} I \quad , \quad \vec{j} \perp \vec{B} \quad (3)$$

wobei d die Dicke der Probe in Richtung \mathbf{B} ist. Eine weitere wichtige Beziehung für die Hall-Konstante R_H in Verbindung mit den Ladungsträgern (Konzentration p , Ladung q) lautet:

$$R_H = \frac{1}{q \cdot p} \quad , \quad |q| = e \quad (4)$$

Aus dem Vorzeichen von R_H läßt sich also herleiten, ob überwiegend positiv geladene Löcher oder Elektronen zum Leitungsprozeß beitragen.

In gemischten Leitern mit Elektronen und Löchern gilt außerdem (aus [2] Seite 299):

$$R_H = \frac{1}{e} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} \quad (5)$$

1.4 Meßprinzip und Versuchsaufbau

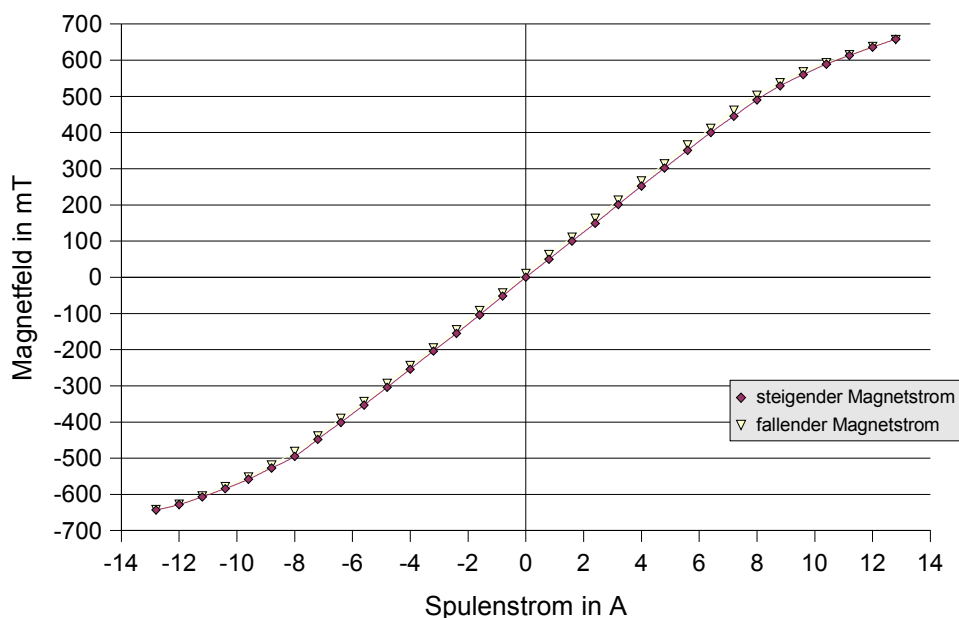
Wir haben unsere Meßprobe im Kryostaten zwischen den beiden Polschuhen des Elektromagneten senkrecht zum Magnetfeld plaziert. In der äußeren Kammer wurde ein Isolationsvakuum mit einer Turbomolekularpumpe erzeugt. Weiterhin wurde der Probenraum selbst evakuiert und mit Helium (als Wärmetauscher) gefüllt. Die Kühlung der Probe erfolgte dann indirekt durch 2 Liter flüssigen Stickstoff. Indem die Gasphase des Stickstoffes abgepumpt wurde, konnten Temperaturen unterhalb des Gefrierpunktes von Stickstoff erzeugt werden. Die Erhitzung der Probe erfolgte durch einen eingebauten Heizwiderstand, der mit einer Temperaturrampe angesteuert wurde.

