



# PHYSIKALISCHES GRUNDPRAKTIKUM I

## Versuchsprotokoll

### P2 : M2 – Messung von Trägheitsmomenten

Versuchsort: Raum 315 - 3

Versuchsbetreuer: Lehmann, R.

Name:

Drobniewski, Kai;

Matr.Nr.:

Versuchspartner:

Kirsten, Stephan;

Matr.Nr.:

29. April 2009

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Abstrakt</b> .....	<b>1</b>
<b>2. Versuchsaufbau und -durchführung</b> .....	<b>1</b>
<b>3. Messergebnisse und Auswertung</b> .....	<b>2</b>
<b>3.1</b> Bestimmung des Trägheitsmoments $J_T$ des Drehtisches .....	<b>2</b>
<b>3.2</b> Berechnung der Trägheitsmomente $J_Y$ des Zylinders .....	<b>4</b>
<b>4. Fehleranalyse und Ergebniseinschätzung</b> .....	<b>6</b>
<b>4.1</b> Auswertung der Ergebnisse .....	<b>6</b>
<b>5. Anhang</b> .....	<b>7</b>
<b>5.1</b> Messdatenprotokoll.....	<b>7</b>

## 1. ABSTRAKT

---

In dem Versuch soll das Trägheitsmoment eines Drehtisches durch die unterschiedliche Platzierung einer Kreisscheibe bestimmt werden. Dieses benötigt man, wenn man mithilfe des Drehtisches das Trägheitsmoment eines Körpers bestimmen will.

Außerdem soll das Trägheitsmoment eines Zylinders in Abhängigkeit des Neigungswinkels zur Überprüfung der Formel für das Trägheitsellipsoid und der theoretischen Werte gemessen werden.

## 2. VERSUCHSAUFBAU UND -DURCHFÜHRUNG

---

Für die Bestimmung des Trägheitsmoments des Drehtisches wurde eine Kreisscheibe (Radius:  $r = (24,05 \pm 0,03)mm$ , Masse:  $m = (245,3 \pm 0,1)g$ ) in 6 verschiedenen Lagen (Abstand:  $s = (14,9 \pm 0,06)mm$ ) auf dem Drehtisch platziert und nach 10 Schwingungen die Zeit gemessen, genau wie vom Drehtisch allein.

Das Trägheitsmoment  $J_T$  vom Drehtisch ist dann der negative Schnittpunkt mit der  $J_Z$ -Achse der  $T^2 = f(J_Z)$  Funktion in der grafischen Darstellung.

Bei der Messung mit dem Zylinder (Radius:  $R = (22 \pm 0,03)mm$ , Höhe:  $h = (100 \pm 0,6)mm$ , Masse:  $(1352 \pm 0,1)g$ ) wurde dieser dann von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  Neigung in  $15^\circ$  Schritten festgestellt und in Rotation versetzt. Auch das Gestell des Zylinders wurde in Rotation versetzt.

Berechnen wir dessen Trägheitsmoment, können wir es von dem des Zylinders abziehen und erhalten dadurch eine genauere Lösung.

Für detailliertere Informationen betrachte man das Script.

Benutzte Messmittel, bzw. angegebene Unsicherheiten:

MESSINSTRUMENT	MESSUNSICHERHEIT
Digital-Stoppuhr	$0,01s + 5 \cdot 10^{-4} t$
Messschieber	$50\mu m + 10^{-4} l$
Masse	0,1 g

Berechnungen erfolgten per Hand, mit „Microsoft Excel“ und unter Verwendung von „QtiPlot“.

Folgende Formeln aus dem Script wurden verwendet:

$$J_Z = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 + m \cdot s^2 \quad (1)$$

(Steinerscher Satz)

$J_Z$  – Trägheitsmoment der Scheibe  
 $m$  – Masse der Scheibe  
 $r$  – Radius Scheibe  
 $s$  – senkrechter Abstand zur RA

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{D} \cdot J_z + \frac{4 \cdot \pi^2}{D} \cdot J_T \quad (2)$$

$T$  – Periodendauer der Schwingung

$D$  – Richtmoment der Feder

$$J_{\gamma=0^\circ} = J_z = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 \quad (3)$$

$J_T$  – Trägheitsmoment Drehtisch

$M$  – Masse des Zylinders

$$J_{\gamma=90^\circ} = J_y = \frac{1}{4} \cdot M \cdot R^2 + \frac{1}{12} \cdot M \cdot h^2 \quad (4)$$

