Institut für Physik der Humboldt-Universität zu Berlin

Physikalisches Grundpraktikum II

Versuchsprotokoll
E2 - Innenwiderstand von Messgeräten

Versuchsort: New 14 Raum 2'17 Arbeitsplatz 3
Versuchsbetreuer: —
Versuchsgruppe: —

Autor: —; Matrikelnummer: —
Versuchspartner: —; Matrikelnummer: —

10. 11. 2009

1 Ziel und Aufgabenstellung

Jede Spannungs- und Strommessung wird mit realen Voltmetern beziehungsweise Amperemetern durchgeführt. Das bedeutet, ein Voltmeter hat einen von unendlich verschiedenen und ein Amperemeter einen von null verschiedenen Innenwiderstand. Da diese Innenwiderstände die Messung verfälschen, ist deren Kenntnis von großer Bedeutung für präzise Messungen. Ziel dieses Versuches ist die Bestimmug der Innenwiderstände eines Volt- und eines Amperemeters. Der Versuch wird gemäß der Aufgabenstellung[1] durchgeführt. Für die graphischen Darstellungen wird *QtiPlot (v0.9.6.2)* verwendet.

2 Voltmeter

Zunähst wird ein Voltmeter in Reihe mit dem ohm'schen Widerstand R_x und mit einer Spannungsquelle mit der Betriebsspannung U_B geschaltet. Bei konstanter Betriebsspannung $U_B = (20 \pm 0,1)$ V wird mit dem Voltmeter die Spannung U_V in Abhängigkeit von R_x gemesen. Die Unsicherheit des Widerstands R_x ist offensichtlich vernachlässigbar klein.

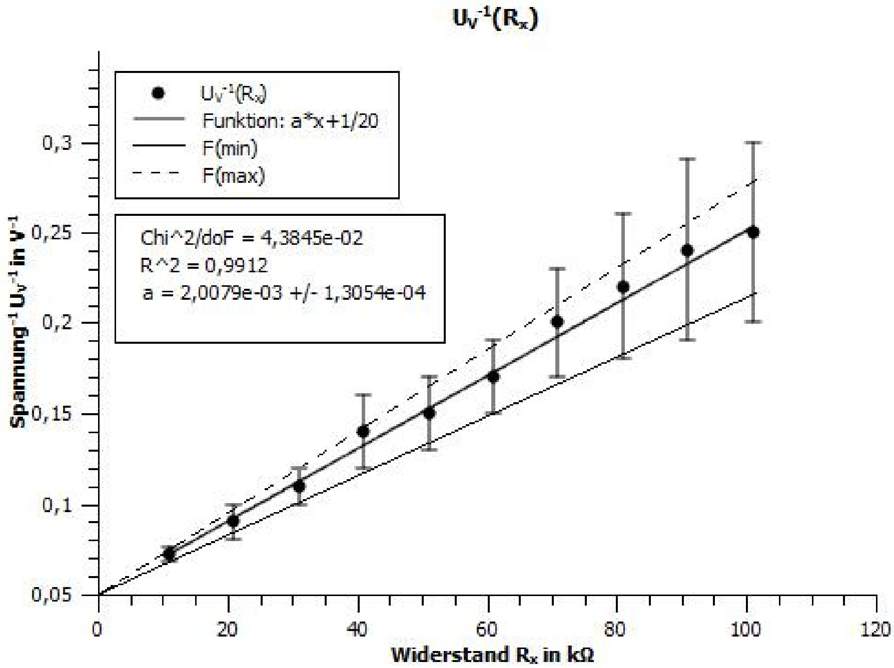
R_x in kΩ	U_V in V
$11,000 \pm 0,003$	$13,8 \pm 0,8$
$21,00 \pm 0,01$	$10,8 \pm 0,8$
$31,00 \pm 0,01$	$8,8 \pm 0,8$
$41,00 \pm 0,01$	$7,4 \pm 0,8$
$51,00 \pm 0,02$	$6,6 \pm 0,8$
$61,00 \pm 0,02$	$5,8 \pm 0,8$
$71,00 \pm 0,02$	$5,0 \pm 0,8$
$81,00 \pm 0,02$	$4,6 \pm 0,8$
$91,00 \pm 0,03$	$4,2 \pm 0,8$
$101,00 \pm 0,03$	$4,0 \pm 0,8$

