
Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I
Institut für Physik



Physikalisches Grundpraktikum II

Elektrodynamik und Optik

E2 - Innenwiderstand von Messgeräten

durchgeführt am: 27.10.2009
Messplatz : 1 (LCP 2'17)

Verfasser: Richter, Gregor Mtknr.:
Versuchspartner: Mtknr.:

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung und Versuchsbeschreibung	1
1.1	Zielstellung des Versuchs	1
1.2	Versuchsaufbau und Durchführung	1
1.3	Physikalischen Zusammenhänge	1
1.4	Messungenauigkeiten	1
2	Auswertung	2
2.1	Innenwiderstand R_V des Spannungsmessgerätes	2
2.2	Innenwiderstand R_A des Strommessgerätes	4
2.3	Ermittlung des Stromes I_0 aus der Regression	7
3	Diskussion und kritische Ergebniseinschätzung	8
4	Literatur- und Softwareverzeichnis	9
A	Anhang	10
A.1	Messdatenprotokoll vom 27.10.2009	10
A.2	zeichnerische Überprüfung der Regression	10

Abbildungsverzeichnis

1	graphische Darstellung von $U_V^{-1} = f(R_x)$	3
2	graphische Darstellung von $I_A^{-1} = f(R_x^{-1})$	6

Tabellenverzeichnis

1	Messgrößen und deren Messungenauigkeiten	1
2	Messwerte und Zwischenwerte zur Bestimmung von R_V	2
3	Messwerte und Zwischenwerte zur Bestimmung von R_A	5

1 Aufgabenstellung und Versuchsbeschreibung

1.1 Zielstellung des Versuchs

Ziel des Versuches ist die Ermittlung der Innenwiderstände eines Spannungsmessgerätes bzw. eines Strommessgerätes. Weiterhin wollen wir den Strom ohne eingebauten regelbaren Widerstand I_0 messen.

1.2 Versuchsaufbau und Durchführung

Der Versuch zur Ermittlung des Innenwiderstandes des Spannungsmessgerätes, wurde nach Schaltplan (Vgl. [1] S.8 Abb.2b) aufgebaut. Während des Versuchs wurde die Betriebsspannung $U_B = (20,0 \pm 0.1)V$ konstant gehalten. Über den regelbaren Widerstand wurde R_x variiert und U_V in Abhängigkeit von R_x aufgenommen. Anschließend wurde der Versuch zur Ermittlung des Innenwiderstandes des Strommessgerätes nach Schaltplan (Vgl. [1] S.8 Abb.2a) aufgebaut. Nach Unterbrechung der Verbindung zu R_x wurde U_B kalibriert, so dass I_0 noch auf der Skala angezeigt wurde. Daraufhin wurde die Betriebsspannung $U_B = (19,0 \pm 0,1)V$ konstant gehalten und I_0 gemessen. Im Anschluss wurde den regelbare Widerstand R_x variiert und I_A in Abhängigkeit von R_x aufgenommen. Für weitere Informationen bzgl. Versuchsaufbau und Durchführung sei auf [1] (S. 6ff) verwiesen.

1.3 Physikalischen Zusammenhänge

Alle im Protokoll verwendeten physikalischen Zusammenhänge sind [1] (S. 6ff) entnommen. Für weitere Informationen sei auf die angegebene Quelle verwiesen.

1.4 Messungenauigkeiten

Folgende Messgrößen wurden mit den angegebenen Messungenauigkeiten erfasst. Die Vernachlässigbarkeit von Messungenauigkeiten wird in der Auswertung begründet. Die Messungenauigkeiten der Spannung U_V und der Stromstärke I_A ergibt sich über pythagoreische Addition von zufälligem und systematischem Messfehler.

Messgröße	Messungenauigkeit
Spannung U_B	letzte signifikante Ziffer 0,1V
Spannung U_V	$e_z = 2,5\%$ des Messbereichs (25V) und $e_s = 0,2V$
Widerstand R_x	vernachlässigbar
Stromstärke I_0	$e_z = 1,5\%$ des Messbereichs (100 μA) und $e_s = 0,25\mu A$

Tabelle 1: Messgrößen und deren Messungenauigkeiten

2 Auswertung

Die Nummerierung der Gleichungen bezieht sich auf das Skript (Quelle [1]).