2 Auswertung

Die gesamte Messung wurde durch den Computer protokolliert, die Meßwerte in eine Datei geschrieben. Während des Abkühlungsprozesses löste sich ein Kontakt an der Probe bei einer Temperatur von ca. 150K. Bis zur Feststellung und Behebung des Fehlers war die Probe bereits auf 72K abgekühlt. In diesem Interwall sind die Meßwerte also unbrauchbar. In den anderen Bereichen haben wir die Meßwerte der Temperaturrampe mit denen der Abkühlungskurve verglichen, im Rahmen der Meßfehler stimmen sie miteinander überein. Daher haben wir zur Auswertung nur die Meßwerte der Erwärmungskurve herangezogen.

2.1 Magnetfeld

Zunächst mußte der verwendete Elektromagnet kalibriert werden. In der später aufzunehmenden Meßreihe liegt uns nur ein dem Erregerstrom proportionale Spannung vor, für die Auswertung des Hall-Effektes ist allerdings der Wert des Magnetfeldes B von Interesse. Die Abhängigkeit $B=B(I_M)$ ist nachfolgend graphisch dargestellt:



Die Annäherung der Funktion $B=B(I_M)$ durch eine lineare Funktion ist offensichtlich nur im Bereich von -7 A bis 7 A sinnvoll. Für unsere Messung haben wir hingegen einen konstanten Strom von $\pm 12\text{ Ampere}$ verwendet, bei diesem Wert geht das erzeugte Magnetfeld bereits in die Sättigungsmagnetisierung über. Das erweist sich allerdings auch als vorteilhaft. Wie aus dem Diagramm ersichtlich ist, besitzt der verwendete Magnet nur eine geringe Hysterese. Im Bereich der Sättigungsmagnetisierung fallen die beiden Magnetfeldkennlinien für steigenden bzw. fallenden Magnetstrom zusammen. Daher kann der Wert des Magnetfeldes B direkt aus dem Wert des Erregerstromes berechnet werden.

In unserer Meßdatei wurde allerdings nicht der Meßwert des Erregerstromes festgehalten, sondern ein diesem Strom proportionale Spannung. Mittels Geradenausgleich für eine Funktion der Form $y=ax$ erhalten wir: $a=(2,5984\pm 0,0003)$. Der Meßwert für das Magnetfeld hat über die gesamte Messung den Betrag von $x=(4,6191\pm 0,001)\text{ V}$, damit war der Betrag des Erregerstromes während der gesamten Meßzeit über bei $I_M = (12,002\pm 0,002)\text{ A}$. Aus der Meßwerttabelle erhalten wir zu einem Erregerstrom von 12 Ampere ein Magnetfeld von $B=(632\pm 5)\text{ mT}$. Diesen Wert verwenden wir für unsere Berechnungen den Hall-Effekt betreffend.

2.2 Temperaturabhängigkeit von σ und R_H

Um den spezifischen Leitwert eines Materials zu bestimmen, mißt man den Widerstand einer Probe und berechnet aus den bekannten Kenndaten der Probe wie Länge, Breite und Höhe den entsprechenden Wert. Wir haben die Probe TH368-45 untersucht. Sie besteht gemäß dem Datenblatt aus $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}$ mit $x=0,203$. Die mechanischen Abmessungen betragen $l=1,80$ mm, $b=1,80$ mm und $d=0,50$ mm.

