

Fortgeschrittenenpraktikum „Plasmainterferometrie“

Martin Mücke
Matthias Kreier

18. Juni 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Messprinzip	2
2	Grundlagen	2
2.1	Plasmafrequenz	2
2.2	Berechnung der Plasmadichte	3
2.3	Rogowski-Spule	3
3	Auswertung	4
3.1	Berechnung des Ionisationsgrades	7
3.2	Zeitliche Entwicklung der Plasmadichte	7
3.3	Diskussion der Messergebnisse	8

1 Einleitung

Unter einem Plasma versteht man den ionisierten Zustand eines Gases, das heißt es koexistieren positiv geladene Atomrümpfe (Ionen) und Elektronen. Die Erzeugung des Plasmazustandes erfolgt dabei in der Regel durch thermische Ionisation („heißes Plasma“) oder Elektronenstoß-Ionisation (\rightarrow Gasentladung). Die wesentliche Kenngröße zur Charakterisierung dieses Zustandes ist die Plasmadichte n , die bei Einfachionisation gleichbedeutend mit der Elektronendichte ist.

1.1 Messprinzip

Bisher sind die verschiedensten Verfahren entwickelt worden, um die Dichte eines Plasmas zu bestimmen. Möglich wären z.B. Sondenmessungen, spektroskopische Methoden, oder Thomsonstreuung. In diesem Versuch soll aber das von *Ashby* und *Jephcott* [1] entwickelte interferometrische Verfahren zur Anwendung kommen, das die zu untersuchende Plasmaentladung als Fabry-Perot-Interferometer in den Resonator eines He-Ne-Lasers einbringt. Bei Variation der Plasmadichte ändert sich die optische Weglänge und damit die Güte des Resonators. Die Verwendung eines He-Ne-Lasers ist damit begründet, dass zwei Linien (bei $0.6328\mu m$ und $3.39\mu m$) vom gleichen oberen Niveau $3S_2$ ausgehen, sich damit gegenseitig beeinflussen. Die Modulation der für die Dichtebestimmung relevanten Linie im infraroten Bereich moduliert komplementär die rote Linie, da es sich um zwei konkurrierende Prozesse handelt. Führt die Änderung der optischen Weglänge im Interferometer zu einer teilweisen Auslöschung der infraroten Linie im Laserresonator, so verstärkt sich die Intensität der roten Linie, die mit einer Photodiode leicht zu detektieren ist.

Die unterschiedliche Wirkung beider Wellen läßt sich sehr einfach demonstrieren, indem man eine planparallele Scheibe aus Germanium (transparent für die infrarote Linie) bzw. ein *Festalon* aus SiO_2 (durchlässig nur für $\lambda = 632.8nm$) in den Strahlengang zwischen Interferometer und Laserresonator bringt. Im ersten Fall ist auf dem Schirm des Speicheroszilloskops, das an die Photodiode angeschlossen ist, eine deutliche Modulation zu erkennen, im zweiten Fall jedoch nicht. Die Wechselwirkung der elektromagnetischen Wellen mit dem Plasma wird also hauptsächlich von der infraroten Linie getragen (Begründung siehe [2, S.3]).

2 Grundlagen

2.1 Plasmafrequenz

Das Verhalten der freien Ladungsträger in einem Plasma wird dominiert durch die Coulombwechselwirkung zwischen Elektronen und Ionen. Vernachlässigt man die Bewegung der Atomrümpfe aufgrund der größeren Trägheit gegenüber den Elektronen, so erhalten wir folgende eindimensionale Bewegungsgleichung

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -E e \quad (1)$$

wobei für die elektrische Feldstärke gilt

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\rho}{\epsilon_0} x. \quad (2)$$

Aus (1) folgt dann unter Ausnutzung von $\rho = e n_e$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} x \quad (3)$$

die Bewegungsgleichung eines linearen, ungedämpften, harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}}. \quad (4)$$

(4) nennt man auch die Plasmafrequenz, welche die Oszillation der Elektronen um Ladungsinhomogenitäten beschreibt. Strahlt man eine elektromagnetische Welle mit einer niedrigeren Frequenz ($\omega < \omega_p$) ein, so wird die Welle vollständig reflektiert. Oberhalb von ω_p wird das Plasma für die Welle durchlässig.