$R$  – Radius des Zylinders

$h$  – Höhe des Zylinders

$$J_\gamma = J_z + (J_y - J_z) \cdot \sin^2 \gamma \quad (5)$$

$J_\gamma$  – Trägheitsmoment bei Winkel  $\gamma$

$\gamma$  – Neigungswinkel des Zylinders

### 3. MESSERGEBNISSE UND AUSWERTUNG

#### 3.1 Bestimmung des Trägheitsmoments $J_T$ des Drehtisches

Die Periodendauern der verschiedenen Situationen ergeben sich aus dem 10. Teil der gemessenen Zeit. Dabei ist  $T_0$  die Periodendauer beim Drehtisch allein und die anderen bei den verschiedenen Lagen.  $s$  ist die Standardabweichung und  $\bar{s}$  der Vertrauensbereich.

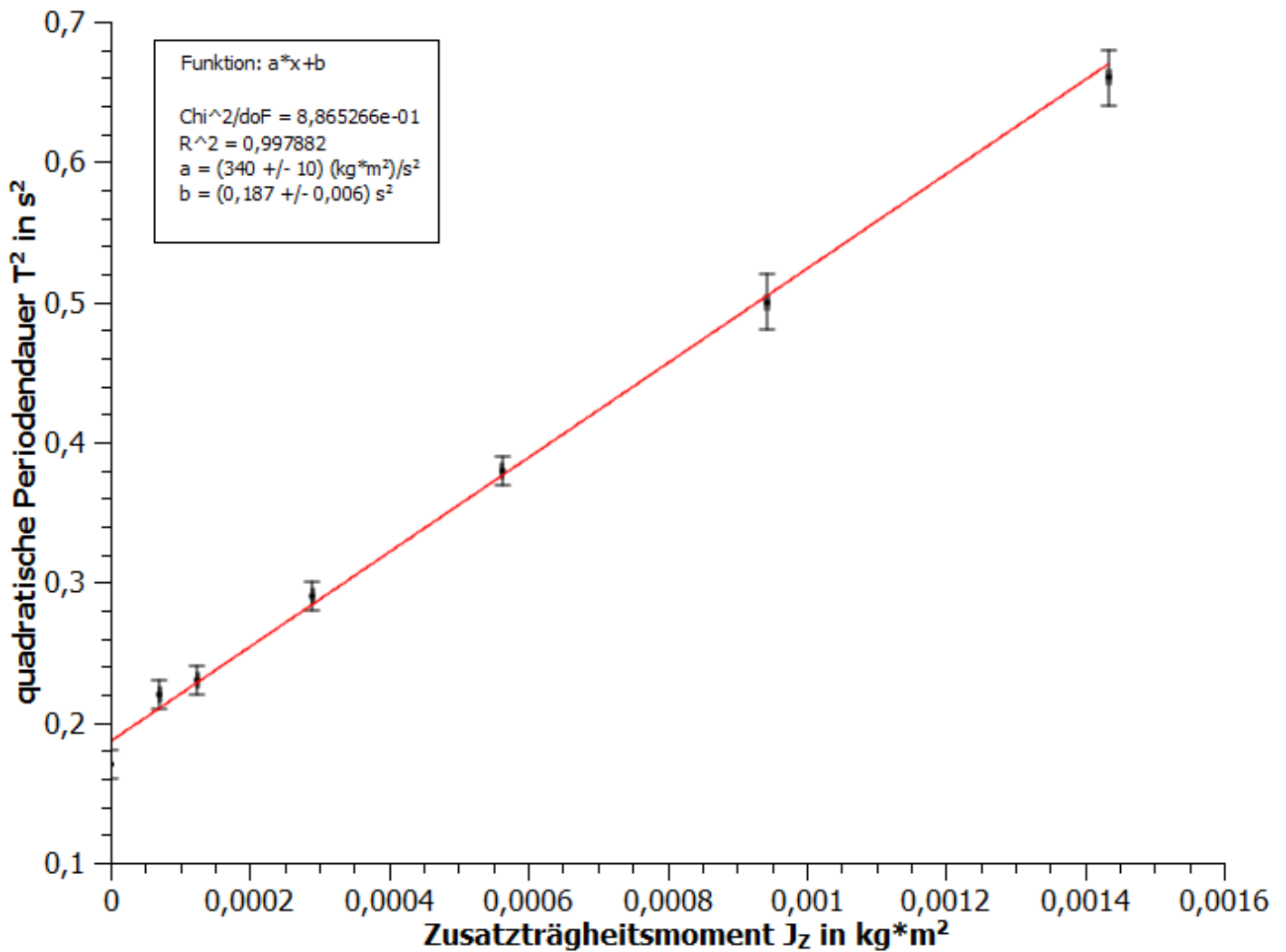
Die Zusatzträgheitsmomente  $J_z$  wurden dann mit Formel (1) berechnet und die Unsicherheit mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz, bei dem die Unsicherheiten der Masse, des Radius und des Abstands berücksichtigt werden musste.

