

F2: Volumenmessung

Verfasserin: Dan-Nha Huynh, 512230

Versuchspartner: Marco Kraft

Versuchsbetreuer: V. Sherer

Versuchsplatz: 6

Versuchsdatum: 04. Juni 2008

1. ZIELSTELLUNG	3
2. METHODE 1: ÜBERLAUFGEFÄß	3
2.1 DURCHFÜHRUNG	3
2.2 VERWENDETE GERÄTE	3
2.3 VERSUCHSAUFBAU	3
2.4 MESSWERTE	4
2.5 BERECHNUNG DES ZYLINDERVOLUMENS	4
2.6 MESSUNSIKERHEIT	4
2.7 KORREKTUR	5
2.8 ERGEBNIS	5
3. METHODE 2: GEOMETRIE DES KÖRPERS	5
3.1 DURCHFÜHRUNG	5
3.2 VERWENDETE MESSGERÄTE	5
3.3 MESSDATEN	6
3.4 BERECHNUNG DES ZYLINDERVOLUMENS	6
3.5 MESSUNSIKERHEIT	7
3.5.1 Messunsicherheit von h	7
3.5.2 Messunsicherheit von d	7
3.6 ERGEBNIS	7
3.7 KRITISCHE BETRACHTUNG	8
4. METHODE 3: AUFTRIEBSMESSUNG	8
4.1 DURCHFÜHRUNG	8
4.2 VERWENDETE GERÄTE	8
4.3 VERSUCHSAUFBAU	8
4.4 MESSDATEN	8
4.5 BERECHNUNG DES ZYLINDERVOLUMENS	9
4.6 MESSUNSIKERHEIT	9
4.6.1 Statistische Messunsicherheit	9
4.6.2 Systematischer Restfehler	9
4.7 KORREKTUR	10
4.8 ERGEBNIS	11
4.9 KRITISCHE BETRACHTUNG	11
5. GEGENÜBERSTELLUNG DER MESSMETHODEN	11
6. GEWICHTETES MITTEL	12

1. Zielstellung

Ermittlung der am besten geeigneten von drei Messmethoden zur Volumenbestimmung eines Vollzylinders.

Hinweis: Für weitere Informationen zu den Aufgabenstellungen sowie den physikalischen und rechen-technischen Grundlagen dieses Versuches sei auf die beiden Skripteⁱ verwiesen.

2. Methode 1: Überlaufgefäß

Durchführung

Ein Zylinder wird in ein mit Wasser gefülltes Glasgefäß, welches mit einem Überlauf versehen ist, eingelassen. Die von dem Zylinder verdrängte Wassermenge wird in einem Messzylinder aufgefangen und dessen Volumen mit diesem gemessen. Das Volumen der verdrängten Wassermenge entspricht dabei dem Volumen des eingetauchten Körpers.

Hinweis: Es ist zu beachten, dass sich in dem Messzylinder bereits Wasser befinden sollte, um u.a. eine bessere Ablesung zu gewährleisten. Die zu Anfang in dem Messzylinder befindliche Wassermenge V_A muss unbedingt vor dem Eintauchen des Zylinders ins Überlaufgefäß notiert werden.

Verwendete Geräte

Überlaufgefäß, Messzylinder ($e_s = \pm 0,5\text{ml}$), digitales Thermometer ($e_s = \pm 0,001 \cdot \theta + 2\text{LSD}$)

Versuchsaufbau

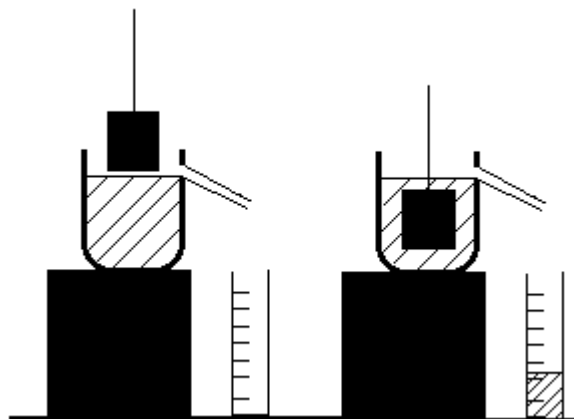


Abbildung 2.3-1ⁱⁱ

Messwerte

Temperatur: $\theta_M = 28,5^\circ\text{C}$ (Die Temperatur wurde während des Versuches dreimal in regelmäßigen Abständen gemessen. Es wurden jedoch keine Änderungen jener Temperatur registriert.)

