INSTITUT FÜR PHYSIK DER
HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

Physikalisches Grundpraktikum II

Versuchsprotokoll

P6 : E7 – Kompensationsmethode

Versuchsort: Raum 316 - 1
Versuchsbetreuer: B.Sc. Patrick Rieck

Name:
Drobniewski, Kai; Matr.Nr.: [redacted]

Versuchspartner:
Kirsten, Stephan; Matr.Nr.: [redacted]

24. November 2009

Inhaltsverzeichnis

1. ABSTRAKT

In dem Versuch soll die Urspannung U_0 und der Innenwiderstand R_i einer Spannungsquelle (eines Trockenelements) bestimmt werden. Dazu verwenden wir die Poggendorffsche Kompensationsmethode.

Da generell keine idealen Spannungsquellen existieren und sie deshalb einen Innenwiderstand besitzen, ist es wichtig diesen und die Urspannung zu kennen, um gerade bei Schaltungen mit gegenüber R_i kleinen Widerständen exakte Messungen durchzuführen. Ein Trockenelement wird z.B. in Fotoapparaten verwendet.

2. VERSUCHSAUFBAU UND –DURCHFÜHRUNG

Am Anfang des Versuchs wurde einem Normalelement (Spannungsquelle U_1) mithilfe einer Potentiometerschaltung eine Spannung U_x entgegen geschaltet, die durch die Spannungsquelle U_2 über dem Widerstand R_x abfällt.

Dieser Widerstand R_x wurden dann solange variiert, bis im Galvanometer (Unsicherheit: 1,5% vom MBE) bei einem Messbereich von 30μA Stromlosigkeit angezeigt wurde. In dieser Situation entspricht nun die Spannung U_x der Spannung des Normalelements.

Nach der gefolgten Berechnung von U_2 wurde das Normalelement durch ein Trockenelement mit einem eingebauten Widerstand ersetzt und der Widerstand so variiert, dass wir bei verschiedenen Stromstärken die dazugehörigen Klemmspannungen U_K (durch erneute Variation von R_x bis zur Kompensation) bestimmen konnten.

Aus einer linearen Regression wurden daraufhin die gesuchten Werte für die Urspannung und den Innenwiderstand bestimmt.

Für detailliertere Informationen betrachte man das Script.

Benutzte Messmittel, bzw. angegebene Unsicherheiten:

MESSGRÖẞE/MESSINSTRUMENT	MESSUNSICHERHEIT
Thermometer	0,15°C
Strommesser	2,5% vom MBE
Länge	0,5 mm

Berechnungen erfolgten mit „Microsoft Excel“ und unter Verwendung von „QtiPlot“.

Folgende Formeln aus dem Script wurden verwendet:

$$U_K = U_0 - I \cdot R_i \qquad (1)$$

U_K – Klemmspannung

U_0 – Urspannung

I – Stromstärke

R_i – Innenwiderstand

$$U_x = U_2 \frac{x}{L} \qquad (2)$$

U_x – kompensierende Spannung

U_2 – Spannung von Quelle 2

x – Position Schleifkontakt

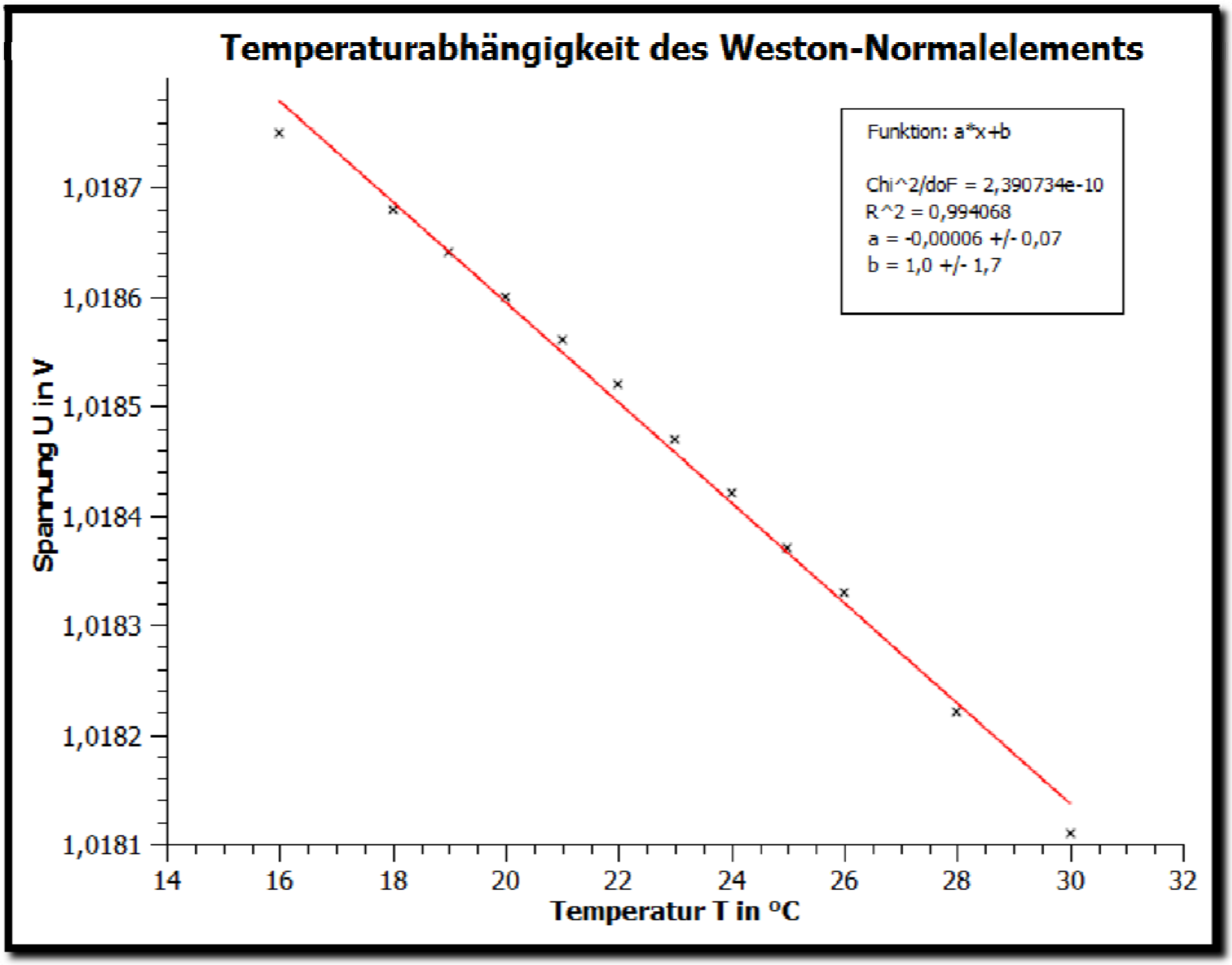
L – Länge des Drahtes

3. Messergebnisse und Auswertung

3.1 Bestimmung der Spannung U_2

Zur Bestimmung der Spannung U_1 des Normalelements wurde die Temperatur $T = (20{,}1 \pm 0{,}16)°C$ gemessen (Skaleneinteilung 0,1°C).

Mithilfe der dem Normalelement beigelegten Tabelle können wir nun die Spannung U_1 mit Unsicherheit aus der grafischen Darstellung der Werte ermitteln.



Die Gerade wurde durch lineare Regression mit instrumenteller Gewichtung erstellt.

Berechnen wir nun die zu unserer Temperatur gehörige Spannung mittels der Geradenfunktion $U_{1,a} = a \cdot T + b$, so erhalten wir $U_{1,a} = (1 \pm 2)V$,
wobei sich die Unsicherheit aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für unkorellierte Größen unter Berücksichtigung der Unsicherheiten vom Anstieg a, der Temperatur T und des Achsenabschnittpunktes b ergibt.

$$u_{U_{1,a}} = \sqrt{\left(u_a \frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 + \left(u_b \frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 + \left(u_T \frac{\partial f}{\partial T}\right)^2}$$

Dieser Wert besitzt aber aufgrund der Unsicherheiten für a und b durch die lieare Regression eine Unsicherheit, die doppelt so groß ist, wie der Wert. Aus diesem Grund können wir diesen Wert nicht sinnvoll verwenden.

Diese Unsicherheit basiert aber nur auf der Regression an sich, da eine hohe Unsicherheit entsteht, wenn keine Fehler angegeben werden, nach denen man gewichten kann.