2.2 Berechnung der Plasmadichte

Von entscheidender Bedeutung für die Modulation der elektromagnetischen Welle an der Plasmaentladungsröhre ist die Phasendifferenz der interferierenden Teilwellen. Aus der bekannten Beziehung

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta s}{\lambda} \quad (5)$$

ergibt sich als Phasendifferenz zwischen Referenzstrahl und dem durch das Plasma geführten Strahl

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^{l'} (N_{vac} - N(z)) dz \cong \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^{l'} \left(1 - \left(1 - \frac{n_e}{2n_c}\right)\right) dz. \quad (6)$$

Benutzt man aus [2, S.6] weiterhin

$$n_c = \frac{\omega^2 n_e}{\omega_p^2(n_e)}, \quad (7)$$

so erhalten wir unter Verwendung von Gl. (4)

$$\varphi = \frac{\pi}{\lambda} \int_0^{l'} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 dz = \frac{\lambda e^2}{4\pi c^2 \varepsilon_0 m_e} \int_0^{l'} n_e(z) dz. \quad (8)$$

Dabei ist $l' = 2l$ und $n_e(z)$ annähernd konstant. Dann bleibt letztendlich

$$\varphi = \frac{\lambda e^2 l}{2\pi c^2 \varepsilon_0 m_e} n_e. \quad (9)$$

Die Zahl der Interferenzstreifen, die in direkter Beziehung zur Phasenänderung steht, beträgt

$$N_f = \frac{\varphi}{2\pi} \quad (10)$$

und definiert damit gleichzeitig die Plasmadichte

$$n_e = \frac{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_e}{\lambda e^2 l} N_f = 1.012 \cdot 10^{21} [\text{m}^{-3}] N_f. \quad (11)$$

2.3 Rogowski-Spule

Die technische Realisierung der Plasmaentladung erfolgt über einen aufzuladenden Kondensator, der nach Erreichen der Zündspannung einer Funkenstrecke über das Plasmarohr entladen wird. Die Messung des Entladestroms geschieht auf indirektem Weg mit Hilfe einer *Rogowski-Spule*, die um das

Zuführungskabel zum Plasma gelegt ist. Eine Änderung der Stromstärke I und gleichzeitig des resultierenden Magnetfeldes $B(r)$ um den Leiter führt zu einer Änderung des magnetischen Flusses durch die Spule. Zwischen den Spulenden wird demnach eine Spannung

$$U_{ind} = -N_w \frac{d\Phi}{dt} = -N_w \int_A \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{F} = -N_w \int_{r_i}^{r_a} \frac{dB(r)}{dt} l dr \quad (12)$$

induziert. l entspricht darin der Länge, r_i bzw. r_a dem Innen-/Außenradius und N_w der Windungszahl der Spule. Das zylindersymmetrische Magnetfeld $B(r)$ eines stromdurchflossenen geraden Leiters beträgt

$$B(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi r}, \quad (13)$$

so dass wir folgenden Ausdruck erhalten:

$$U_{ind} = \frac{\mu_o N_w l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right) \frac{dI}{dt}. \quad (14)$$

Die uns interessierende Größe I erhalten wir nur durch Integration der Formel (14). Physikalisch gelingt uns dies mit einem RC -Glied (Tiefpass), an dessen Kondensator wir die Spannung messen. Für die Kondensatorspannung gilt nach [3]

$$U_c = \frac{1}{C} \int I_c dt \cong \frac{1}{RC} \int U_{ind} dt \quad (15)$$

Einsetzen von (14) in Gleichung (15) und umformen nach I ergibt schließlich die Stromstärke des Entladestroms

$$I = \frac{2\pi CR}{\mu_o N_w l \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} U_c = 5763.8 \left[\frac{\text{A}}{\text{V}}\right] \cdot U_c \quad (16)$$

3 Auswertung

Anhand der aufgenommenen Interferogramme (Messkurven) haben wir zu vorgegebenen Entladeströmen die Zahl der Intensitätsmaxima bestimmt. Dabei ergibt sich die relative Messunsicherheit des Entladestroms (identisch mit $u_{U_c}^{rel}$) aus dem Ablesefehler am Speicheroszillographen und einem angenommenen systematischen Fehler von rund 0.5% :

$$\frac{u_I}{I} = \frac{u_{U_c}}{U_c} = \pm \frac{1}{U_c} (\sqrt{0.4^2 + 0.4^2} + 0.005 \cdot U_c).$$