Nun wird der Innenwiderstand R_V des Voltmeters aus dem Anstieg der Regressionsgeraden bestimmt.

$$
\begin{aligned}
u_{R_x} &= \pm(0,00002k\Omega + 0,0003\cdot R_x) && (1)\\
u_{U_V} &= \pm(0,2V + 2,5\%\ \mathrm{MSB}) = \pm(0,2V + 0,025\cdot 25V) && (2)\\
&= \pm 0,8\ \mathrm{V} && (3)\\
a &= (2,0 \pm 0,1)\cdot 10^{-6}\frac{A}{V^2} && (4)\\
R_V &= \frac{1}{a\cdot U_B} && (5)\\
&= 25\ \mathrm{k\Omega} && (6)\\
R^2 &= 0,9912 && (7)\\
R &= \mathrm{sgn}(R)\cdot\sqrt{R^2} && (8)\\
u_{R_V} &= \pm\sqrt{\left(u_a\frac{\partial R_V}{\partial a}\right)^2 + \left(u_{U_B}\frac{\partial R_V}{\partial U_B}\right)^2 + 2u_a u_{U_B}\frac{\partial R_V}{\partial a}\frac{\partial R_V}{\partial U_B}R} && (9)\\
&= \pm\sqrt{\left(\frac{u_a}{a^2\cdot U_B}\right)^2 + \left(\frac{u_{U_B}}{a\cdot U_B^2}\right)^2 + \frac{2u_a u_{U_B}R}{a^3\cdot U_B^3}} && (10)\\
&= \pm 1\ \mathrm{k\Omega} && (11)
\end{aligned}
$$

Somit erhält man aus der numerischen Auswertung für den Innenwiderstand des Voltmeters den Wert $R_V = (25 \pm 1)$ kΩ.

Abbildung 1: Spannung^{-1}(Widerstand)



Außerdem kann man den Innenwiderstand auch näherungsweise graphisch bestimmen. Dazu berechnet man das arithmetische Mittel der Anstiege der Funktion $F(max)$ mit dem größtmöglichen Anstieg und der Geraden $F(min)$ mit dem kleinstmöglichen Anstieg. Es werden die Intervalle Δx und Δy aus der graphischen Darstellung abgelesen.

$$a_{F(min)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(0,22 - 0,05)V^{-1}}{(101 - 0)k\Omega} \tag{12}$$

$$= 1,68 \cdot 10^{-6} \frac{A}{V^2} \tag{13}$$

$$a_{F(max)} = \frac{y_4 - y_3}{x_2 - x_1} = \frac{(0,28 - 0,05)V^{-1}}{(101 - 0)k\Omega} \tag{14}$$

$$= 2,28 \cdot 10^{-6} \frac{A}{V^2} \tag{15}$$

$$a = \frac{a_{F(max)} + a_{F(min)}}{2} \pm \frac{a_{F(max)} - a_{F(min)}}{2} \tag{16}$$

$$= (2,0 \pm 0,3) \cdot 10^{-6} \frac{A}{V^2} \tag{17}$$

$$R_V = \frac{1}{a \cdot U_B} \tag{18}$$

$$= 25 \text{ k}\Omega \tag{19}$$

$$u_{R_V} = \pm \left\{ u_a \frac{\partial R_V}{\partial a} + u_{U_B} \frac{\partial R_V}{\partial U_B} \right\} \tag{20}$$

$$= \pm \left\{ \frac{u_a}{a^2 \cdot U_B} + \frac{u_{U_B}}{a \cdot U_B^2} \right\} \tag{21}$$

