Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I
Institut für Physik

Physikalisches Grundpraktikum
Mechanik und Thermodynamik

F2 Volumenmessung

Datum: 14.11.2005

Heiko Schmolke / 509 130
Versuchspartner: Olaf Lange / 507 733

WS 2005/2006
Gruppe 3
Platz 1

Inhaltsverzeichnis

I. Aufgabenstellung

1. Messung der einzelnen Messgrößen für jede der drei Methoden und Berechnung der Volumenwerte V_i.

2. Berechnung bzw. Abschätzung der zufälligen Fehler für die einzelnen Messgrößen.

3. Größenordnungsmäßige Abschätzung der systematischen Fehler der Methoden 1 - 3. Welche ergeben Korrekturen und welche bestimmen den systematischen Restfehler?

4. Übersichtliche Zusammenstellung der Messergebnisse, der zufälligen und der systematischen Fehleranteile sowie der Messunsicherheiten für die einzelnen Messgrößen.

5. Berechnung der Messunsicherheiten ΔV_i für die Volumenwerte nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz.

6. Berechnung des gewogenen Mittelwertes einschließlich Fehler, wenn die Messunsicherheiten ΔV_i dies rechtfertigen.

Fragen

1. Warum soll bei Methode 1 bereits zu Beginn des Versuches etwas Wasser im Zylinder sein?

2. Die Gewichtsfaktoren p_i für das gewogene Mittel werden umgekehrt proportional zum Quadrat der Messunsicherheit festgelegt. Wie begründet man, dass die Messunsicherheiten quadratisch und nicht linear eingesetzt werden?

3. Man leite die Korrekturformeln für die Auftriebsmethode (Gl. (8) und (9)) ab.

4. Unter welcher Voraussetzung darf aus Messwerten verschiedener Genauigkeit ein gewogenes Mittel bestimmt werden?

II. Verwendete Formeln

Die verwendeten Formeln wurden aus dem Skript zum physikalischen Grundpraktikum entnommen, die verwendeten Buchstabensymbole werden ebenfalls nachfolgend erklärt.

Buchstabensymbole

m	Masse
d	Durchmesser
h	Höhe
F_G	Gewichtskraft
g	Fallbeschleunigung
V	Volumen
t	Temperatur
γ	kubischer thermischer Ausdehnungskoeffizient
ρ	Dichte des entsprechenden Mediums
u	Messunsicherheit

Formeln:

1. Volumenberechnung : $V_2 = \frac{\pi}{4} d^2 h$

2. Empfindlichkeitsmessung d. Waage: $E = \frac{\Delta a}{\Delta m'}$

3. Volumen in Abhängigkeit von t: $V_M = V_N \left(1 + \gamma \left(t_M - t_N\right)\right)$

4. Volumenfehler: $\Delta V = V_\gamma \left(t_M - t_N\right)$

5. Volumen bei Auftriebsmessung: $V_3' = \frac{m_1 - m_2}{\rho_W} \cdot \frac{1 - \rho_L / \rho_N}{1 - \rho_L / \rho_W} \approx V_3 \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_N} + \frac{\rho_L}{\rho_W}\right)$

6. Messunsicherheit: $u = \sqrt{e_s^2 + e_z^2} < |e_s| + |e_z|$

7. Größtfehlerabschätzung: $$u_F \approx \pm\left\{\left|\frac{\partial F}{\partial x}u_x\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}u_y\right| + \ldots\right\}$$

8. Fehlerfortpflanzungsgesetz: $$u_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}u_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}u_y\right)^2 + \ldots}$$

9. Vertrauensbereich: $$\overline{s} = \pm t\frac{s}{\sqrt{n}} = \pm t\sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n\left(n-1\right)}}$$

10. Mittelwert: $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

11. Standardabweichung: $$s = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}}$$

III. Messwerte und Auswertung

Aufgabe 1

Die einzelnen Messgrößen wurden auf drei unterschiedliche Methoden gemessen. Die entsprechenden Volumina wurden in Aufgabe 2 berechnet, da hierzu die dazugehörige Fehlerbetrachtung notwendig ist. Den nachfolgenden Übersichten sind die jeweiligen Werte zu entnehmen.