Deshalb kann man auch mittels der Geradenfunktion den Wert wie zuvor berechnen, zusätzlich aber noch den Wert für die gemessene Temperatur, addiert mit deren Unsicherheit und einmal, wenn die Unsicherheit abgezogen wird.
Die Differenz zwischen dem ermittelten Wert und den Extrema entspricht dann der Unsicherheit des Wertes. Dadurch erhalten wir:

$$U_{1,G} = (1{,}018591 \pm 0{,}000007)V$$

Eine alternative Methode ist das Ablesen des Wertes aus der Tabelle mit dem Wert $U_{20} = 1{,}0186V$.

Tabelle des Normalelements

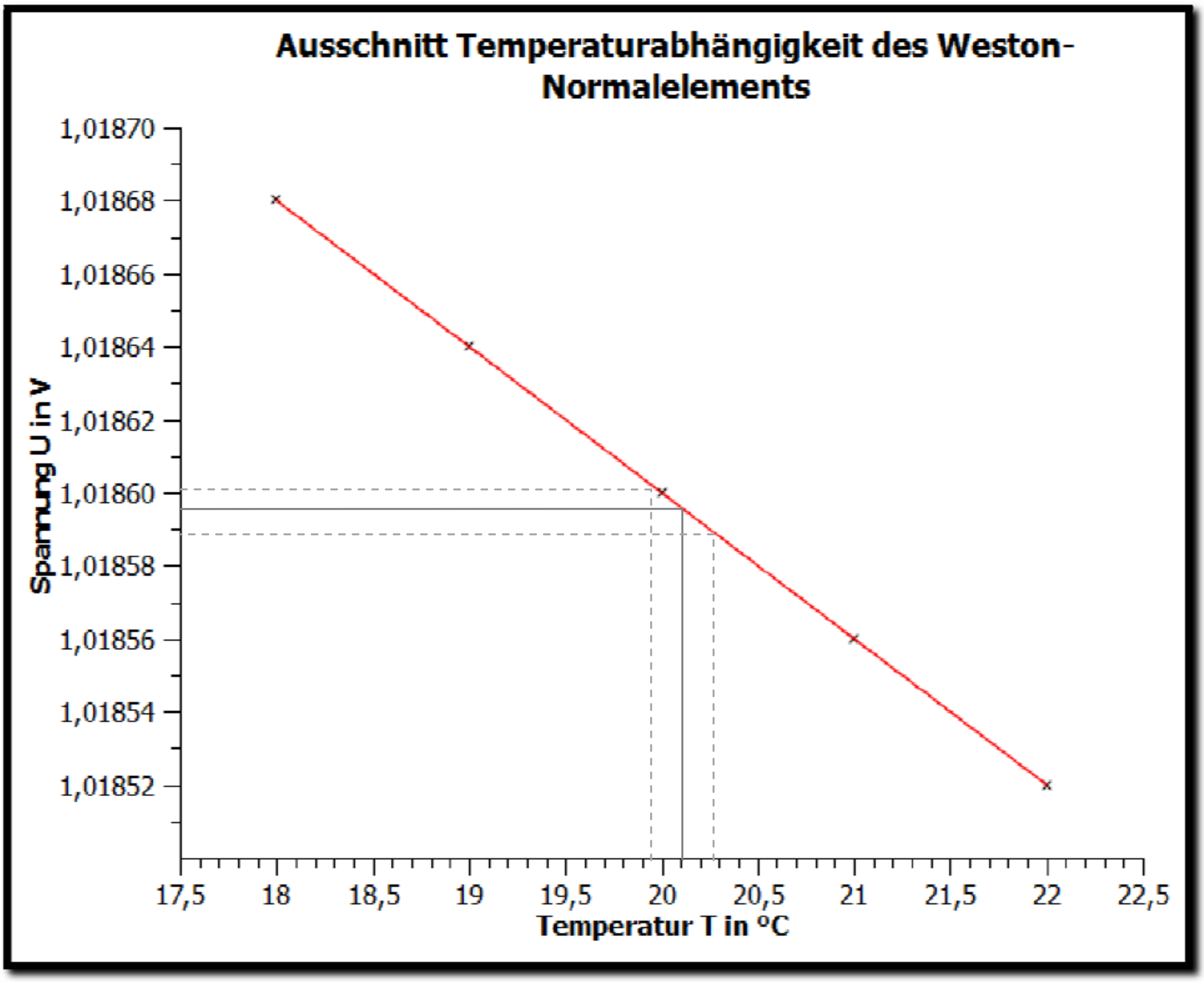
$T\ in\ °C$	$U_T - U_{20}$ **in mV**
16	+0,15
18	+0,08
19	+0,04
20	$\pm$0
21	-0,04
22	-0,08
23	-0,13
24	-0,18
25	-0,23
26	-0,27
28	-0,38
30	-0,49