**Periodendauern der verschiedenen Lagen und dazugehörige Zusatzträgheitsmomente**

Messung	$T_0$ in s	$T_1$ in s	$T_2$ in s	$T_3$ in s	$T_4$ in s	$T_5$ in s	$T_6$ in s
1	0,416	0,463	0,478	0,537	0,616	0,7	0,809
2	0,413	0,466	0,485	0,537	0,609	0,697	0,813
3	0,413	0,466	0,487	0,535	0,618	0,713	0,813
4	0,422	0,469	0,482	0,532	0,613	0,716	0,809
5	0,422	0,459	0,487	0,537	0,613	0,703	0,806
6	0,409	0,468	0,482	0,532	0,616	0,696	0,816
Mittelwert	0,4158	0,4652	0,4835	0,535	0,6142	0,7042	0,811
$s$	0,005	0,004	0,004	0,002	0,003	0,008	0,004
$\bar{s}$	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,003	0,001
$J_z$ [kg*m <sup>2</sup> ]	-	7,09E-05	12,52E-05	28,99E-05	56,3E-05	94,4E-05	143,4E-05
$u_{J_z}$ [kg*m <sup>2</sup> ]	-	2E-07	5E-07	9E-07	1E-06	2E-06	2E-06

Für die grafische Darstellung wurde nun der Mittelwert der einzelnen Periodendauern quadriert und die Unsicherheit mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz angepasst, indem man die Unsicherheit der normalen Zeitmessung berücksichtigte. Die ergibt sich aus dem zufällig Fehler (Vertrauensbereich) und dem systematischen Fehler, der wie in 2. Berechnet wird.

## lineare Regression $T^2(J_Z)$



Das Trägheitsmoment des Drehtisches ist nun der negative Schnittpunkt mit der  $J_Z$ -Achse ( $J_Z = -J_T$ ).  
 Nach (2) gilt nun:

$$T^2 = a \cdot J_Z + b \quad \text{mit} \quad b = a \cdot J_T \quad J_T = \frac{b}{a} = 0,00055 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Die Unsicherheit wird durch das Fehlerfortpflanzungsgesetz bei korrelierten Größen berechnet.

$$u_{J_T} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_T}{\partial a}\right)^2 \cdot u_a^2 + \left(\frac{\partial J_T}{\partial b}\right)^2 \cdot u_b^2 + 2 \cdot \frac{\partial J_T}{\partial a} \cdot \frac{\partial J_T}{\partial b} \cdot u_{ab}}$$

$$u_{ab} = \text{Cov}(a, b) = r_{ab} \cdot u_a \cdot u_b \quad u_{J_T} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\underline{\underline{J_T = (55 \cdot 10^{-5} \pm 2 \cdot 10^{-6}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2}}$$

### 3.2 Berechnung der Trägheitsmomente $J_\gamma$ des Zylinders

Auch bei der Berechnung der Periodendauern der verschiedenen Neigungswinkel wurden die gemessenen Zeiten durch zehn dividiert. Die Trägheitsmomente  $J_\gamma$  ergeben sich dann aus der Formel:

$$J_\gamma = \frac{T^2}{a} - J_T - J_0 \quad \text{mit } a \text{ als den Anstieg der Eichkurve aus 3.1.}$$

$J_0$  ist hier das Trägheitsmoment des Gestells, das in ähnlicher Form berechnet wird.

Die Unsicherheiten berechnen sich dazu durch das Fehlerfortpflanzungsgesetz unter Berücksichtigung der Unsicherheiten der Periodendauer, des Anstiegs, des Trägheitsmoments des Tisches und des Gestells.