Methode 1

lfd. Nr.	ml (± 0,5 ml)	Volumen in m^3
1	29,75	0,0000298
2	29,50	0,0000295
3	29,00	0,0000290
4	29,25	0,0000293
5	30,00	0,0000300
6	29,50	0,0000295

Methode 2

lfd. Nr.	Höhe in m	d in m
1	0,0641	0,0240100
2	0,0643	0,0240000
3	0,0640	0,0240050
4	0,0641	0,0240100
5	0,0642	0,0240000
6	0,0640	0,0240200
7		0,0240090
8		0,0240150
9		0,0240100
10		0,0240000

Methode 3

lfd. Nr.	m_1 in g	m_2 in g
1	42,455	13,43
2	42,450	13,44

<u>Aufgabe 2 und Aufgabe 3</u>

Die Berechnung bzw. Abschätzung der zufälligen Fehler für die einzelnen Messgrößen ist im folgenden Abschnitt zu entnehmen:

Methode 1

Der zufällige Fehler wird über den Vertrauensbereich angegeben. Hierzu ist die Berechnung des Mittelwertes und der Standardabweichung notwendig. Die Berechnungen erfolgten über die folgenden Formeln (die Ergebnisse sind entsprechend dahinter zu entnehmen):

Mittelwert:
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{177}{10} = \underline{\underline{29{,}50}}$$

Standardabweichung:
$$s = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}625}{5}} = 0{,}35355 \approx \underline{\underline{0{,}4}}$$

Vertrauensbereich:
$$\overline{s} = \pm t\frac{s}{\sqrt{n}} = \pm t\sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n\left(n-1\right)}} = \pm 1\cdot\frac{0{,}35355}{\sqrt{6}} = 0{,}14434 \approx \underline{\underline{0{,}1}} = e_z$$

Bei der Berechnung des Vertrauensbereiches wurde t = 1 gewählt (Sudentscher Faktor), da n ≥ 6. Der Vertrauensbereich ist zugleich Ausdruck des zufälligen Fehlers.

Der Systematische Restfehler wurde den Messzylinderangaben am Versuchsplatz entnommen und ist ebenfalls dem Skript zum Physikalischen Grundpraktikum auf Seite 15 Punkt (2) zu entnehmen, er beträgt:

$$e_s = \pm 0{,}5\,\text{ml}$$

Die gesamte Messunsicherheit setzt sich nun aus dem systematischen und zufälligen Restfehler zusammen:

$$u = \sqrt{e_s^2 + e_z^2} < |e_s| + |e_z| = \pm|0{,}1\,\text{ml}| + |0{,}5\,\text{ml}| = \underline{\underline{\pm 0{,}6\,\text{ml}}}$$

Aufgrund des Differenz zwischen der Temperatur des Messzylinders $t_N = 20°C$ und der Temperatur des Wassers $t_M = 23°C$, welches für die Messung verwendet wurde, ergibt sich ein berechenbarer und gerichteter Volumenfehler zu:

$$\Delta V = V \cdot \gamma \cdot (t_M - t_N) = 0{,}0000295 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-5} K^{-1} \cdot (23°C - 20°C) \approx 2{,}39 \cdot 10^{-9}$$

Damit ergibt sich das korrigierte Volumen des Zylinders zu:

$$\underline{\underline{V_1 = (2{,}95 \cdot 10^{-5} + 2{,}39 \cdot 10^{-9}) = 2{,}950239 \cdot 10^{-5} \approx (3 \cdot 10^{-5} \pm 6 \cdot 10^{-7})\,\text{m}^3}}$$

Die Abweichung ist vernachlässigbar gering, so dass das gemittelte Volumen weiterhin herangezogen werden kann.

Methode 2

Für die Berechnung des Volumens des Zylinders sind die Höhe h und der Durchmesser d gesucht. Aus den gemessenen Höhen ergibt sich der Mittelwert zu:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{0{,}3847}{6} = \underline{\underline{0{,}0641\,\text{m}}}$$

Die Standardabweichung wurde bestimmt zu:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{6{,}8 \cdot 10^{-8}}{5}} = 0{,}00012 \approx \underline{\underline{1{,}2 \cdot 10^{-4}}}$$

Der Vertrauensbereich wurde bestimmt zu:

$$\overline{s} = \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} = \pm t \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} = \pm 1 \cdot \frac{1{,}2 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{6}} = 0{,}000048 \approx \underline{\underline{5 \cdot 10^{-5}}} = e_z$$

Der systematische Restfehler des Messgerätes beträgt laut Hersteller:

$$e_s = \pm(5 \cdot 10^{-5} m + 1 \cdot 10^{-4} h)$$

Um den maximalen systematischen Fehler anzugeben, wird für h der Größte gemessene Wert h = 0,0643m angenommen. Daraus ergibt sich:

$$e_s = \pm(5 \cdot 10^{-5} m + 6{,}43 \cdot 10^{-6} h) \approx \pm 5{,}6 \cdot 10^{-5} m$$