Trotzdem wir versucht haben, den in [1, Fig. 2,3] dargestellten Verlauf qualitativ wiederzufinden, ist für die Zahl der Maxima N_f ein relativer Fehler von 20% anzusetzen, weil die Auswertung der Messkurven stark subjektiven Einschätzungen unterliegt. Nach Gl. (11) lässt sich daraus die Elektrodendichte n_e und anschließend aus Gl. (4) die Plasmafrequenz ω_p bestimmen. Für die Berechnung des Brechungsindex \hat{N} ist dann [2, S.6]

$$\hat{N} = \sqrt{1 - \frac{n_e}{n_c}} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{n_e}{n_c} \quad \text{mit } n_c = \frac{4\pi^2 \epsilon_o m_e c^2}{\lambda^2 e^2} = 9.7 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} \quad (17)$$

zu verwenden. Mit Hilfe des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz erhält man dazu die entsprechenden Messunsicherheiten:

$$u_{n_e}^{rel} = u_{N_f}^{rel} + u_{l}^{rel} \cong 20\% \quad , \quad u_{\omega_p} = \sqrt{\frac{e^2}{m_e \epsilon_o} \frac{1}{2\sqrt{n_e}}} u_{n_e} \quad , \quad u_{\hat{N}} = \frac{1}{2\hat{N}} \frac{1}{n_c} u_{n_e}.$$

Argon					Helium				
I [A]	N_f	n [10^{21}m^{-3}]	ω_p [10^{12}Hz]	$1-\hat{N}$ [10^{-5}]	I [A]	N_f	n [10^{21}m^{-3}]	ω_p [10^{12}Hz]	$1-\hat{N}$ [10^{-5}]
72 ± 3	4	4.0 ± 0.8	3.6 ± 0.4	2.1 ± 0.4	74 ± 3	3	3.0 ± 0.6	3.1 ± 0.3	1.5 ± 0.3
73 ± 3	3	3.0 ± 0.6	3.1 ± 0.3	1.5 ± 0.3	75 ± 3	3	3.0 ± 0.6	3.1 ± 0.3	1.5 ± 0.3
73 ± 3	4	4.0 ± 0.8	3.6 ± 0.4	2.1 ± 0.4	74 ± 3	3	3.0 ± 0.6	3.1 ± 0.3	1.5 ± 0.3
133 ± 4	8	8.1 ± 1.6	5.1 ± 0.5	4.2 ± 0.8	136 ± 4	4	4.0 ± 0.8	3.6 ± 0.4	2.1 ± 0.4
134 ± 4	7	7.1 ± 1.4	4.8 ± 0.5	3.7 ± 0.7	131 ± 4	4	4.0 ± 0.8	3.6 ± 0.4	2.1 ± 0.4
131 ± 4	7	7.1 ± 1.4	4.8 ± 0.5	3.7 ± 0.7	136 ± 4	4	4.0 ± 0.8	3.6 ± 0.4	2.1 ± 0.4
191 ± 4	9	9.1 ± 1.8	5.4 ± 0.5	4.7 ± 0.9	198 ± 4	7	7.1 ± 1.4	4.8 ± 0.5	3.7 ± 0.7
191 ± 4	9	9.1 ± 1.8	5.4 ± 0.5	4.7 ± 0.9	203 ± 4	7	7.1 ± 1.4	4.8 ± 0.5	3.7 ± 0.7
191 ± 4	8	8.1 ± 1.6	5.1 ± 0.5	4.2 ± 0.8	198 ± 4	7	7.1 ± 1.4	4.8 ± 0.5	3.7 ± 0.7
288 ± 5	11	11.1 ± 2.2	6.0 ± 0.6	5.7 ± 1.1	360 ± 5	9	9.1 ± 1.8	5.4 ± 0.5	4.7 ± 0.9
284 ± 5	11	11.1 ± 2.2	6.0 ± 0.6	5.7 ± 1.1	364 ± 5	9	9.1 ± 1.8	5.4 ± 0.5	4.7 ± 0.9
293 ± 5	12	12.1 ± 2.4	6.2 ± 0.6	6.2 ± 1.2	360 ± 5	10	10.1 ± 2.0	5.7 ± 0.6	5.2 ± 1.0
480 ± 6	14	14.2 ± 2.8	6.7 ± 0.7	7.3 ± 1.4	512 ± 6	11	11.1 ± 2.2	6.0 ± 0.6	5.7 ± 1.1
484 ± 6	13	13.2 ± 2.6	6.5 ± 0.6	6.8 ± 1.3	507 ± 6	11	11.1 ± 2.2	6.0 ± 0.6	5.7 ± 1.1
484 ± 6	14	14.2 ± 2.8	6.7 ± 0.7	7.3 ± 1.4	503 ± 6	11	11.1 ± 2.2	6.0 ± 0.6	5.7 ± 1.1