$$= \pm 1 \text{ k}\Omega \tag{22}$$

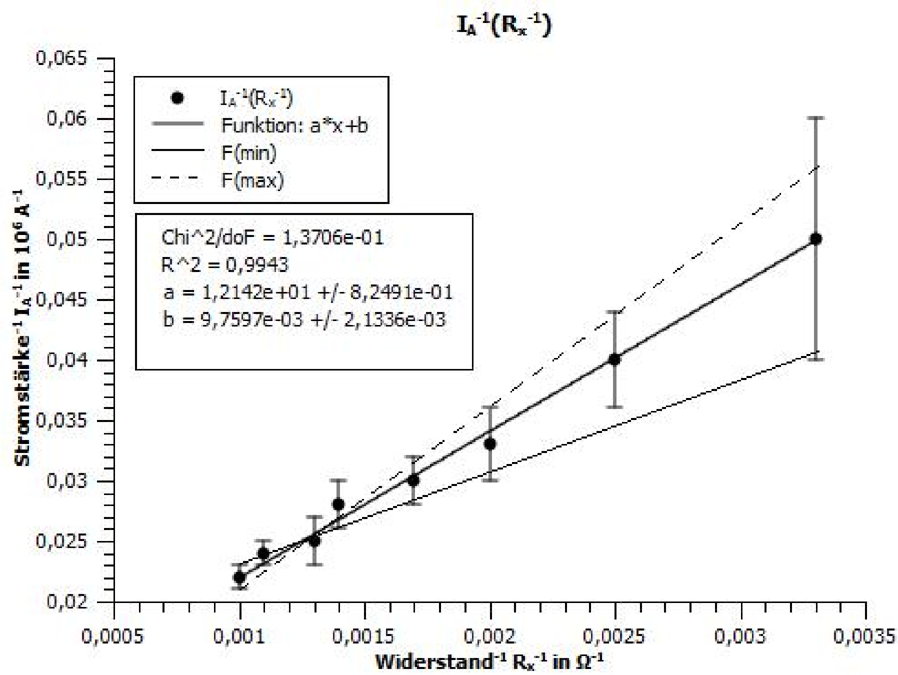
Somit ist das Ergebnis der graphischen Auswertung $R_V = (25 \pm 1)$ kΩ.

3 Amperemeter

Nun wird ein Amperemeter parallel zum variablen Widerstand R_x geschaltet. Hinzu wird die Spannungsquelle U_B und der konstante Vorwiderstand $R_0 = 200\,\mathrm{k\Omega}$ in Reihe geschaltet. Es wird der Strom I_A am Innenwiderstand R_A des Amperemeters in Abhängigkeit von R_x gemessen. Die Unsicherheit von R_x ist wieder vernachlässigbar klein. Außerdem wird die Stromstärke $I_0 = (96 \pm 3) \cdot 10^{-6}$ A bei einem unendlich hohen Widerstand gemessen.

R_x in Ω	I_A in 10^{-6} A
$100 \pm 0,1$	7 ± 3
$200 \pm 0,1$	15 ± 3
$300 \pm 0,1$	20 ± 3
$400 \pm 0,1$	25 ± 3
$500 \pm 0,2$	30 ± 3
$600 \pm 0,2$	33 ± 3
$700 \pm 0,2$	36 ± 3
$800 \pm 0,3$	40 ± 3
$900 \pm 0,3$	42 ± 3
$1000 \pm 0,3$	45 ± 3

Abbildung 2: Stromstärke^{-1}(Widerstand^{-1})



$$
\begin{aligned}
u_{R_x} &= \pm(0,02\Omega + 0,0003\cdot R_x) && (23)\\
u_{I_A} &= \pm(10^{-6}A + 1,5\%\ \mathrm{MSB}) = \pm(10^{-6}A + 0,015\cdot 100\cdot 10^{-6}A) && (24)\\
a &= (12 \pm 1)\cdot 10^6 \frac{V}{A^2} && (25)\\
b &= (10 \pm 2)\cdot 10^3 \frac{1}{A} && (26)\\
R^2 &= 0,9943 && (27)\\
R_A &= \frac{a}{b} = 1,2\ \mathrm{k}\Omega && (28)\\
u_{R_A} &= \pm\sqrt{\left(u_a \frac{\partial R_A}{\partial a}\right)^2 + \left(u_b \frac{\partial R_A}{\partial b}\right)^2 + 2u_a u_b \frac{\partial R_A}{\partial a}\frac{\partial R_A}{\partial b} R} && (29)\\
&= \pm\sqrt{\left(\frac{u_a}{b}\right)^2 + \left(\frac{u_b\cdot a}{b^2}\right)^2 + \frac{2u_a a u_b R}{b^3}} && (30)\\
&= 0,3\ \mathrm{k}\Omega && (31)\\
I_0 &= b^{-1} = 0,10\ \mathrm{mA} && (32)\\
u_{I_0} &= \pm\frac{u_b}{b^2} = 0,02\ \mathrm{mA} && (33)
\end{aligned}
$$