#### Periodendauern und Trägheitsmoment des Gestells

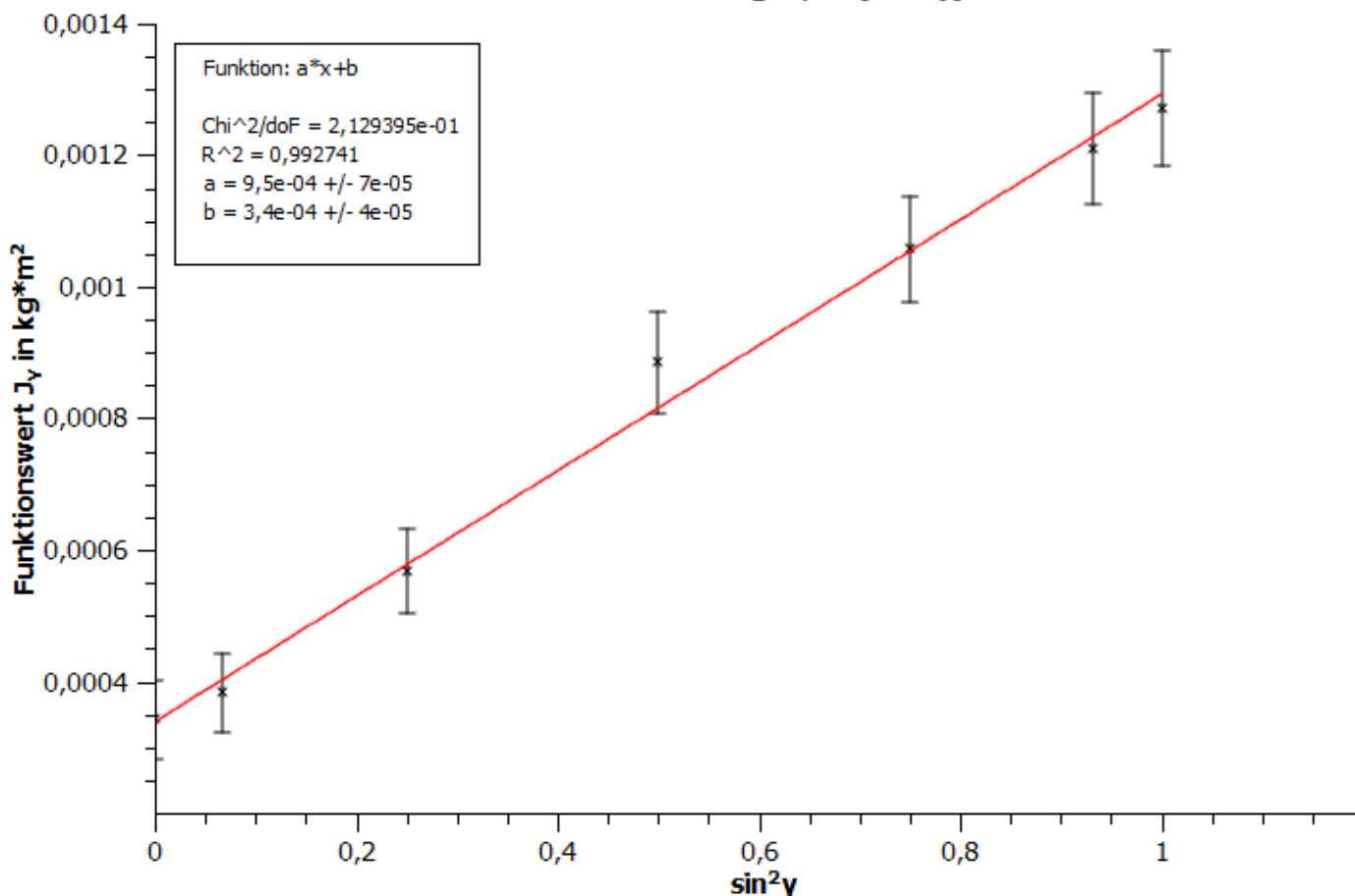
Messung	$T_G$ in s
1	0,463
2	0,459
3	0,456
4	0,463
5	0,459
6	0,463
Mittelwert	0,46
s	0,003
$\bar{s}$	0,001
$J_0$ [kg*m <sup>2</sup> ]	7,4E-05
$u_{J_0}$ [kg*m <sup>2</sup> ]	3,6E-05

#### Periodendauern der verschiedenen Neigungswinkel und dazugehörige Trägheitsmomente

Messung	$T_{0^\circ}$ in s	$T_{15^\circ}$ in s	$T_{30^\circ}$ in s	$T_{45^\circ}$ in s	$T_{60^\circ}$ in s	$T_{75^\circ}$ in s	$T_{90^\circ}$ in s
1	0,572	0,582	0,637	0,718	0,759	0,791	0,797
2	0,575	0,587	0,635	0,709	0,753	0,785	0,803
3	0,575	0,585	0,635	0,716	0,756	0,785	0,809
4	0,572	0,582	0,637	0,722	0,759	0,794	0,806
5	0,572	0,587	0,637	0,716	0,759	0,791	0,8
6	0,572	0,587	0,637	0,716	0,75	0,791	0,8
Mittelwert	0,57	0,59	0,64	0,72	0,76	0,79	0,80
s	0,002	0,002	0,001	0,004	0,004	0,004	0,004
$\bar{s}$	0,001	0,001	0,000	0,002	0,002	0,002	0,002
$J_\gamma$ [kg*m <sup>2</sup> ]	3,4E-04	3,8E-04	5,7E-04	8,8E-04	10,6E-04	12,1E-04	12,7E-04
$u_{J_\gamma}$ [kg*m <sup>2</sup> ]	6E-05	6E-05	6E-05	8E-05	8E-05	9E-05	9E-05

Für die grafische Darstellung wurde nun wie in 3.1 verfahren, wobei nur die Unsicherheiten von  $J_\gamma$  ausschlaggebend waren.