Tabelle 1: Aus den Messkurven abgelesene Zahl der Intensitätsmaxima und die daraus berechneten Größen Elektronendichte n_e , Plasmafrequenz ω_p und Brechungsindex \hat{N} des Plasmas

Zur graphischen Auswertung der Ergebnisse haben wir zunächst die gewichteten Mittelwerte aus den jeweils drei Messungen von n_e , ω_p bzw. \hat{N} berechnet und dann in Abhängigkeit vom Entladestrom aufgetragen. Den Darstellungen (Abb. 1-4) kann man wie erwartet entnehmen, dass n_e mit wachsendem Strom I ansteigt. In Abbildung 1 ist zusätzlich ein Graph skizziert, der einer möglichen funktionellen Abhängigkeit zwischen diesen Größen entsprechen könnte. Diese lautet

$$n_e = 0.37 \cdot 10^{21} I^{\frac{3}{5}} [\text{A}^{\frac{5}{3}} \text{m}^{-3}]. \quad (18)$$

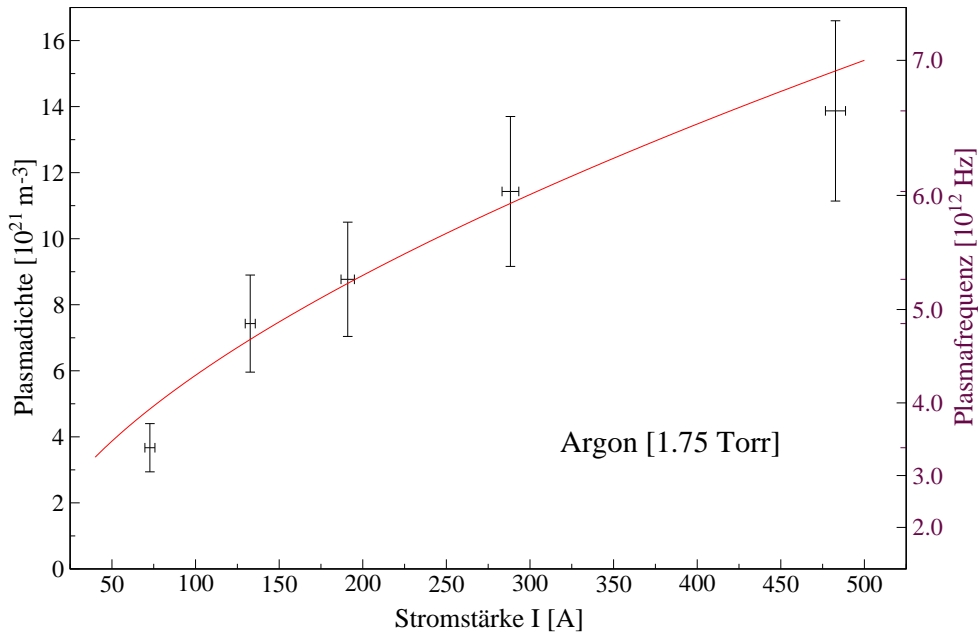


Abb. 1: Plasmadichte n_e und Plasmafrequenz ω_p als Funktion des Entladestroms I für Argon einschließlich der Skizzierung eines möglichen formalen Zusammenhangs $n_e = f(I)$