Aus der numerischen Auswertung ergeben sich die Werte $R_A = (1,2 \pm 0,3)\ \mathrm{k}\Omega$ und $I_0 = (0,10 \pm 0,02)\ \mathrm{mA}$.

Diese Werte können nun wiederum auch graphisch bestimmt werden. Dazu wird wie beim Voltmeter zuerst der mittlere Anstieg berechnet. Dann kann b über einen gegebenen Punkt, zum Beispiel dem Schnittpunkt (x_0, y_0) der steilsten und flachsten Geraden, bestimmt werden. Damit lassen sich schließlich auch R_A und I_0 berechnen.

$$
\begin{aligned}
a &= 0,5\cdot\left(\frac{(0,056-0,021)\ 10^6A^{-1}}{(0,033-0,0010)\Omega^{-1}} + \frac{(0,041-0,023)\ 10^6A^{-1}}{(0,033-0,0010)\Omega^{-1}}\right) && (34)\\
&\quad \pm 0,5\cdot\left(\frac{(0,056-0,021)\ 10^6A^{-1}}{(0,033-0,0010)\Omega^{-1}} - \frac{(0,041-0,023)\ 10^6A^{-1}}{(0,033-0,0010)\Omega^{-1}}\right) && (35)\\
&= (12 \pm 4)\cdot 10^6 \frac{V}{A^2} && (36)\\
b &= y_0 - a\cdot x_0 \pm u_a\cdot x_0 = (0,025 - 12\cdot 0,0013 \pm 4\cdot 0,0013)\cdot 10^6A^{-1} && (37)\\
&= (0,010 \pm 0,005)\cdot 10^6A^{-1} && (38)\\
R_A &= \frac{a}{b} \pm \left\{\frac{u_a}{b} + \frac{u_b\cdot a}{b^2}\right\} && (39)\\
&= (1,1 \pm 0,9)\ \mathrm{k}\Omega && (40)\\
I_0 &= \frac{1}{b} \pm \frac{u_b}{b^2} && (41)\\
&= (0,10 \pm 0,05)\ \mathrm{mA} && (42)
\end{aligned}
$$

Somit erhält man aus der graphischen Abschätzung die Werte $R_A = (1,1 \pm 0,9)\ \mathrm{k}\Omega$ und $I_0 = (0,10 \pm 0,05)\ \mathrm{mA}$.

4 Kritische Ergebniseinschätzung

Dank der Präzisionsdekadenwiderstande sind die Unsicherheiten aller R_x vernachlässigbar klein. Beim rechnerischen Geradenausgleich wurden deshalb die zugehörigen Vertrauensbereiche weder eingezeichnet noch rechnerisch berücksichtigt.

gemessen	numerisch	graphisch
Innenwiderstand vom Voltmeter R_V in kΩ		
	25 ± 1	25 ± 1
Innenwiderstand vom Amperemeter R_A in kΩ		
	$1,2 \pm 0,3$	$1,1 \pm 0,9$
Stromstärke für unendlichen Widerstand I_0 in mA		
$0,096 \pm 0,003$	$0,10 \pm 0,02$	$0,10 \pm 0,05$

Erfreulicherweise stimmen alle Werte der selben Größe innerhalb ihres Vertrauensbereiches überein. Wie zu erwarten war, ist außerdem zu erkennen, dass die Unsicherheiten der durch graphische Auswertung erhaltenen Werte gleich oder größer sind als die der numerisch erhaltenen Werte. Die Innenwiderstände beider Geräte sind wie erwartet endlich, also weder verschwindend klein noch sehr groß.

Literatur

[1] U. Müller, *Physikalisches Grundpraktikum – Elektrodynamik und Optik*, E2, Humboldt-Universität zu Berlin, 2005