In diesem Fall würde U_T unserer Spannung U_1 entsprechen und die Differenz wäre bei Annahme einer Linearität um die gemessene Temperatur $U_T - U_{20} = -0{,}004mV$.

Lesen wir auch den maximalen und minimalen Wert ab, die sich durch die Unsicherheit der Temperatur ergeben, erhalten wir:

$$U_{1,T} = (1{,}018596 \pm 0{,}000006)V$$

Für diese Methode verwenden wir im Gegensatz zur vorherigen nicht die durch die Regression ermittelte Gerade, sondern eine Gerade durch die fünf Werte um 20°C, da diese eine exakte Linearität darstellen und unseren gesuchten Wert sehr genau wiedergeben.



In der dazu erstellten Grafik stellt die durchgezogene Linie dem abgelesenen Wert dar, während die gestrichelten dem Unsicherheitsintervall entsprechen.

Vergleicht man die beiden ermittelten Werte, so erkennt man eine sehr geringe Unsicherheit, was auf eine hohe Präzision der Messung hindeutet.
Außerdem existiert nur eine geringe Abweichung der Werte voneinander und eine fast identische Unsicherheit. Die Ergebnisse liegen auch im Intervall des jeweils anderen.
Demnach dürfte es nur geringe Abweichungen in den weiteren Berechnung geben.
Trotzdem wurde zur Sicherheit mit beiden weitergerechnet.

Da wir nun zur Berechnung der Spannung U_2 die Position des Schleifkontakts bei Stromlosigkeit benötigen, haben wir 10-mal die Position bestimmt und bilden daraus den Mittelwert und die Standartabweichung, die mit der Unsicherheit der Längenmessung addiert die Gesamtunsicherheit ergibt (Größtfehlerabschätzung).

Dabei ist zu erwähnen, dass die Position während der ersten 5 Messungen von rechts heran bestimmt wurde, während wir bei den letzten 5 Messungen den Schleifkontakt von links annäherten.
Dadurch sollte die Unsicherheit in der Position erfasst werden, die durch die Begrenzung durch den Messbereich des Galvanometers auftritt.

Für die Postion des Schleifkontaktes bei Stromlosigkeit erhalten wir somit $x = (477{,}65 \pm 0{,}74)mm$, bei einer Gesamtlänge des Drahtes von $L = (1000 \pm 1)mm$.

Nun müssen wir nur noch Formel (2) umstellen und erhalten unsere gesuchte Spannung U_2, wobei sich die Unsicherheit analog zu $U_{1,a}$ aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für unkorellierte Größen unter Berücksichtigung der Unsicherheiten der Position x, der Länge L und der Spannung U_1, die bei Stromlosigkeit gleich U_x ist.

Unter Verwenung von $U_{1,T}$ ergibt sich: $$U_{2,T} = \underline{\underline{(2{,}133 \pm 0{,}004)V}}$$

Verwenden wir $U_{1,G}$ erhalten wir: $$U_{2,G} = \underline{\underline{(2{,}133 \pm 0{,}004)V}}$$

Die Unsicherheiten unterscheiden sich erst ab der 5. Nachkommastelle und die Werte an sich ebenfalls. Da die Werte aber durch die Rundung identisch sind, erfolgt somit die weitere Berechnung mit diesem einen Wert.

Die größte Auswirkung auf die Unsicherheit der Spannung hat die Unsicherheit der Position des Schleifkontakts mit etwa 50%, während die Unsicherheit von U_1 so gut wie keine Auswirkungen hat, was man bei der geringen Unsicherheit auch erwarten konnte.

Will man also die Unsicherheit von U_2 verringern, muss man die Bestimmung der Position des Schleifkontaktes verbessern.