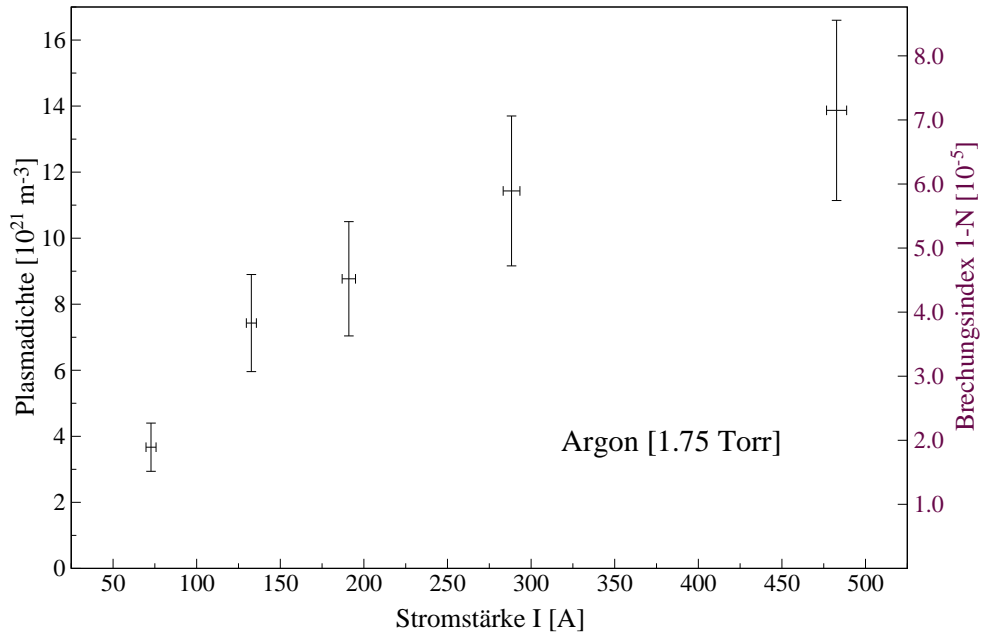


Abb. 2: Plasmadichte n_e und Brechungsindex $1 - \hat{N}$ als Funktion des Entladestroms I für Argon

Es sei weiterhin darauf hingewiesen, dass in den Abbildungen 1 und 3 die Fehlerbalken der Ordinate nur für die Plasmadichte gültig sind. In den Abbildungen 2 und 4 gilt der Fehlerbalken für n_e und $(1 - \hat{N})$ gleichermaßen.

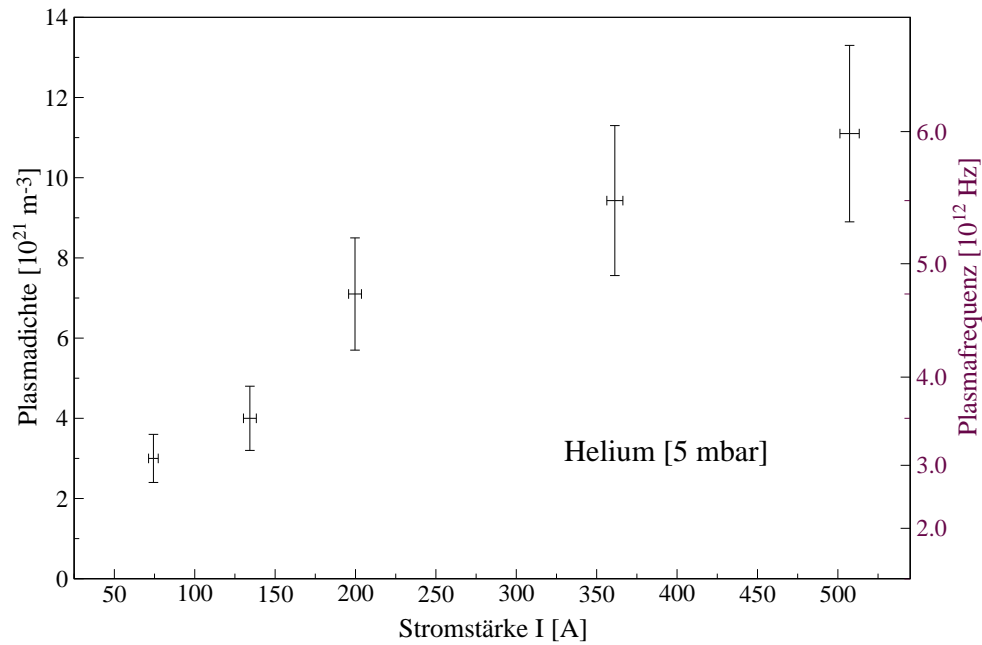


Abb. 3: Plasmadichte n_e und Plasmafrequenz ω_p als Funktion des Entladestroms I für Helium