### Darstellung $J_y = f(\sin^2\gamma)$



Zum Vergleich wurden nun mithilfe der Formeln (3) – (5) die Trägheitsmomente in Abhängigkeit des Neigungswinkels als Vergleichswert berechnet. Im Fehlerfortpflanzungsgesetz wurden die Unsicherheiten der Trägheitsmomente bei  $\gamma = 0^\circ$  und  $\gamma = 90^\circ$  beachtet und dafür die der Masse, des Radius und der Höhe des Zylinders.

#### berechnete Trägheitsmomente des Zylinders

Messung	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$J_\gamma$ [kg*m <sup>2</sup> ]	3,272E-04	3,92E-04	5,7E-04	8,1E-04	10,5E-04	12E-04	13E-04
$u_{J_\gamma}$ [kg*m <sup>2</sup> ]	8E-07	8E-06	3E-05	6E-05	9E-05	1E-04	1E-04

Anhand der grafischen Darstellung erkennt man, dass nur der Wert bei  $\gamma = 45^\circ$  stärker von der Regressionsgeraden abweicht. Dies zeigt sich auch im maximalen Unterschied zu den berechneten Werten von  $7 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

Außerdem erkennt man eine hohe Übereinstimmung zwischen den berechneten Werten für die Trägheitsmomente und den aus den Zeitmessungen gewonnenen. Dabei liegen alle berechneten Werte im Intervall der gemessenen Trägheitsmomente, während diese nur knapp außerhalb der Intervalle der berechneten Werte liegen.

Somit kann man sagen, dass die Formel für das Trägheitsellipsoid durch die Messung bestätigt wurde.

## 4. FEHLERANALYSE UND ERGEBNISEINSCHÄTZUNG

---

### 4.1 Auswertung der Ergebnisse

Die Berechnung bei 3.1 lieferte ein Ergebnis mit sehr hoher Genauigkeit für das Trägheitsmoment des Tisches. Dieser Wert wurde in seiner Größenordnung mit Ergebnissen anderer Studenten verglichen und weist eine Übereinstimmung der Potenzen auf.

$$\underline{\underline{J_T = (55 \cdot 10^{-5} \pm 2 \cdot 10^{-6}) \text{kg} \cdot \text{m}^2}}$$

Die Genauigkeit der Messung wurde bereits durch das Messen am Umkehrpunkt erhöht, weil man nur diesen Punkt bei solch einer Geschwindigkeit sicher wahrnehmen kann. Allerdings wurde bei der Auswertung die Reaktionszeit des Experimentators außer Acht gelassen.

Obwohl sich diese relativ am Beginn und Ende der Zeitmessung aushebt, bleibt doch die Möglichkeit einer Differenz in den beiden Reaktionszeiten. Da der Mensch eine durchschnittliche Reaktionszeit von 0,4s besitzt, die sich auch bei mehrmaligem Messen (siehe Versuch F3 – Fadenpendel) um diesen Wert unterscheiden kann.

Deshalb wäre die automatische Zeitmessung bei diesem Experiment genauer, als das manuelle Stoppen des Menschen.

Außerdem wurde die Dämpfung der Schneckenfeder vernachlässigt, die zu einer schwach gedämpften Schwingung führt, während wir eine harmonische Schwingung angenommen haben.

Dass das Ergebnis trotzdem so genau ausgefallen ist, wie der Vergleich der berechneten Werte mit den gemessenen bei 3.2 zeigt, kann daran liegen, dass die Dämpfung bei gleich bleibender Auslenkung relativ konstant ist und nicht variiert. Da sie bei jeder Messung außer Acht gelassen wurde, sollte sich der Effekt also aufheben und die Unsicherheit der Messung nicht so stark beeinflussen.

Das erkennt man allein an dem Vergleich der gemessenen Werte der Trägheitsmomente des Zylinders mit den theoretischen Werten für  $\gamma = 0^\circ$  und  $\gamma = 90^\circ$ .