2.1 Innenwiderstand R_V des Spannungsmessgerätes

Wir wollen uns zuerst mit dem Innenwiderstand eines Spannungsmessgerätes befassen. Dazu wurde die angezeigte Spannung am Spannungsmessgerät in Abhängigkeit eines in Reihe geschalteten regelbaren Widerstandes aufgenommen. Es gilt laut Gl. (3) aus [1] (S. 8):

$$\frac{1}{U_V} = \frac{1}{U_B} \cdot \frac{R_x}{R_V} + \frac{1}{U_B} = a_1 \cdot R_x + b_1$$

U_V ist dabei der am Spannungsmessgerät angezeigte Abfall der Spannung, U_B die konstante Betriebsspannung und R_x der regelbare Widerstand.

Die Messungenauigkeit der inversen Spannung U_V^{-1} erhalten wir über das Fehlerfortpflanzungsgesetz für nicht korrelierte Messgrößen nach:

$$u_{U_V^{-1}} = \frac{u_{U_V}}{U_V^2}$$

Die Messungenauigkeit des regelbaren Widerstandes wurde gemäß [2] Tabelle 10 (Seite 19) ermittelt. Die Größenordnung der relativen Messungenauigkeit war sehr gering ($\approx 0,03\%$) weshalb wir die Messungenauigkeit von R_x im folgenden vernachlässigen wollen, da die relative Messungenauigkeit von U_V (größer als 3%) überwiegt.

R_x in [$k\Omega$]	U_V in [V]	U_V^{-1} in [V^{-1}]
0,5	$19,7 \pm 0,7$	$0,051 \pm 0,002$
1,0	$19,1 \pm 0,7$	$0,052 \pm 0,002$
5,0	$16,7 \pm 0,7$	$0,060 \pm 0,002$
10,0	$14,2 \pm 0,7$	$0,070 \pm 0,003$
15,0	$12,4 \pm 0,7$	$0,081 \pm 0,004$
20,0	$11,0 \pm 0,7$	$0,091 \pm 0,006$
25,0	$10,0 \pm 0,7$	$0,100 \pm 0,007$
30,0	$9,0 \pm 0,7$	$0,111 \pm 0,008$
40,0	$7,7 \pm 0,7$	$0,130 \pm 0,011$
50,0	$6,6 \pm 0,7$	$0,152 \pm 0,015$

Tabelle 2: Messwerte und Zwischenwerte zur Bestimmung von R_V

Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir aus Gl. (3):

$$R_V = \frac{1}{U_B \cdot a_1}$$

für den Innenwiderstand des Spannungsmessgerätes, wobei a_1 der Anstieg der Regressionsgeraden ist.

Wir tragen die Messwerte der inversen Spannung U_V^{-1} als Funktion $f(R_x)$ auf und führen eine lineare Regression durch.¹

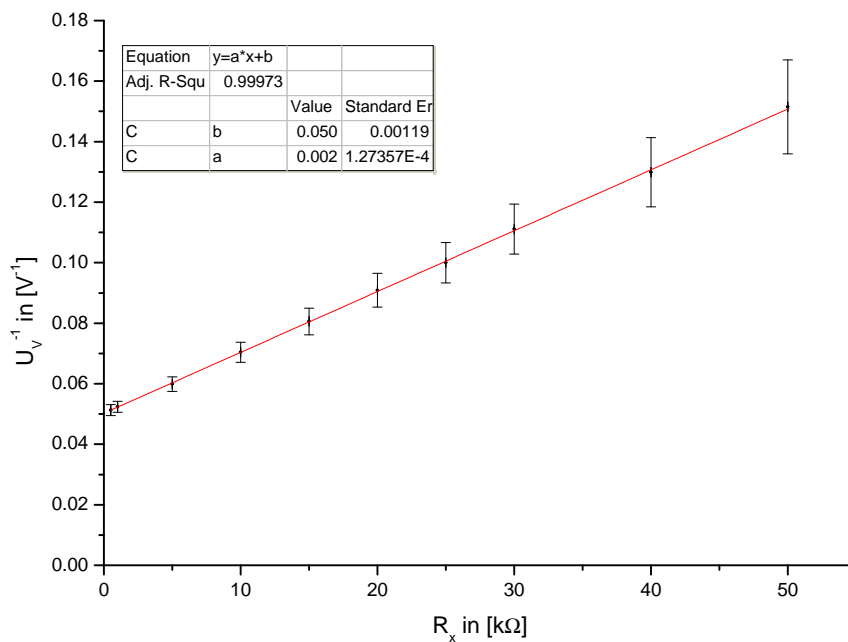


Abbildung 1: graphische Darstellung von $U_V^{-1} = f(R_x)$

Wir erhalten für den Anstieg der Regressionsgeraden:

$$a_1 = (2,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \frac{1}{k\Omega \cdot V}$$

Aus der zeichnerischen Überprüfung (siehe Anhang A.2) erhalten wir aus dem Steigungsdreieck für den maximalen Anstieg $a_{1max} = 2,2 \cdot 10^{-3} \frac{1}{k\Omega \cdot V}$. Für den minimalen Anstieg erhalten wir analog $a_{1min} = 1,7 \cdot 10^{-3} \frac{1}{k\Omega \cdot V}$.

Den Anstieg ermitteln wir als das arithmetische Mittel von a_{1max} und a_{1min} zu $a_{1z} = (2,0 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} \frac{1}{k\Omega \cdot V}$, wobei die Ungenauigkeit nach dem Zusammenhang: $u_{a_{1z}} = 0,5 \cdot |a_{1max} - a_{1min}|$ abgeschätzt wurde.

U_B wurde für die Dauer des Experimentes konstant gehalten und betrug

¹Erstellt mit OriginPro 8; Modellfkt.: $y = a \cdot x + b$ unter instrumenteller Wichtung der Ordinatenfehler

$$U_{Bexp} = (20, 0 \pm 0, 1)V.$$

Die Messunsicherheit von R_V ergibt sich aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für unkorrelierte Messgrößen unter der Berücksichtigung aller eingehenden Messgrößen nach:

$$u_{R_{V1}} = \sqrt{\left(-\frac{u_{U_{Bexp}}}{U_{Bexp}^2 \cdot a_1}\right)^2 + \left(-\frac{u_{a_1}}{U_{Bexp} \cdot a_1^2}\right)^2}$$

Es ergibt sich für den Innenwiderstand des Spannungsmessgerätes ein Widerstand von:

$$\underline{\underline{R_{V1} = (24, 9 \pm 1, 6)k\Omega}}$$

Alternativ kann man U_B auch als das Inverse des Schnittpunktes von Ordinatenachse und Regressionsgerade ermitteln (Vgl. Gl. (3)). Es gilt:

$$U_{Breg} = b_1^{-1} = (19, 9 \pm 0, 5)V$$

wobei sich die Messungenauigkeit nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für nicht korrelierte Messgrößen analog zu der Messungenauigkeit von U_V^{-1} ergibt. Da a_1 und b_1 korrelierte Messgrößen sind, ergibt sich die Messungenauigkeit von R_V unter Verwendung der beiden Fit-Parameter aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für korrelierte Messgrößen (Vgl. Quelle [2] S.39 Gl. (39)) nach:

$$u_{R_{V2}} = \sqrt{\left(u_{a_1} \cdot \frac{1}{a_1^2 b_1}\right)^2 + \left(u_{b_1} \cdot \frac{1}{a_1 b_1^2}\right)^2 + 2 \frac{1}{a_1 b_1^2} \cdot \frac{1}{a_1^2 b_1} r u_{a_1} u_{b_1}}$$

Der Parameter r erhalten wir aus der Plot-Software als $r^2 \approx 1$ mit $r > 0$. Damit lässt sich R_V nach

$$R_{V2} = \frac{1}{a_1 \cdot b_1} = \underline{\underline{(25, 0 \pm 2, 2)k\Omega}}$$

berechnen.