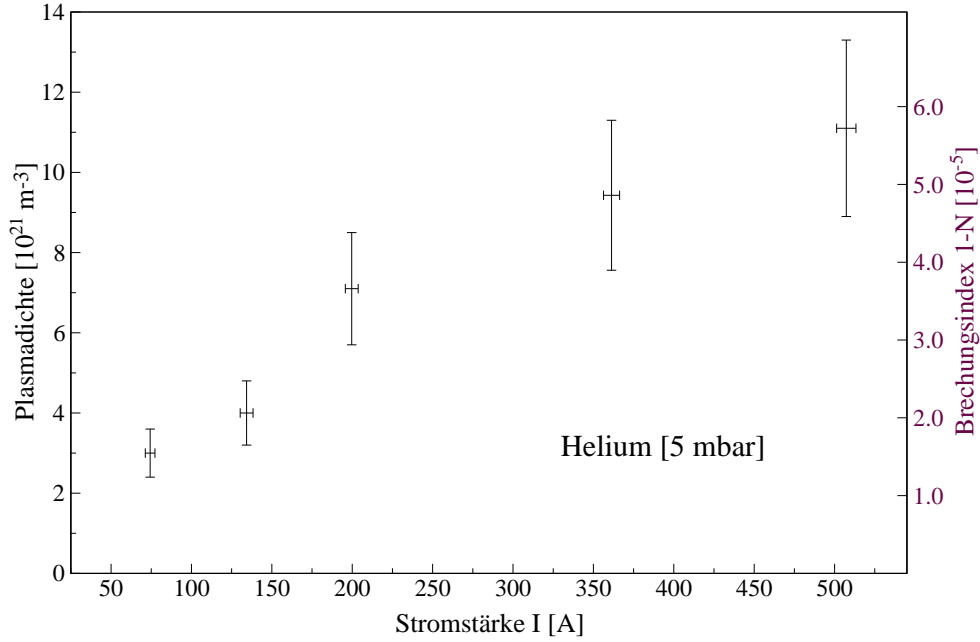


Abb. 4: Plasmadichte n_e und Brechungsindex $1 - \hat{N}$ als Funktion des Entladestroms I für Helium

3.1 Berechnung des Ionisationsgrades

Setzt man voraus, dass sich das Edelgas in dem Plasmarohr wie ein ideales Gas verhält und außerdem nur Einfachionisation vorliegt, so kann man anhand der Zustandsgleichung

$$p = \frac{N}{V} k_B T = \tilde{n} k_B T \quad (19)$$

und der berechneten Plasmadichten n_e den Ionisationsgrad γ bestimmen. Es gilt

$$\gamma = \frac{n_e}{\tilde{n}} = \frac{n_e k_B T}{p} . \quad (20)$$

Mit $T \cong 293\text{K}$ und $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ erhalten wir für maximalen bzw. halben Entladestrom folgende Ergebnisse:

Argon		Helium	
I [A]	γ	I [A]	γ
191 ± 4	0.15	200 ± 4	0.06
483 ± 6	0.24	507 ± 6	0.09

3.2 Zeitliche Entwicklung der Plasmadichte

Zur Auswertung des zeitlichen Verlaufs der Plasmadichte n_e wählen wir die dritte Messung für das Gas Argon bei einem maximalen Entladestrom $I_o = 484\text{A}$. Da für den Entladevorgang eines Kondensators ein exponentielles Abklingen des Stroms gemäß

$$I(t) = I_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

anzunehmen ist, erwarten wir auch ein entsprechendes Abklingen der Plasmadichte. Zunächst ist anhand der Messkurve zu jedem zeitlich gekennzeichneten Maximum der dazugehörige Strom zu bestimmen. Diesem ist schließlich nach Gl. (18) bzw. Abb. 1 eine Plasmadichte zugeordnet. Die Abbildung 5

zeigt den Zusammenhang $n_e = f(t)$ und entspricht damit vollständig unseren Erwartungen. Auf die Angabe von Fehlerbalken wurde an dieser Stelle explizit verzichtet, da die graphische Darstellung nur einen qualitativen Eindruck für die Abnahme von n_e geben soll.