Die Messunsicherheit der Höhenmessung ist demnach:

$$u_h = \sqrt{e_s^2 + e_z^2} < |e_s| + |e_z| = \pm \left|5{,}6 \cdot 10^{-5} m\right| + \left|4{,}8 \cdot 10^{-5} m\right| \approx \underline{\underline{\pm 1{,}0 \cdot 10^{-4} m}}$$

Die Höhe des Zylinders beträgt nun also:

$$h = \left(0{,}0641 \pm 1{,}0 \cdot 10^{-4}\right) m$$

Es folgt nun die analoge Betrachtung für den Durchmesser. Aus den gemessenen Werten ergibt sich der Mittelwert zu:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{0{,}2401}{9} = \underline{\underline{0{,}0240m}}$$

Die Standardabweichung wurde bestimmt zu:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-10}}{9}} \approx \underline{\underline{6{,}7 \cdot 10^{-6}}}$$

Der Vertrauensbereich wurde bestimmt zu:

$$\overline{s} = \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} = \pm t \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} = \pm 1 \cdot \frac{6{,}7 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{10}} \approx \underline{\underline{2{,}1 \cdot 10^{-6}}} = e_z$$

Der systematische Restfehler des Messgerätes beträgt laut Hersteller:

$$e_s = \pm(5 \cdot 10^{-6} m + 1 \cdot 10^{-5} d)$$

Um den maximalen systematischen Fehler anzugeben, wird für d der Größte gemessene Wert d = 0,02402m angenommen. Daraus ergibt sich:

$$e_s = \pm(5 \cdot 10^{-6}\,m + 2{,}40 \cdot 10^{-7}\,h) \approx \pm 5{,}2 \cdot 10^{-6}\,m$$

Die Messunsicherheit der Durchmessermessung ist demnach:

$$u_d = \sqrt{e_s^2 + e_z^2} < |e_s| + |e_z| = \pm\left|5{,}2 \cdot 10^{-6}\,m\right| + \left|2{,}1 \cdot 10^{-6}\,m\right| \approx \underline{\underline{\pm 7{,}3 \cdot 10^{-6}\,m}}$$

Der Durchmesser des Zylinders beträgt nun also:

$$d = \left(0{,}02402\,m \pm 7{,}3 \cdot 10^{-6}\,m\right)$$

Der Mittelwert des Zylindervolumens ist demnach:

$$\overline{V}_2 = \frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h} = \frac{\pi}{4}(0{,}024\,m)^2 \cdot 0{,}0641\,m \approx \underline{\underline{2{,}9 \cdot 10^{-5}\,m^3}}$$

Die Messunsicherheit für das Volumen errechnet sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für multiplikative Größen:

$$u_V = \left\{2 \cdot \left|\frac{u_d}{\overline{d}}\right| + \left|\frac{u_h}{\overline{h}}\right|\right\} \cdot \overline{V}_2 \approx 6{,}4 \cdot 10^{-8}$$

Daraus folgt für das Volumen des Probekörpers:

$$\underline{\underline{V_2 = \overline{V}_2 \pm u_V = (2{,}9 \cdot 10^{-5} \pm 6{,}4 \cdot 10^{-8})\,m^3}}$$

Methode 3

Für die Masse des Zylinders in Luft bzw. Wasser ergibt sich der jeweilige Mittelwert:

Masse in Luft: $\overline{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{84{,}91\,g}{2} = \underline{\underline{42{,}45\,g}}$

Masse in Wasser: $\overline{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{26{,}87\,g}{2} = \underline{\underline{13{,}44\,g}}$

Für die beiden Massen wird jeweils der Messfehler, d.h. die Empfindlichkeit der Waage nach $E = \frac{\Delta a}{\Delta m'}$ bestimmt. Hieraus ergab sich:

$$\Delta m_{Luft} = 10\,mg = 1 \cdot 10^{-6}\,kg$$
$$\Delta m_{Wasser} = 7\,mg = 0{,}7 \cdot 10^{-6}\,kg$$

Die Dichte des verdrängten Wassers wurde einer Tabelle entnommen und hatte für $23{,}5°\mathrm{C}$ den Wert von $\rho = 997{,}42\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Der Mittelwert des Zylindervolumens berechnet sich nach:

$$\overline{V}_3 = \frac{\overline{m_1} - \overline{m_2}}{\rho_w} \approx \frac{0{,}04245\,\mathrm{kg} - 0{,}01344\,\mathrm{kg}}{997{,}42\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \approx 2{,}9 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$$