2.2 Innenwiderstand R_A des Strommessgerätes

Wir wollen uns anschließend mit dem Innenwiderstand eines Strommessgerätes befassen. Dazu wurde die angezeigte Stromstärke am Strommessgerät in Abhängigkeit eines parallel geschalteten regelbaren Widerstandes aufgenommen. Es gilt laut Gl. (4) aus [1] (S. 7):

$$\frac{1}{I_A} = \frac{1}{I_0} \cdot \frac{R_A}{R_x} + \frac{1}{I_0} = a_2 \cdot \frac{1}{R_x} + b_2$$

I_A ist dabei der am Strommessgerät angezeigte Stromstärke und R_x der regelbare Widerstand. Um zu erreichen, dass trotz Veränderung des Gesamtwiderstandes (Veränderung von R_x) der vom Netzgerät gelieferte Strom annähernd konstant

ist wurde ein hoher Widerstand $R_0 = 200k\Omega$ in Reihe geschaltet. Den (nahezu) konstanten Strom bezeichnen wir mit I_0 . Streng genommen gilt Gl. (4) nur für $R_0 \gg R_x$ was wir jedoch im folgenden voraussetzen wollen.

Die Messungenauigkeit der inversen Stromstärke I_A^{-1} erhalten wir über das Fehlerfortpflanzungsgesetz für nicht korrelierte Messgrößen nach:

$$u_{I_A^{-1}} = \frac{u_{I_A}}{I_A^2}$$

Die Messungenauigkeit des regelbaren Widerstandes wurde wie zuvor gemäß [2] Tabelle 10 (Seite 19) ermittelt. Mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung für unkorrelierte Messgrößen berechnet sich die Messungenauigkeit von R_x^{-1} analog zur Stromstärke I_A . Die Größenordnung der relativen Messungenauigkeit $u_{R_x^{-1}}$ war sehr gering (etwa 0,05 – 0,03%) weshalb wir die Messungenauigkeit von R_x^{-1} im folgenden vernachlässigen wollen, da die relative Messungenauigkeit von I_A^{-1} (größer als 3%) überwiegt.

R_x in $[k\Omega]$	R_x^{-1} in $[k\Omega]$	I in $[\mu A]$	I^{-1} in $[\mu A]$
0,1	10,00	$9,0 \pm 2,5$	$0,1111 \pm 0,0309$
0,2	5,00	$15,0 \pm 2,5$	$0,0667 \pm 0,0111$
0,3	3,33	$21,0 \pm 2,5$	$0,0476 \pm 0,0057$
0,7	1,43	$39,0 \pm 2,5$	$0,0256 \pm 0,0016$
1,0	1,00	$46,0 \pm 2,5$	$0,0217 \pm 0,0012$
1,5	0,67	$55,0 \pm 2,5$	$0,0175 \pm 0,0008$
2,5	0,40	$66,0 \pm 2,5$	$0,0152 \pm 0,0006$
5,0	0,20	$78,0 \pm 2,5$	$0,0128 \pm 0,0004$
10,0	0,10	$85,0 \pm 2,5$	$0,0118 \pm 0,0003$
20,0	0,05	$90,0 \pm 2,5$	$0,0111 \pm 0,0003$

Tabelle 3: Messwerte und Zwischenwerte zur Bestimmung von R_A

Durch äquivalente Umformungen erhalten wir aus Gl. (4):

$$R_A = I_0 \cdot a_2$$

für den Innenwiderstand des Strommessgerätes, wobei a_2 der Anstieg der Regressionsgeraden ist.

Wir tragen die Messwerte der inversen Stromstärke I_A^{-1} als Funktion $f(R_x^{-1})$ auf und führen eine lineare Regression durch.²