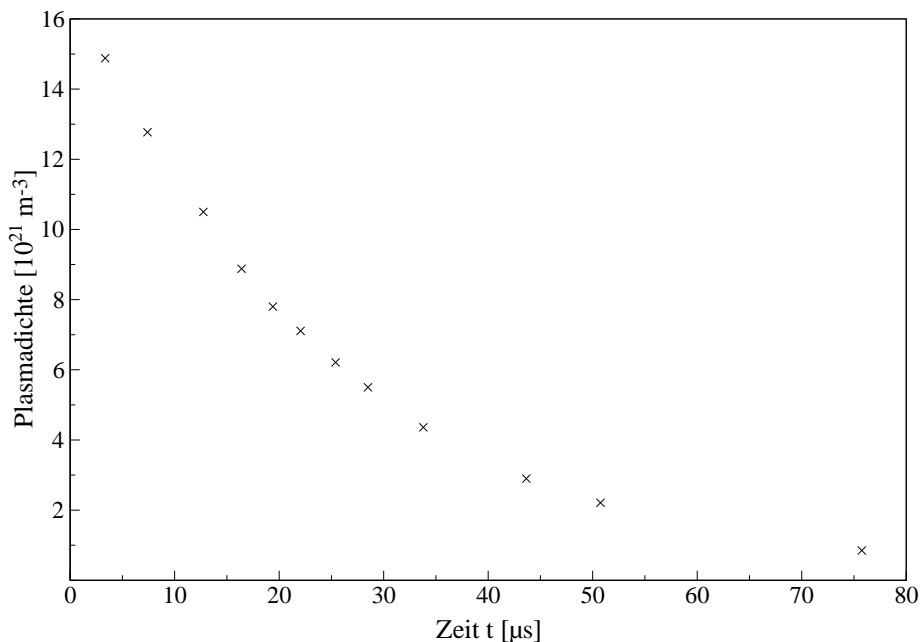


Abb. 5: Plasmadichte n_e in Abhängigkeit von der Zeit für Argon bei einem Entladestrom von $I_o = 484A$

3.3 Diskussion der Messergebnisse

Die größte Schwierigkeit bei diesem Versuch liegt in der Auswertung der Messkurven, aus denen die Zahl der Intensitätsmaxima zu bestimmen ist. Die Überlagerung mit Hintergrundsignalen (Plasmaleuchten) und die Beeinflussung durch Vibrationen, Strahlaufweitung etc. führen zu einer Modifikation des Intensitätsbildes und dazu, dass die eindeutige Identifikation der Maxima erschwert wird. Letztere Fehlerquellen sind allerdings im Vergleich zur Hintergrundstrahlung als vernachlässigbar einzustufen. Sollte es aber gelingen, den Versuchsaufbau gegenüber den äußeren Einflüssen besser abzuschirmen und nur das Signal des roten Laserlichts zur Auswertung heranzuziehen, müsste ein Verlauf wie in [1, Fig. 2,3] zu erhalten sein.

Für die Verwendung an einem Großen Plasma hat diese Methode den großen Vorteil, dass sie nicht in das Plasma eingreift und möglicherweise den Plasmazustand verändert. Nachteilig wirkt sich allerdings die Notwendigkeit aus, aufgrund der Torusform des Plasmas entlang einer Parallelen zur Torusachse zu messen. Im Gegensatz zu unserer Messung im Praktikum sollte ein größerer Dichtegradient und damit eine stärkere (=unerwünschte) Mittelung zu erwarten sein. Es werden also auch tomographische Methoden erforderlich, die auf lokale Plasmadichten schließen lassen. Da am großen Plasma in der Regel starke Magnetfelder, Temperaturen und Drücke auftreten, wird man zusätzlich mit der Schwierigkeit konfrontiert, den interferometrischen Aufbau gegen äußere Einflüsse abzuschirmen.

Möchte man diesen Versuch mit der roten Linie des Lasers durchführen, so muss zunächst die Elektrodenabstände erhöht werden, damit die das Plasma durchlaufende Welle überhaupt beeinflusst wird. Die Frequenz des Lichts sollte knapp über der Plasmafrequenz liegen, die proportional $\sqrt{n_e}$ ist. Dafür ist demnach ein noch größerer Strom notwendig. Außerdem muss die Photodiode allein auf die infrarote Linie reagieren, da nun diese komplementär durch die Modulation der roten Linie beeinflusst wird.

Literatur

- [1] D.E.T.F. Ashby, D.F. Jephcott, Appl. Phys. Lett. 3, 13 (1963)
- [2] Versuchsanleitung 'Plasmainterferometrie'. MPI für Plasmaphysik Berlin
- [3] <http://htc.physik.hu-berlin.de/~mitdank/dist/scripten/rc-glied.htm>