Übungsblatt 1

27.04.2018 / B. Leder

Wissenschaftliches Rechnen III / CP III

Aufgabe 1.1: *Methode der Konjugierten Gradienten in Matlab*

Implementieren Sie den Algorithmus 1 aus der Vorlesung (Methode der Konjugierten Gradienten) zur Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = b$$

in Matlab. Die Anwendung der Matrix A auf einen Vektor Au soll explizit, also als Matrix-Vektor-Multiplikation erfolgen. Die Matrix A soll dem diskreten Laplace-Operator mit Dirichlet-Randbedingungen in zwei Dimensionen entsprechen ($A \sim -\Delta$). Sie können dafür die auf der Website bereitgestellte Matlab-Routine `laplace.m` benutzen.

Testen Sie ihr Programm und untersuchen Sie die Konvergenz für eine Diskretisierung auf einem 64x64 Gitter:

1. Plotten Sie die Norm des Residuums $||r^{(k)}||$ und des Fehlers $||e^{(k)}||$ als Funktion der Iterationsschritte k. Wie erklären Sie den Unterschied zwischen beiden?
2. Die Konvergenz kann von der rechten Seite b abhängen. Testen Sie dies mit
   - einem Zufallsvektor
   - dem kleinster Eigenvektor
   - einem Einheitsvektor
   - $b = Au$, $u = 1$ (alles Einsen)
   - der Summe von zwei Eigenvektoren

   und setzen Sie dabei den Startvektor $x^{(0)} = 0$.

10 Punkte

Aufgabe 1.2: *Eigenschaften der Methode der Konjugierten Gradienten*

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Residuen $r^{(k)}$ und Suchrichtungen $p^{(k)}$, die durch den Algorithmus aus der Vorlesung generiert werden:

$$r^{(k)^T} p^{(i)} = 0 \quad i < k$$

$$p^{(k)^T} A p^{(i)} = 0 \quad i \neq k$$

$$r^{(k)^T} r^{(i)} = 0 \quad i \neq k$$

$$p^{(k)^T} r^{(k)} = r^{(k)^T} r^{(k)}$$

Hinweis: Beweisen Sie die ersten beiden Zeilen durch Induktion.

10 Punkte