Messung i	Endvolumen V_e/ml	Anfangsvolumen V_a/ml	Volumendifferenz $V_e - V_a/\text{ml}$
1	41,5	13,5	28,0
2	39,0	11,0	28,0
3	37,0	8,5	28,5
4	38,5	9,5	29,0
5	37,0	8,5	28,5
6	44,5	14,5	30,0
7	35,0	7,0	28,0

Tabelle 2.4-1

Berechnung des Zylindervolumens

Aus den Volumendifferenzen kann als bester anzunehmender Wert der arithmetische Mittelwert \bar{V} aller Volumina gebildet werden. Dabei ist hier der Stichprobenumfang $n = 7$.

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^n \frac{V_{ie} - V_{ia}}{n} \quad (\text{Gl. 2.5-1})$$

$$\underline{\underline{\bar{V} \approx 28,571\text{ml}}}$$

Messunsicherheit

Da hier $n \geq 6$, kann hier die statistische Messunsicherheit e_z mit Hilfe des Vertrauensbereiches $\bar{\sigma}$ ausgedrückt werden:

$$e_z(V) = \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^7 ((V_{ie} - V_{ia}) - \bar{V})^2}{42}} \quad (\text{Gl. 2.6-1})$$

$$\underline{\underline{e_z = 0,28\text{ml}}}$$

Der Gerätefehler des Messzylinders (systematische Messabweichung) ergibt sich zu:

$$e_s(V) = |50|\text{ml}$$

Somit ergibt sich nach pythagoreischer Fehlerfortpflanzung für die Messunsicherheit von V:

$$u_V = \sqrt{e_z^2(V) + e_s^2(V)} \quad (\text{Gl. 2.6-2})$$

$$\underline{\underline{u_V = 0,57\text{ml}}}$$

Korrektur

Der Gerätefehler des Messzylinders ergibt sich für einen Nenninhalt von $V_N = 50\text{ml}$ bei einer Nenntemperatur von $\theta_N = 20^\circ\text{C}$ zu $\Delta V = \pm 50\text{ml}$

Aufgrund der Wärmeausdehnung des Messzylinders muss hier jedoch eine Korrektur des Gerätefehlers vorgenommen werden.

$$\Delta V = \bar{V} \gamma (\theta_M - \theta_N) \quad (\text{Gl. 2.7-1})$$

γ : Kubischer thermischer Ausdehnungskoeffizient ($\gamma = 2,7 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$)

$$\underline{\underline{\Delta V = 0,007\text{ml}}}$$

Dieses ist die Korrektur e_c des in 2.5 errechneten arithmetischen Mittelwertes. Die systematische Messunsicherheit des Thermometers bleibt an dieser Stelle unberücksichtigt.

Ergebnis

$$V = \bar{V} + e_c \pm u_V = (28,6 \pm 0,6)\text{ml}$$

Kritische Betrachtung

Aufgrund der Oberflächenspannung des Wassers läuft die gesamte vom Zylinder verdrängte Wassermenge nicht vollständig in den Messzylinder, sondern verharrt in weiten Teilen der Apparatur. Dies gilt insbesondere für den Überlauf des Glasgefäßes

3. Methode 2: Geometrie des Körpers

Durchführung

Mit Hilfe einer Bügelmessschraube wird zehnmal der Durchmesser d des Zylinders gemessen. Anschließend sei mit einem Messschieber die Höhe h des Zylinders zu messen.

Verwendete Messgeräte

Bügelmessschraube ($e_s = 5 \cdot 10^{-6}\text{m} + 10^{-5} \cdot 1$), Messschieber ($e_s = 5 \cdot 10^{-5}\text{m} + 10^{-4} \cdot 1$)

Messdaten

Messung i	d _i /cm	h _i /cm
1	2,430	6,17
2	2,429	6,17
3	2,428	6,17
4	2,427	6,18
5	2,427	6,18
6	2,429	6,17
7	2,429	-
8	2,427	-
9	2,427	-
10	2,429	-

Tabelle 3.3-1

Berechnung des Zylindervolumens

Aus den Werten zum Durchmesser d und zur Höhe h werden jeweils die arithmetischen Mittelwerte gebildet:

$$\bar{d} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} d_i \quad (\text{Gl. 3.4-1})$$

\bar{d} : Mittelwert von d

n_1 : Stichprobenumfang ($n_1=10$)

$$\underline{\underline{\bar{d} \approx 2,43\text{cm}}}$$

$$\bar{h} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} h_i \quad (\text{Gl. 2.02})$$