Als Vergleichswert haben wir auch nich den Wert der Spannung von der Spannungsquelle U_2 abgelesen. Es wurde der Wert $U_{2,v} = (2{,}2 \pm 0{,}7)V$ angezeigt.

Dieser Wert liegt nicht innerhalt der Unsicherheit unserer ermittelten Werte, anders herum unsere aber in seinem Intervall. Die Unsicherheit des Vergleichswert wurde pythagoräisch aus der Messunsicherheit des Geräts (1,5% von 30V) und der Ablesegenauigkeit von einem halben Skalenteil (0,5V) ermittelt, wobei beide gleich schwer wichten.

Somit ist unser ermittelter Wert also bestätigt und stellt sich außerdem als genauer die Anzeige der Spannungsquelle heraus.

3.2 Bestimmung der Urspannung und des Innenwiderstandes

Um nun die Urspannung und den Innenwiderstand des Trockenelements zu bestimmen wurde der beim Trockenelement eingebaute Widerstand so verändert, dass wir verschiedene Werte für die Stromstärke gemessen haben.

Für jede von diesen haben wir den Schleifkontakt so verschoben, dass wir erneut beim Galvanometer eine Stromlosigkeit angezeigt bekommen haben.

Aus der Position des Schleifkontakts, der Länge des Drahtes und dem in 3.1 ermittelten Wert für U_2 können wir nun die Klemmspannung U_K nach Formel (2) berechnen, wobei diese dem in der Formel gegebenen U_x entspricht.

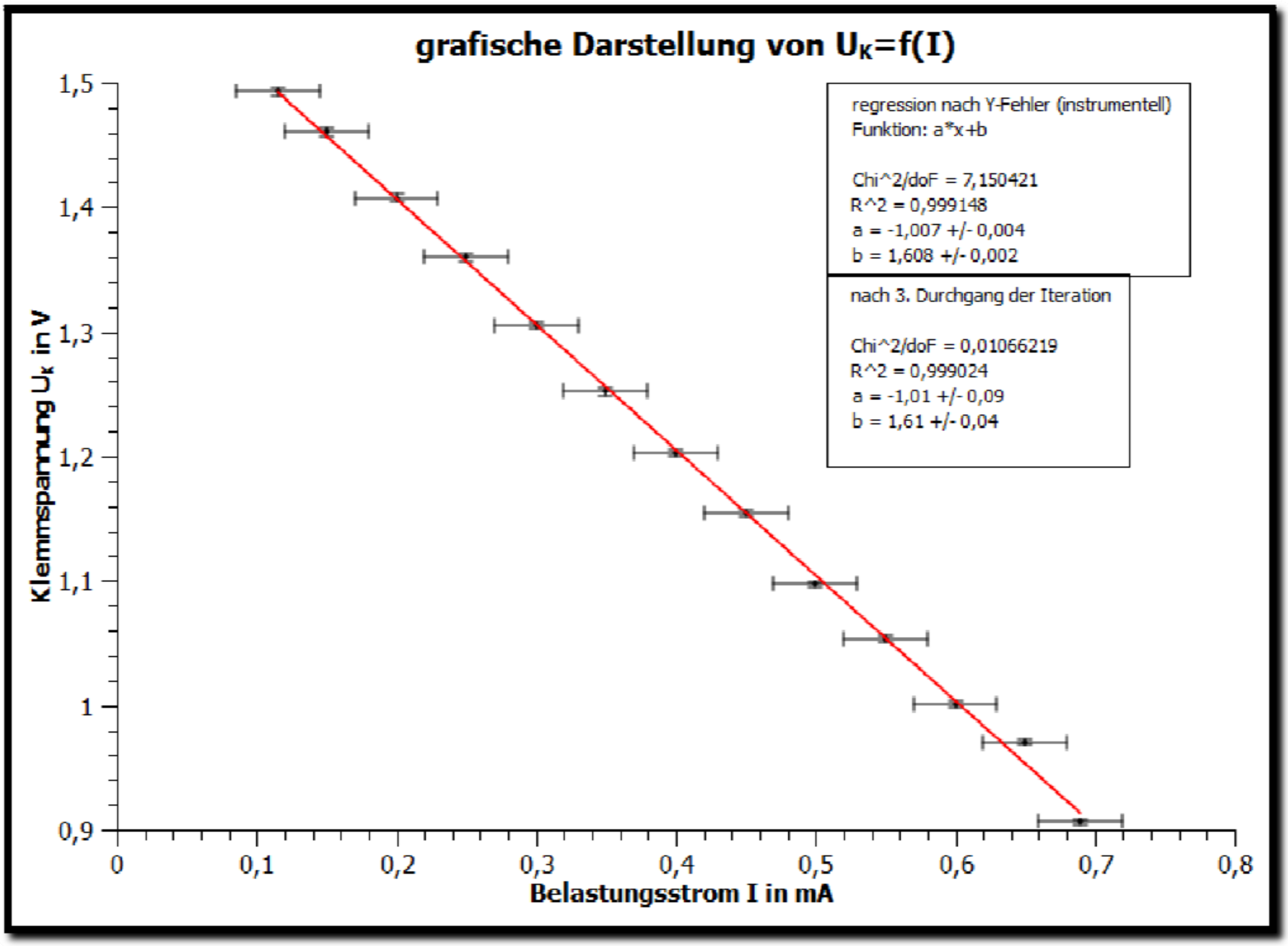
Die Unsicherheit ergibt sich analog zu 3.1 aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für unkorrelierte Größen unter Berücksichtigung der Unsicherheiten der zuvor genannten Größen.