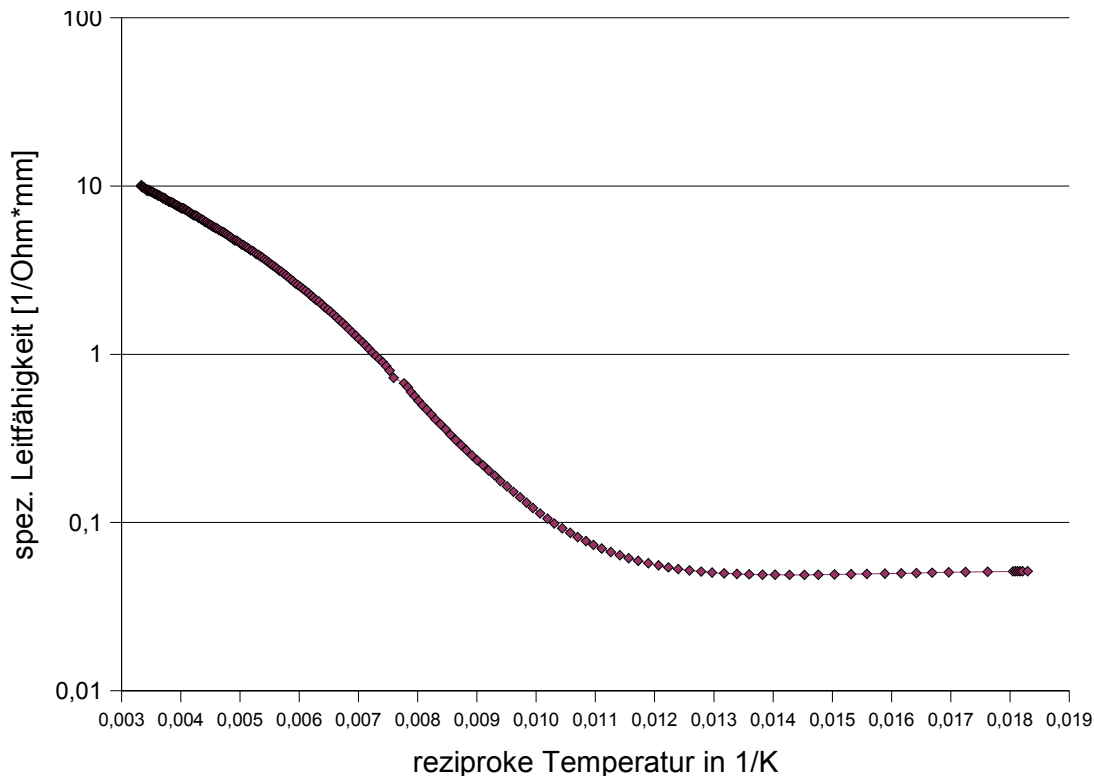
Eine einfache Widerstandsmessung (z.B. mit einem Multimeter) führt allerdings zu extremen Meßwertverfälschungen, da der Betrag der Kontaktwiderstände den Probenwiderstand bei weitem übersteigt. Man nutzt daher folgende Meßmethode: Man mißt den durch eine Konstantstromquelle verursachten Spannungsabfall über der Probe. In unserem Fall verwendeten wir einen Probenstrom von $I_p=(2,000\pm 0,002)$ mA, der durch eine Konstantstromquelle hp 6177C erzeugt wurde. Um nun den Meßfehler, bedingt durch Kontaktspannungen, zu eliminieren, haben wir noch den Spannungsabfall für die negative Stromrichtung gemessen und den resultierenden die reale Spannung ohne Kontaktspannungen nach der folgenden Formel berechnet:

$$U_\rho = \frac{U_{+I} - U_{-I}}{2}$$

Der spezifische Leitwert berechnet sich dann nach der folgenden Formel:

$$\sigma = \frac{I}{U_\rho} \frac{l}{b \cdot d}$$

In der folgenden grafischen Darstellung haben wir die spezifische Leitfähigkeit logarithmisch gegen die reziproke Temperatur aufgetragen:



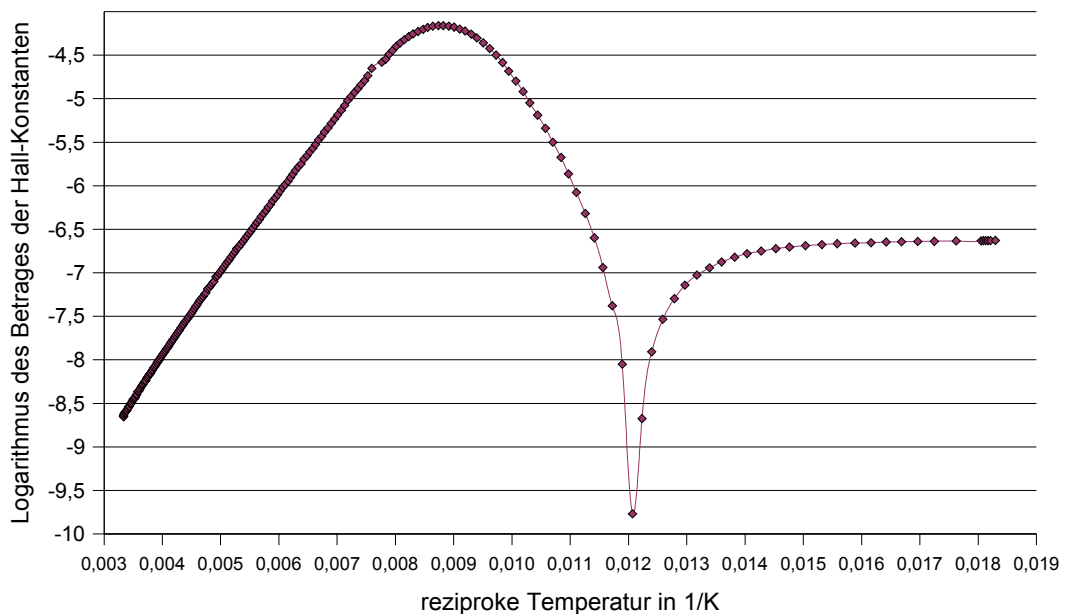
Die kleine Unregelmäßigkeit im Graphen bei einer Temperatur von 130K stammt aus der Umschaltung des Regelbereiches des Heizelementes (von heater low auf heater high).

Bis zu einer Temperatur kleiner 80 K liegt bei dem von uns untersuchten Probe die Leitung durch Störstellen vor, allerdings bereits im Bereich der Störstellenerschöpfung. Das wird durch das recht deutlich ausgeprägte Plateau deutlich. Die leicht abfallende Kurve läßt sich mit den häufiger werdenden Stößen der Ladungsträger mit akustischen Phononen erklären. Daher sinkt die Leitfähigkeit leicht ab (siehe später: abnehmende Beweglichkeit). Mit steigender Temperatur (also weiter links im Diagramm) geht der Halbleiter dann in den Bereich der Eigenleitung über. Kompensationseffekte wie beim Hall-Koeffizienten treten nicht auf.

Den Hall-Koeffizienten R_H können wir aus den bekannten Meßwerten bestimmen, indem wir Formel (3) aus der Einleitung passend umstellen:

$$R_H = \frac{d}{I \cdot B} U_H$$

mit $d=0,50$ mm, $I_p=(2,000 \pm 0,002)$ mA und $B=(632 \pm 5)$ mT erhalten wir folgenden Kurvenverlauf $\ln |R_H|=f(1/T)$:



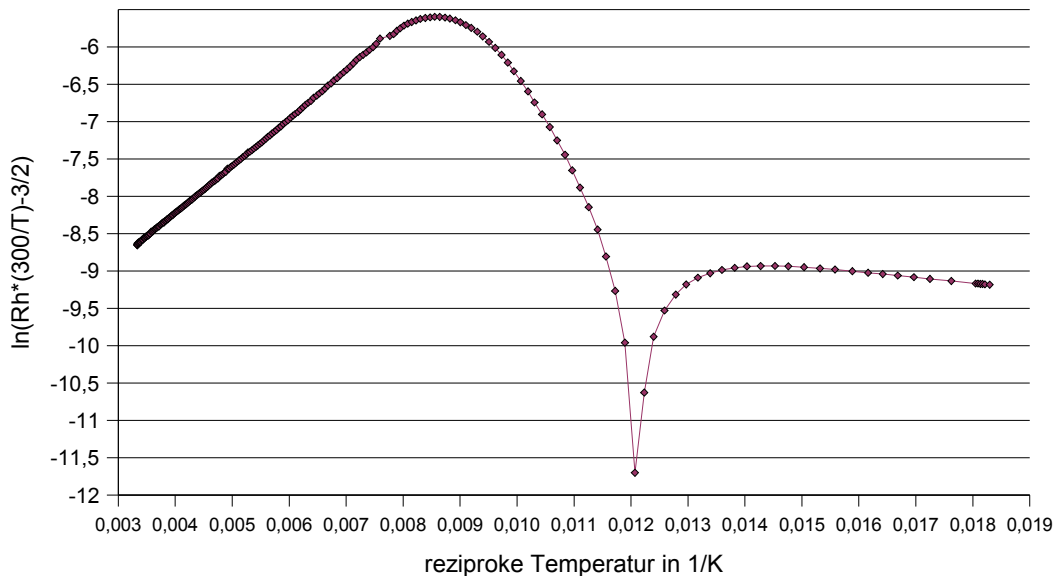
Die Betragsstriche sind notwendig, da es bei einer Temperatur von 82K zu einem Vorzeichenwechsel der Hallspannung und damit auch des Hall-Koeffizienten kommt.

Auch für den Hall-Koeffizienten zeigt sich unterhalb einer Temperatur von 80K die Störstellenerschöpfung in einem weitgehend konstantem Verlauf des Widerstandswertes. Mit dem Beginn der Eigenleitung wurden immer mehr Elektronen aus dem Valenzband in das Leitungsband gehoben. In diesem können sie sich besser und ungehinderter bewegen. Diese thermischen Elektronen überwiegen im Bereich der Eigenleitung, der Beitrag der Löcher wird vernachlässigbar.

Der Umstand, daß es überhaupt zu einem Vorzeichenwechsel in der Hallspannung kommt, ist ein Zeichen dafür, daß es sich bei der von uns untersuchten Probe um ein p-leitendes Material handelt. Da sich positiv geladene Löcher im elektrischen Feld genau entgegengesetzt zu Elektronen bewegen, werden sie durch die Lorentzkraft in dieselbe Richtung beschleunigt wie Elektronen. Allerdings bauen sie (aufgrund der entgegengesetzten Ladung) ein von der Polarisierung zu den Elektronen entgegengesetztes Hall-Feld auf.

Mit dem Übergang zur Eigenleitung tragen immer mehr Elektronen zum Ladungstransport bei und bauen ein eigenes Hall-Feld auf. Bei ca. 82 K kompensieren sich die beiden Felder, die Hallspannung geht gegen Null. In unseren Betragsdiagrammen ist diese Stelle an dem scharfen Einschnitt zu erkennen.

Für die spätere Betrachtung ist noch der nachfolgend graphisch dargestellte funktionale Zusammenhang $\ln [R_H \cdot (300/T)^{-3/2}] = f(1/T)$ interessant:



2.3 Ladungsträgerkonzentration im Gebiet der Störstellenerschöpfung

Aus der umgestellten Formel (4) erhalten wir bei $T=77\text{K}$ die Ladungsträgerkonzentration:

$$p = \frac{1}{q \cdot R_H}$$

Als Rechenwert für R_H um 77K haben wir mittels linearer Regression aus den Nachbarwerten erhalten: $R_H = (772 \pm 8) \text{ cm}^3/\text{As}$. Damit ergibt sich für die Ladungsträgerkonzentration:

$$p = (8,09 \pm 0,08) 10^{15} \text{ cm}^3$$

Die Fehler ergaben sich gemäß FFG aus dem Fehler für U_H , I und B .

2.4 Abschätzung der Breite der verbotenen Zone

Mittels Geradenausgleich haben wir den Anstieg für den annähernd linearen Teil der Graphen $\ln \sigma = f(1/T)$ und $\ln [R_H \cdot (300/T)^{-3/2}] = f(1/T)$ oberhalb 135K bis zu 297K bestimmt. Aus dem Anstieg dieser Eigenleitungsgeraden lässt sich die Größe der Energielücke E_g berechnen.