\bar{h} : Mittelwert von h

n_2 : Stichprobenumfang ($n_2=6$)

$$\underline{\underline{\bar{h} \approx 6,17\text{cm}}}$$

Aus den Mittelwerten wird nun das mittlere Volumen \bar{V} des Probezylinders als geometrischer Körper berechnet:

$$\bar{V} = \frac{\pi}{4} \cdot \bar{d}^2 \cdot \bar{h} \quad (\text{Gl. 3.4-2})$$

$$\underline{\underline{\bar{V} \approx 28,59\text{ml}}}$$

Messunsicherheit

Messunsicherheit von h

Entsprechend 2.6 wird die statistische Messabweichung e_z von h durch den Vertrauensbereich ausgedrückt:

$$e_z(h) = \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (h_i - \bar{h})^2}{6(6-1)}} \approx \underline{\underline{2,11 \cdot 10^{-3} \text{ cm}}} \quad (\text{Gl. 3.5.1-1})$$

Die systematische Messabweichung e_s für den Messschieber ist gegeben durch:

$$e_s(h) = (5 \cdot 10^{-5} \text{ m} + \bar{h} \cdot 10^{-4}) \approx \underline{\underline{5,62 \cdot 10^{-3} \text{ cm}}} \quad (\text{Gl. 3.5.1-2})$$

Die Messunsicherheit u von h ergibt sich somit nach pythagoreischer Fehlerfortpflanzung aus systematischer und statistischer Messabweichung:

$$u_h = \sqrt{e_z^2(h) + e_s^2(h)} \quad (\text{Gl. 3.5.1-3})$$
$$\underline{\underline{u_h \approx 6,00 \cdot 10^{-3} \text{ cm}}}$$

Messunsicherheit von d

Die Berechnung der Messunsicherheit von d geschieht analog zu 3.5.1.

$$e_z(d) = \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (d_i - \bar{d})^2}{10(10-1)}} \approx \underline{\underline{3,59 \cdot 10^{-4} \text{ cm}}} \quad (\text{Gl. 3.5.2-1})$$

$$e_s(d) = (5 \cdot 10^{-6} \text{ m} + \bar{d} \cdot 10^{-5}) \approx \underline{\underline{5,24 \cdot 10^{-4} \text{ cm}}} \quad (\text{Gl. 3.5.2-2})$$

$$u_d = \sqrt{e_z^2(d) + e_s^2(d)} \approx \underline{\underline{6,35 \cdot 10^{-4} \text{ cm}}} \quad (\text{Gl. 3.5.2-3})$$

Die Messunsicherheit von V ergibt sich dann aus der pythagoreischen Fehlerfortpflanzung der errechneten Messunsicherheiten von h und d .

$$u_v = \sqrt{\left(\frac{\pi d h}{2} \cdot u_d\right)^2 + \left(\frac{\pi d^2}{4} \cdot u_h\right)^2} \quad (\text{Gl. 3.5-1})$$
$$\underline{\underline{u_v = 0,032 \text{ ml}}}$$

Ergebnis

$$V = \bar{V} + u_v = (28,59 \pm 0,03) \text{ ml}$$

Kritische Betrachtung

Die in 3.4 verwendete Formel (Gl. 3.4-2) gilt streng genommen nur für perfekte Zylinder. Da es sich bei dem Probezylinder jedoch nicht um einen solchen sondern nur näherungsweise um einen zylindrischen Körper handelt, erweist sich Gl. 3.4-2 als ungenau.

4. Methode 3: Auftriebsmessung

Durchführung

Vor der eigentlichen Versuchsdurchführung muss der Waagebalken der zu verwendenden Laborwaage mit Hilfe der Schraubgewichte horizontal ausgerichtet werden. Dann kann mit den Messungen begonnen werden.

Gewogen wird zunächst der Probekörper in Luft. Dies geschieht zweimal. Anschließend wird jener Körper in Wasser getaucht und gewogen. Dieses wird wiederum wiederholt. Zuletzt wird die Empfindlichkeit E der Waage festgestellt, indem eine Zusatzmasse $\Delta m'$ jeweils in Luft und in Wasser gewogen wird und der Zeigerausschlag der Waage Δa abgelesen wird.