Die Ergebnisse wurden in einer Tabelle zusammengetragen.

Messergebnisse bei der Schaltung mit Trockenelement

I in mA	u_I in mA	x in mm	u_x in mm	U_K in V	u_{U_K} in V
0,115	0,03	700,0	0,5	1,4928	0,0033
0,15	0,03	685,0	0,5	1,4608	0,0032
0,20	0,03	660,0	0,5	1,4075	0,0031
0,25	0,03	637,5	0,5	1,3595	0,0030
0,30	0,03	612,0	0,5	1,3051	0,0029
0,35	0,03	587,0	0,5	1,2518	0,0028
0,40	0,03	564,0	0,5	1,2027	0,0027
0,45	0,03	541,5	0,5	1,1548	0,0026
0,50	0,03	514,5	0,5	1,0972	0,0025
0,55	0,03	494,0	0,5	1,0535	0,0025
0,60	0,03	469,5	0,5	1,0012	0,0024
0,65	0,03	455,0	0,5	0,9703	0,0023

Diese Werte wurden in einer grafischen Darstellung aufgetragen und mittels linearer Regression eine Gerade erstellt.



Die lineare Regression wurde mit der instrumentellen Gewichtung des Y-Fehlers durchgeführt und mit dem ausgerechneten Anstieg a, den Y-Fehlern und den X-Fehlern phytagoräisch eine effektive Gewichtung σ nach $\sigma^2 = {u_y}^2 + a^2 \cdot {u_x}^2$ berechnet.

Danach erfolgte eine weitere Regression mit dieser Gewichtung, woraus sich eine Berechnung des Anstiegs mittels iterativer Regression unter Berücksichtigung des Y- und des X-Fehler ergibt.

Da das normierte Chi^2 nach einer normalen instrumentell gewichteten Regression relativ groß ist, da der Y-Fehler verschwindend gering ist, während der X-Fehler dominierend ist, ist das iterative Verfahren hier angebracht.

Betrachten wir nun Formel (1), so können wir beim Vergleich mit der Geradengleichung $U_K = a \cdot I + b$ unsere gesuchten Werte für die Urspannung und den Innenwiderstand ableiten. Demnach entspricht der Achsenabschnittspunkt b der Urspannung U_0 und der Anstieg a dem negativen Innenwiderstand R_i.

Somit erhalten wir: $U_0 = \underline{\underline{(1{,}61 \pm 0{,}04)V}}$ $R_i = \underline{\underline{(1008 \pm 92)\Omega}}$

Hätten wir die Iteration nicht durchgeführt, hätten wir zwar ungefähr die gleichen Werte erhalten ($U_{0,ohne} = (1{,}608 \pm 0{,}002)V,\ \ R_{i,ohne} = (1007 \pm 4)\Omega$), aber um eine Zehnerpotenz kleinere Unsicherheiten, da der wesentlich stärkere X-Fehler bei der Regression vernachlässigt worden wäre.

Dies wären wirklich sehr geringe Unsicherheiten, die anzuzweifeln wären, während wir durch die Iteration realistische Unsicherheiten erhalten, wie man sie erwarten würde.
Daraus kann man bereits sehen, dass die Unsicherheit hauptsächlich durch die Unsicherheit der Strommessung beeinflusst wird.