Diese Möglichkeit der Berechnung ergibt sich aus dem Zusammenhang: $\ln \sigma \propto \frac{E_g}{kT}$

Aus den Daten für den Leitwert σ erhalten wir den Anstieg $a = (557 \pm 5) \text{ K}$, aus den Daten für R_H ergibt sich $a = (663,2 \pm 0,7) \text{ K}$. Durch Koeffizientenvergleich findet man: $E_g = 2\text{ka}$.

aus Leitfähigkeit: $E_g = (0,0960 \pm 0,0009) \text{ eV}$
 aus Hall-Koeffizienten: $E_g = (0,1143 \pm 0,0001) \text{ eV}$

In [3] wird auf Seite 273 eine Formel von Hansen, Schmid und Casselman zitiert, nach der man die Bandlücke direkt aus den Kenndaten des Kristalles und der Temperatur berechnen kann. Die Formel lautet:

$$E_g = -0,302 + 1,93 x + 5,35 * 10^{-4} T (1 - 2 x) - 0,810 x^2 + 0,832 x^3$$

Das Dotierungsverhältnis unserer Probe liegt bei $x=0,203$ und für eine mittlere Temperatur von 220K liefert diese Formel $E_g=0,13328$ eV . Der Mittelwert unserer Ergebnisse liegt mit $E_g=0,105$ eV jedoch ca. 20% vom theoretischen Wert entfernt.

Der Geradenausgleich vermittelt eine unrealistische Genauigkeit für unsere Ergebnisse, besonders denjenigen aus dem Hall-Koeffizienten. Gemäß Fehlerfortpflanzungsgesetz müsste man eine Fehler von 2% ansetzen, aus dem Mittelwert erhält man damit das Ergebnis:

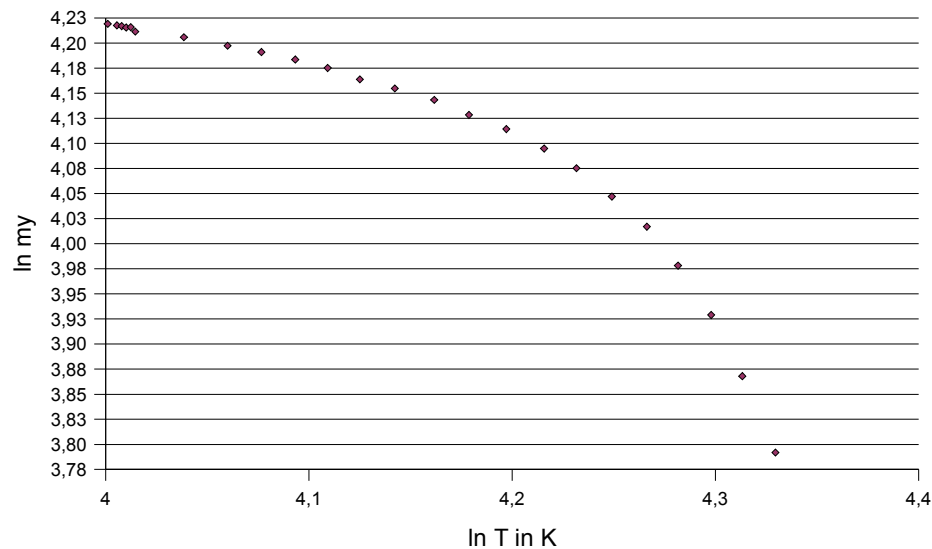
$$E_g = (0,105 \pm 0,002) eV$$

2.5 Beweglichkeit und Impulsrelaxationszeit im Gebiet der Störstellenerschöpfung

Im Bereich der Störstellenerschöpfung gilt für einen p-Halbleiter $p \gg n$. Damit vereinfachen sich die Formeln (1) und (5) zu:

$$R_H = \frac{1}{e \cdot p} \quad \text{und} \quad \sigma = e p \mu_p \quad \Rightarrow \quad \mu_p = \sigma R_H \quad (6)$$