Verwendete Geräte

Waage, diverse Massestücke, Becherglas

Versuchsaufbau

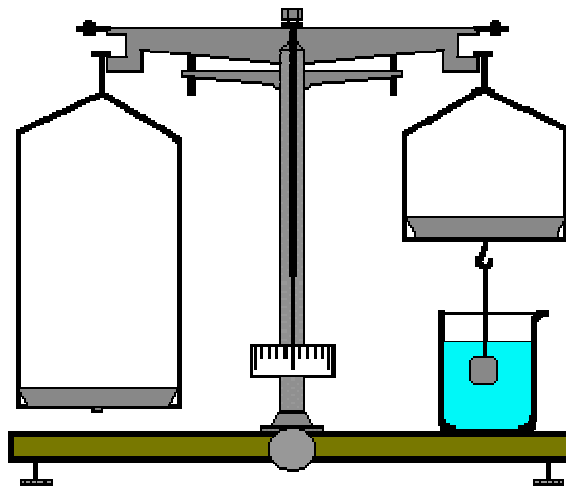


Abbildung 4.3-1ⁱⁱⁱ

Messdaten

Messung i	Ausgleichsmasse in Luft m_{1i}/g	Ausgleichsmasse in Wasser m_{2i}/g
1	40,07	12,8
2	40,05	12,8

Tabelle 4.4-1

$$E_{Luft} = \frac{\Delta a_{Luft}}{\Delta m'_{Luft}} = \frac{3 \text{Skalenteile}}{20 \text{mg}} = \underline{\underline{1,5 \text{mg}^{-1}}}$$

$$E_{Wasser} = \frac{\Delta a_{Wasser}}{\Delta m'_{Wasser}} = \frac{4 \text{Skalenteile}}{20 \text{mg}} = \underline{\underline{0,2 \text{mg}^{-1}}}$$

Für die Wasserdichte ρ_w ergibt sich bei einer Temperatur von 28,5°C und einem Luftdruck^{iv} von 1014hPa ein Wert von:

$$\rho_w = 0,99609 \frac{\text{g}}{\text{ml}}$$

Dieser Wert wurde mit Hilfe des Rechenprogramms auf folgender Website berechnet:
<http://webbook.nist.gov/chemistry/fluid/>

Berechnung des Zylindervolumens

Aus den gemessenen Massen in Wasser und Luft können folgendermaßen zunächst die jeweiligen Volumina jeder Messung i berechnet werden.

$$V_i = \frac{m_{1i} - m_{2i}}{\rho_w} \quad (\text{Gl. 4.5-1})$$

$$\underline{\underline{V_1 \approx 27,38 \text{ml}}}$$

$$\underline{\underline{V_2 \approx 27,36 \text{ml}}}$$

Diese beiden Werte werden wiederum arithmetisch gemittelt:

$$\underline{\underline{\bar{V} \approx 27,37 \text{ml}}}$$

Messunsicherheit

Statistische Messunsicherheit

Da der Stichprobenumfang in diesem Fall $n < 6$ ist, kann die statistische Messunsicherheit anders als in 2.6 und 3.5 nicht durch den Vertrauensbereich ausgedrückt werden, sondern wird durch den Größtfehler der Anzeigengenauigkeiten in Luft und Wasser abgeschätzt. Diese ergeben sich dabei aus dem Kehrwert der jeweiligen Empfindlichkeiten bezogen auf einen Skalenteil:

$$\underline{\underline{e_z(m_{Luft}) \approx 6,67 \cdot 10^{-3} \text{g}}}$$

$$\underline{\underline{e_z(m_{Wasser}) \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{g}}}$$

$$e_z(V) = \left| \frac{e_z(m_{Luft})}{\rho_w} \right| + \left| \frac{e_z(m_{Wasser})}{\rho_w} \right| \quad (\text{Gl. 4.6.1-1})$$

$$\underline{\underline{e_z(V) \approx 0,012 \text{ml}}}$$

Systematischer Restfehler

Für die Massen gelten folgende systematische Restfehler:

$$e_s(m_1) = 2 \cdot 10^{-5} \cdot m_1 \approx \underline{\underline{8,01 \cdot 10^{-4} \text{ g}}}$$

$$e_s(m_2) = 2 \cdot 10^{-5} \cdot m_2 \approx \underline{\underline{2,56 \cdot 10^{-4} \text{ g}}}$$

Aus der Fehlerfortpflanzung ergibt sich dann als systematischer Restfehler von V :

$$e_z(V) = \sqrt{\left(\frac{u_{m_1}}{\rho_W}\right)^2 + \left(\frac{u_{m_2}}{\rho_W}\right)^2} \quad (\text{Gl. 4.6.2-1})$$

$$\underline{\underline{e_z(V) \approx 8,44 \cdot 10^{-4} \text{ ml}}}$$

Anmerkung: Die systematische Unsicherheit der Wasserdichte (und damit auch der gemessenen Temperatur) wurde an dieser Stelle nicht berücksichtigt, da ihr relativer Fehler im Vergleich zum relativen Fehler der Massen verschwindend gering ist.