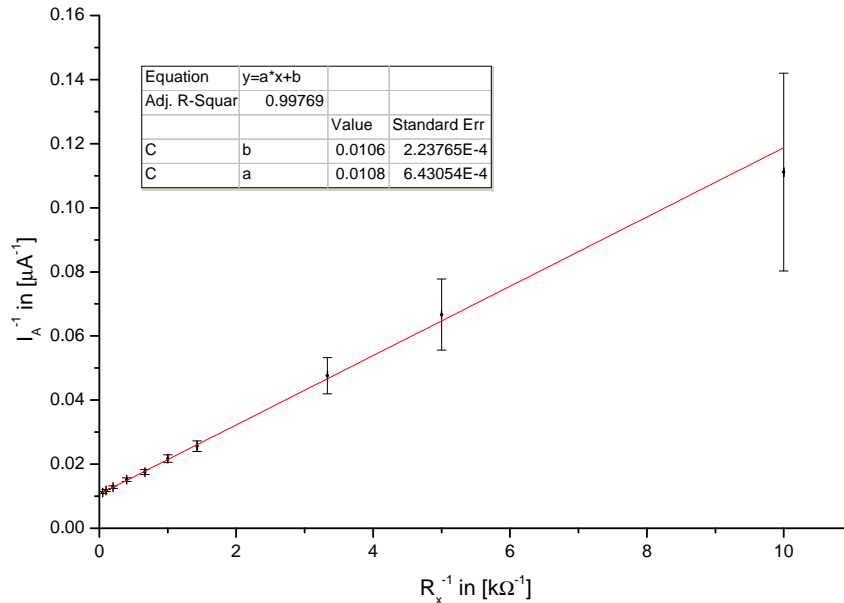


Abbildung 2: graphische Darstellung von $I_A^{-1} = f(R_x^{-1})$

Wir erhalten für den Anstieg der Regressionsgeraden:

$$a_2 = (10,8 \pm 0,6) \cdot 10^{-3} \frac{k\Omega}{\mu A}$$

Aus der zeichnerischen Überprüfung (siehe Anhang A.2) erhalten wir aus dem Steigungsdreieck für den maximalen Anstieg $a_{2max} = 11,6 \cdot 10^{-3} \frac{k\Omega}{\mu A}$. Für den minimalen Anstieg erhalten wir analog $a_{2min} = 10,0 \cdot 10^{-3} \frac{k\Omega}{\mu A}$.

Den Anstieg ermitteln wir als das arithmetische Mittel von a_{2max} und a_{2min} zu $a_{2z} = (10,8 \pm 0,8) \cdot 10^{-3} \frac{k\Omega}{\mu A}$, wobei die Ungenauigkeit nach dem Zusammenhang: $u_{a_{2z}} = 0,5 \cdot |a_{2max} - a_{2min}|$ abgeschätzt wurde.

Die Stromstärke I_0 wurde direkt gemessen und betrug:

$$\underline{\underline{I_{0exp} = (95,0 \pm 2,5)\mu A}}$$

wobei sich die Messungenauigkeit aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für unkorrelierte Messgrößen analog zur Messungenauigkeit von I_A^{-1} berechnen lässt. Die Messunsicherheit von R_A unter Verwendung von I_{0exp} ergibt sich aus dem

²Erstellt mit OriginPro 8; Modellfkt.: $y = a \cdot x + b$ unter instrumenteller Wichtung der Ordinatenfehler

Fehlerfortpflanzungsgesetz für unkorrelierte Messgrößen unter der Berücksichtigung aller eingehenden Messgrößen nach:

$$u_{R_{A1}} = \sqrt{(u_{I_{0exp}} \cdot a_2)^2 + (u_{a_2} \cdot I_{0exp})^2}$$

Es ergibt sich für den Innenwiderstand des Strommessgerätes ein Widerstand von:

$$\underline{\underline{R_{A1} = (1,03 \pm 0,07)k\Omega}}$$

2.3 Ermittlung des Stromes I_0 aus der Regression

Wir wollen noch einmal den Strom I_0 betrachten. Der Strom I_0 wurde gemessen in dem die Verbindung zum Widerstand unterbrochen wurde, was mit einem zum Strommessgerät parallel geschalteten unendlich großen Widerstand R_x gleichzusetzen ist. Im unendlich großen Widerstand R_x fließt bei (endlicher) Spannung U_B kein Strom. Bei einem unendlich großen Widerstand R_x verschwindet das Inverse R_x^{-1} bei Grenzwertbildung. I_0 lässt sich demnach aus der linearen Regression aus 2.2 (Abbildung 2), als Ordinate des Schnittpunkts von Regressionsgerade und Ordinatenachse ablesen. Wir erhalten I_0 aus der Regression über den Zusammenhang $I_{0reg} = b_2^{-1}$. Es ergibt sich:

$$\underline{\underline{I_{0reg} = (94,0 \pm 2,0)\mu A}}$$

wobei sich die Messungenauigkeit aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für unkorrelierte Messgrößen analog zur Messungenauigkeit von I_A^{-1} berechnen lässt. Wenn wir R_A mit Hilfe von I_{0reg} berechnen wollen gilt der Zusammenhang:

$$R_A = a_2 \cdot b_2^{-1} = a_2 \cdot I_{0reg}$$

Da a_2 und b_2 korrelierte Größen sind, ergibt sich die Messungenauigkeit von R_A unter Verwendung der beiden Fit-Parameter aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für korrelierte Messgrößen nach:

$$u_{R_{A2}} = \sqrt{\left(u_{a_2} \cdot \frac{1}{b_2}\right)^2 + \left(u_{b_2} \cdot \frac{a_2}{b_2^2}\right)^2 - 2 \frac{1}{b_2} \cdot \frac{a_2}{b_2^2} r u_{a_2} u_{b_2}}$$

Der Parameter r erhalten wir aus der Plot-Software als $r^2 = 0,998$ mit $r > 0$. Es ergibt sich für den Innenwiderstand des Strommessgerätes ein Widerstand von:

$$\underline{\underline{R_{A2} = (1,02 \pm 0,08)k\Omega}}$$

3 Diskussion und kritische Ergebniseinschätzung

Die auf verschiedene Arten ermittelten Werte für R_A , R_V und I_0 sind in sich konsistent. Die Regressionsgeraden spiegeln bekannte physikalische Gesetzmäßigkeiten wieder. Es gibt keine Messwerte die nicht auf der Regressionsgeraden liegen. Es gilt: $R_V > R_A$.

Der Innenwiderstand des Strommessgerätes ist mit $R_{A1} = (1,03 \pm 0,07)k\Omega$ bzw. $R_{A2} = (1,02 \pm 0,08)k\Omega$ als hoch einzuschätzen, da man einen idealerweise verschwindenden Widerstand fordert. Im Vergleich zum in Reihe geschalteten hochohmigen Widerstand $R_0 = 200k\Omega$ ist dieser aber eher gering und beeinflusst die Messung nur geringfügig. Der Leistungsverlust beträgt für einen Strom $I = 95,0\mu A$ beträgt $P_{Verlust} \approx 9,3 \cdot 10^{-6}W$.

Der Innenwiderstand des Spannungsmessgerätes ist mit $R_{V1} = (24,9 \pm 1,6)k\Omega$ bzw. $R_{V2} = (25,0 \pm 2,2)k\Omega$ als nicht sehr hoch einzuschätzen, da man einen idealerweise unendlich großen Widerstand fordert. Der Leistungsverlust bei einer Spannung $U = 20,0V$ beträgt $P_{Verlust} \approx 0,02W$.

Die zeichnerische Kontrolle der Anstiege der Regressionsgeraden in 2.1 und 2.2 ist mit den Ergebnissen aus der Plotsoftware in sich konsistent. Diese Methode stellt bei einer linearen Regression offenbar ein einfaches, effektives Mittel dar die Ergebnisse der Plot-Software zu überprüfen.

Die erfassbaren Fehler wurden berücksichtigt mit Ausnahme der Messungeauigkeiten von R_x bzw. R_x^{-1} die aus zuvor erwähnten Gründen vernachlässigt wurden. Weitere nur schwer erfassbare Fehler sind Widerstände der Kabel sowie der Spannungsquelle. So wie eine mangelnde Isolierung vor elektromagnetischen Feldern. Diese Störfaktoren sind jedoch als vernachlässigbar gering anzusehen.

Der Versuchsaufbau wurde den in ihn gesetzten Ansprüchen gerecht und lieferte in sich konsistente, den Erwartungen entsprechende, Ergebnisse.

4 Literatur- und Softwareverzeichnis

Literatur:

1. *Physikalisches Grundpraktikum - Elektrodynamik und Optik*, 2005, HU Berlin Institut für Physik
2. *Physikalisches Grundpraktikum - Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*, 2007, HU Berlin Institut für Physik

Software:

- MikTeX V. 2.9
- TeXnicCenter V. 1.0 Stable Release Candidate 1
- OriginPro 8 SR0 V. 8.0724
- OpenOffice.org 3.0.0 Calc

A Anhang

A.1 Messdatenprotokoll vom 27.10.2009

A.2 zeichnerische Überprüfung der Regression