Mit dieser Gleichung wurde aus unseren Meßdaten die Beweglichkeit μ_p berechnet, nachfolgend die graphische Darstellung:



In einem Bereich von 55 K bis 70 K scheint es einen linearen Zusammenhang zwischen der Beweglichkeit und der Temperatur zu geben, und zwar der Form $\mu \propto T^{-a}$ mit $a > 0$. Daher wird in diesem Temperaturbereich die Beweglichkeit der Ladungsträger hauptsächlich durch die Streuung an akustischen Phononen bestimmt (siehe 1.2 der Einführung).

Den expliziten Wert der Beweglichkeit der Majoritätsladungsträger bei 77K berechnen wir wiederum nach Formel (6), mit dem bereits berechneten $R_H(77K) = (772 \pm 8) \text{ cm}^3/\text{As}$ und dem ebenso gemittelten Wert $\sigma = (50,5 \pm 0,6) 1/\Omega\text{m}$.

Damit lautet unser Ergebnis:

$$\mu = (390 \pm 9) \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

Für die Impulsrelaxationszeit gilt $\tau = m\mu/e$, da in unserem Fall „Löcherleitung“ vorliegt, ist mit m die uns unbekannt Masse der Löcher gemeint. Wir setzen sie einfach mit einem Vielfachen der Elektronenmasse an, also $m = \alpha m_e$; $\alpha > 0$. Aus den bereits berechneten Werten ergibt sich damit:

$$\tau = \alpha (2,22 \pm 0,05) 10^{-13} \text{ s}$$

2.6 Bestimmung des Beweglichkeitverhältnisses b

Aus unseren Meßdaten mit Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$R_{\text{Hext}} = (15600 \pm 200) \text{ cm}^3/\text{As}$$

$$R_{\text{HS}} = (1320 \pm 20) \text{ cm}^3/\text{As}$$

Damit ergibt sich aus der Gleichung:

$$b = 1 - 2 \frac{R_{\text{Hext}}}{R_{\text{HS}}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{R_{\text{HS}}}{R_{\text{Hext}}}} \right) \quad (7)$$

$$b = \frac{\mu_n}{\mu_p} = -(45 \pm 1)$$

Herleitung von Formel (7):

Im Fall von zwei Ladungsträgersorten gilt allgemein Formel (5). Im Sättigungsbereich ist $p \gg n$, damit vereinfacht sich diese Formel mit $p = N_A$ zu $R_{\text{HS}} = (eN_A)^{-1}$. Zur Berechnung der Extremalstelle setzt man an $p = N_A + n$. Notwendige Bedingung für eine Extremalstelle ist natürlich:

$$\frac{dR_H}{dT} = \frac{\partial R_H}{\partial n} \cdot \frac{dn}{dT} = 0 \quad \text{und mit} \quad \frac{dn}{dT} \neq 0 \quad \text{leitet man eine Bedingung für } n \text{ ab.}$$

Man erhält: $n = N_A / (b - 1)$. Setzt man dies nun in die modifizierte Gleichung (5) ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Bedingung für R_{HS} die Formel:

$$-4b \frac{R_{\text{Hext}}}{R_{\text{HS}}} = (b - 1)^2 \quad \text{Die Lösung dieser quadr. Gleichung ist gerade durch (7) gegeben.}$$

Literatur

- [1] Bergmann, Schaefer, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band 6, Verlag Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992
- [2] Ibach, Lüth, *Festkörperphysik*, Springer-Verlag, Berlin, 1990
- [3] W. M. Higgins, G. N. Pultz, R. G. Roy, R. A. Lancaster, J. L. Schmit, *Vakuum Science and Technology A7*(1989), 271-275: *Standard relationships in the properties of Hg_{1-x}Cd_xTe*