Somit ist die Messunsicherheit von V :

$$u_V = \sqrt{e_z^2(V) + e_s^2(V)} \approx \underline{\underline{0,012 \text{ ml}}}$$

Korrektur

Da bei der Wägung in Luft auch der Auftrieb von Probekörper und Massennormale zu beachten ist, muss eine Korrektur des in 4.5 berechneten Zylindervolumens vorgenommen werden:

$$V' = \bar{V} \cdot \underbrace{\left(\frac{1 - \rho_L / \rho_N}{1 - \rho_L / \rho_W} \right)}_{c: \text{Korrekturfaktor}} \quad (\text{Gl. 4.7-1})$$

V' : Korrigiertes Volumen

$$\rho_L : \text{Dichte der Luft} \left(\rho_L = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$$

$$\rho_N : \text{Normdichte} \left(\rho_N = 8,4 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$$

Dabei ergibt sich für den gerundeten Wert des Korrekturfaktors:

$$\underline{\underline{c = 1,001}}$$

Die Korrektur wirkt sich somit nur mit 0,1% des Volumens \bar{V} auf das Endvolumen V aus.

$$\underline{\underline{V' = 27,40 \text{ ml}}}$$

Anmerkung: Eigentlich müsste bei der Berechnung der Korrektur auch der Auftrieb des Drahtes berücksichtigt und somit die Auswirkung ΔV_3 auf das Volumen \bar{V} berechnet werden. Da das Volumen des Drahtes jedoch gegenüber dem Volumen des Probezylinders sehr klein ist, ist jene Berechnung größtmäßig vernachlässigbar.

Ergebnis

$$V = V \pm u \approx (27,40 \pm 0,01) \text{ ml}$$

Kritische Betrachtung

Ein größerer Stichprobenumfang wäre u.U. von Vorteil gewesen, da durch mehrere Messungen der arithmetische Mittelwert gegen den wahren Wert läuft.

Zudem ist es aufgrund der sensiblen Messapparatur teilweise nicht möglich gewesen die Waage präzise zu balancieren, da der Zeiger bei geringer Verstellung und auch bei kleinen Bewegungen des Tisches sehr starke Schwankungen ausführte und außerdem genauere bzw. kleinere Massestück als 10mg nicht vorlagen. Insgesamt erwies sich diese Methode jedoch gegenüber den anderen Methoden als sehr präzise.

5. Gegenüberstellung der Messmethoden

	Methode 1	Methode 2	Methode 3
V/ml	28,578	28,588	27,396
u_v/ml	0,571	0,032	0,012

Tabelle 5-1

Da sich für die letzte Methode die kleinste Messunsicherheit und Methode 1 als die mit der größten Messunsicherheit erwies, ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

	Methode 1	Methode 2	Methode 3
Vorteile	Wenig Aufwand, Messergebnis relativ zum Aufwand ordentlich	Schnell und einfach durchführbar	Im Vergleich zu Methode 1 und Methode 2 genauer
Nachteile	Ungenau, da nicht die vollständig verdrängte Wassermenge und damit das gesamte Volumen des Probezylinders gemessen werden kann	Nur auf geometrisch perfekte zylindrische Körper anwendbar	Aufwendig, sehr empfindliche Apparatur

Tabelle 5-2

6. Gewichtetes Mittel

Da sich die Volumina innerhalb ihrer Messunsicherheiten, wie in Tabelle 5-1 zu erkennen ist, nicht vollständig überschneiden (dies gilt insbesondere für das errechnete Volumen der Methode 3), ist es nicht sinnvoll ein gewichtetes Mittel berechnen. Dieses ist auf die in 2.9, 3.7 und 4.9 aufgeführten und in der Berechnung nicht berücksichtigten Probleme bzw. systematische Fehler zurückzuführen.

Quellenangabe:

ⁱ A) Vgl. [81-87], *Physikalisches Grundpraktikum – Mechanik und Thermodynamik 2005*, Humboldt-Universität, Berlin, August 2005

B) Vgl. *Physikalisches Grundpraktikum – Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik 2007*, Humboldt-Universität, Berlin, November 2007

ⁱⁱ <http://manfredaigner.de/Expphys/mechanik/m08a.gif>

ⁱⁱⁱ <http://www.seilnacht.com/versuche/hydrost.gif>

^{iv} <http://www.meteo24.de/de/index.php?go=2.5> (Mi, 04. Juni 2008: 16:40, gemessener Luftdruck um 14:00)