Der Y-Fehler wird dabei am stärksten von dem in 3.1 berechneten Wert für die Spannung U_1 beeinflusst und zusätzlich noch durch die Unsicherheiten von x und L, genau wie die Spannung schon an sich.

4. Fehleranalyse und Ergebniseinschätzung

4.1 Auswertung der Ergebnisse

Wie in 3.1 bereits erläutert, konnte die Spannung U_1 sehr genau bestimmt werden.
Dies lag vor allem am Normalelement, dessen Spannung für 20°C bestimmt war und bei der unsere gemessene Temperatur sehr nah an diesem Wert lag, wodurch sich dieser Wert der Spannung nur geringfügig änderte.

Man könnte das noch optimieren, indem man z.B. ein Digital-Präzisionsthermometer verwenden würde, um die Messgenauigkeit der Temperatur zu erhöhen.

Da aber die Unsicherheit vor allem durch die Unsicherheit bei der Positionsbestimmung des Schleifenkontakts und durch die Unsicherheit der Länge des Drahtes bestimmt wurde, weshalb man diese minimieren sollte.

Bei der Bestimmung der Urspannung und des Innenwiderstandes ergab sich die Unsicherheit zum größten Teil aus dem X-Fehler (der Strommessung) und dem in 3.1 berechneten Wert für U_1, wie in 3.2 bereits diskutiert.

Wenn wir also die Positionsbestimmung und die Unsicherheit der Länge optimieren, wird nicht nur die Bestimmung von U_1 genauer, sondern gleichzeitig der Y-Fehler in 3.2 und somit die Urspannung und der Innenwiderstand.

Dies könnte man z.B. durch eine Längenmessung mittels Laser erreichen. Außerdem könnten wir den X-Fehler minimieren, indem wir die Strommessung durch z.B. empfindlichere Geräte mit höheren Genauigkeiten durchführen.

$$U_0 = \underline{\underline{(1{,}61 \pm 0{,}04)V}} \qquad R_i = \underline{\underline{(1008 \pm 92)\Omega}}$$

Zum Vergleich für unsere ermittelten Wert können wir eine Alkali-Mangan-Batterie verwenden, die eine Nennspannung von 1,5V und eine Leerlaufspannung bei 20°C von $U_{0,v} = 1{,}57V - 1{,}63V$, sowie einen Innenwiderstand von $R_{i,v} = 0{,}15\Omega$.

Die gesamte Spannungsbreite liegt auch innerhalb unseres ermittelten Wertes, während der Widerstand sehr viel geringer ist, als der ermittelte. Daraus können wir nur schlussfolgern, dass es sich nicht um eine Alkali-Mangan-Batterie handelt.

Außerdem nimmt der Innenwiderstand von Batterien über die Zeit zu (Lebenszeit einer Batterie) und ist auch höher, wenn die Batterie schlecht geladen oder kalt ist (man vergleiche das Starten eines Autos im Winter).

Nicht berücksichtigte Fehlerquellen bei der Messung waren Innenwiderstände der Kabel, wobei diese aufgrund der geringen Querschnittsfläche und Länge vernachlässigt werden können. Zum Anderen entsteht durch die Bewegung des Schleifenkontakts ein Abrieb auf dem Draht, was eine Inhomogenität dieses zur Folge hat.

Dieser Effekt dürfte aber ebenfalls zu vernachlässigen sein. Sollte sich jedoch ein größerer Einfluss bei einer Messung bemerkbar machen, wäre es ratsam den Draht auszutauschen.

Zum Schluss sei noch die Ungenauigkeit in der Bestimmung des Stromlosen Punktes genannt. Während der Messung konnte der Punkt manchmal nicht genau bestimmt werden, da der Schleifenkontakt nicht exakt genug verschoben werden konnte.

Hier würde sich eine mechanische Vorrichtung als nützlich erweisen, die den Schleifenkontakt präzise um den Bruchteil eines halben Millimeters bewegen kann und diese Bewegung in einer Längenangabe auch gleich angibt.

Trotzdem erwies sich die Messmethode als sehr genau und zuverlässig bei der Bestimmung der Urspannung und des Innenwiderstands.