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz additiver Größen ergibt sich die Messunsicherheit für Methode 3:

$$u_{V_3} = \pm \left\{ \left| \frac{1}{\rho_W} \cdot \Delta m_{Luft} \right| + \left| \frac{1}{\rho_W} \cdot \Delta m_{Wasser} \right| \right\} = 1{,}7 \cdot 10^{-9}$$

Somit ergibt sich für das Volumen:

$$V_3 = \overline{V}_3 \pm u_{V_3} = (2{,}9 \cdot 10^{-5} \pm 1{,}7 \cdot 10^{-9})\,\mathrm{m}^3$$

Unter Berücksichtigung des Auftriebes des Probekörpers und der Massennormale erhält man das Volumen V':

$$V_{3,1}' = \frac{m_1 - m_2}{\rho_w} \cdot \frac{1 - \rho_L / \rho_N}{1 - \rho_L / \rho_W} \approx V_3 \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_N} + \frac{\rho_L}{\rho_W} \right)$$

$$\approx 2{,}9 \cdot 10^{-5} \cdot \left(1 - \frac{1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}}{8{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}} + \frac{1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}}{997{,}42\,\mathrm{kg/m^3}} \right) \approx \underline{\underline{2{,}896 \cdot 10^{-5}}}$$

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz additiver Größen ergibt sich die Messunsicherheit für diese Berechnung:

$$u_{V_3'} = (\Delta m_1 - \Delta m_2) \cdot \left(\frac{1}{\rho_W} \right) \cdot \left(\frac{1 - \rho_L / \rho_N}{1 - \rho_L / \rho_W} \right)$$

$$= (1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} - 0{,}7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg}) \cdot \left(\frac{1}{997{,}42\,\mathrm{kg/m^3}} \right) \cdot \left(\frac{1 - 1{,}2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \Big/ 8{,}4 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{1 - 1{,}2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \Big/ 997{,}42\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \right) \approx \underline{\underline{3 \cdot 10^{-10}}}$$

Somit ergibt sich für das Volumen V':

$$V_3' = V_{3,1}' \pm u_{V_3'} \approx (2{,}9 \cdot 10^{-5} \pm 3 \cdot 10^{-10})\,\mathrm{m}^3$$

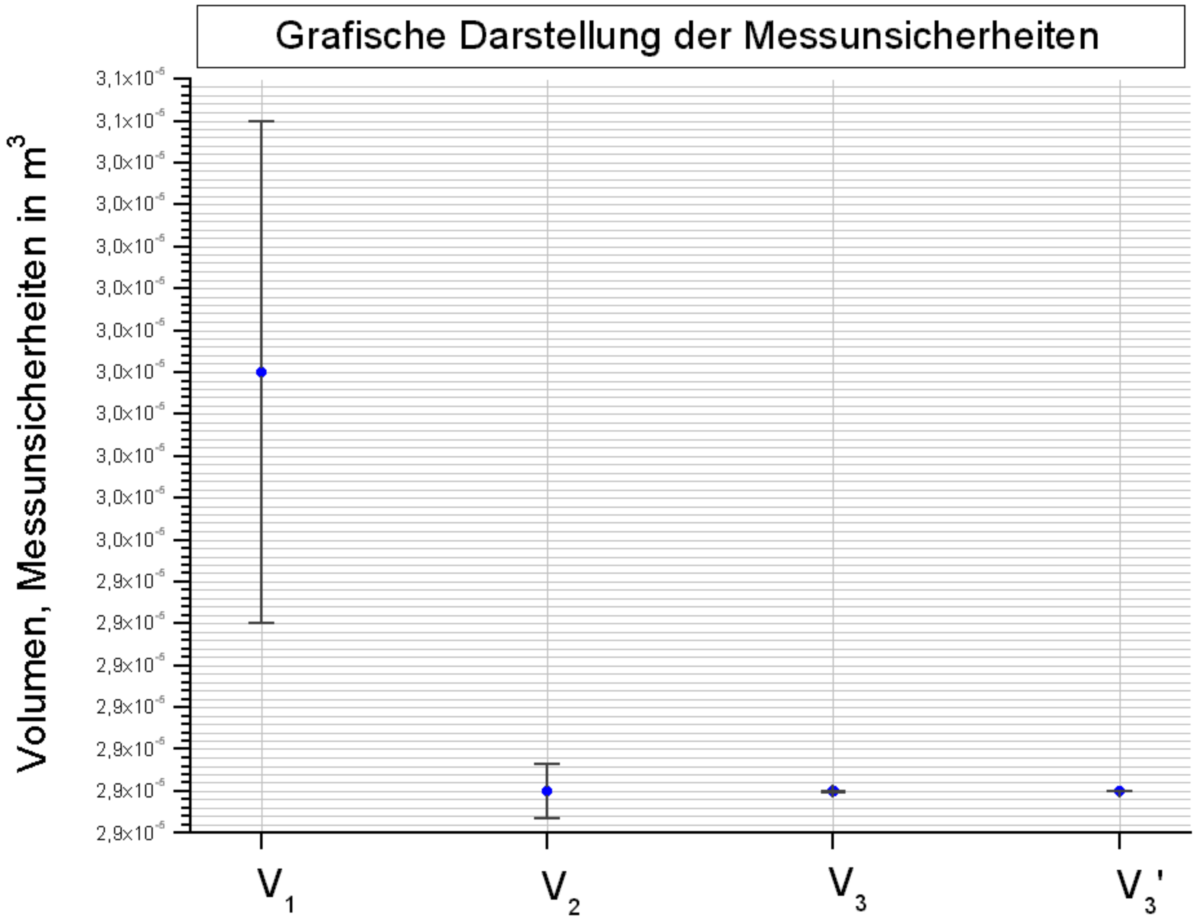
Das letztendliche Volumen V_3'' welches aufgrund des Auftriebes des Aufhängedrahtes etwas kleiner ist, ergibt sich nach:

$$V_3'' = V_3' - \Delta V$$

Dieser Auftrieb kann allerdings wegen seiner Größenordnung für Länge und Durchmesser als Bestandteil der Messunsicherheit angesehen werden.

<u>Aufgabe 4</u>

Die Messergebnisse, die zufälligen und die systematischen Fehleranteile sowie die Messunsicherheiten für die einzelnen Messgrößen werden nun übersichtlich dargestellt.



Volumen	Messgröße	Zufällige Fehler	Systematische Fehler	Messunsicherheiten
V_1	ml	± 0,1ml	± 0,5ml	± 0,6ml
V_2	h in m	± 4,80 E-05	± 5,60 E-05	± 1,04 E-04
	d in m	± 2,10 E-06	± 5,20 E-06	± 7,30 E-06
V_3	m_{Luft} in kg	± 1,00 E-06	-	± 1,70 E-09
	m_{Wasser} in kg	± 7,00 E-07	-	± 1,70 E-09

Aufgabe 5

Die Messunsicherheiten für die Volumenwerte nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz wurden in den Aufgabe 2 und 3 berechnet und sind dort den entsprechenden Volumenwerten zu entnehmen.

Aufgabe 6

Die Berechnung des gewogenen Mittelwertes einschließlich Fehler ist nicht gerechtfertigt, da sich die Bereiche der Messunsicherheiten der jeweiligen Messungen nicht überlappen. Diese Tatsache ist dem Diagramm auf der vorhergehenden Seite zu entnehmen. Um aber einen guten Eindruck zu hinterlassen, machen wir es trotzdem:

Gewogener Mittelwert:

Bei Methode 3 wurde aus Gründen der Genauigkeit nur auf das Volumen in Anhängigkeit der Auftriebskräfte zurückgegriffen. Folgende Formeln liegen dem Ganzen zu Grunde:

$$p_j = \frac{u_1^2}{u_j^2}$$

$$V_{gesamt} = \frac{V_1 \cdot p_1 + V_2 \cdot p_2 + V_3 \cdot p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

$$u_{gesamt} = \pm\sqrt{\frac{(p_1 \cdot u_1)^2 + (p_2 \cdot u_2)^2 + (p_3 \cdot u_3)^2}{p_1 + p_2 + p_3}}$$

$\overline{V}_1 = 3 \cdot 10^{-5} m^3$

$u_1 = \pm 6 \cdot 10^{-7} m^3$

$p_1 = 1$

$\overline{V}_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-5} m^3$

$u_1 = \pm 6{,}4 \cdot 10^{-8} m^3$

$p_1 = 88$

$\overline{V}_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-5} m^3$

$u_1 = \pm 3 \cdot 10^{-10} m^3$

$p_1 = 4.000.000$

$V_{gesamt} = 2{,}9 \cdot 10^{-5} m^3$

$u_{gesamt} = \pm 6 \cdot 10^{-7} m^3$

somit ergibt sich:

$$V_{gesamt} \approx (2{,}9 \cdot 10^{-5} \pm 6 \cdot 10^{-7}) m^3$$

Fragen

Zu Frage 1

Bei Methode 1 sollte deswegen bereits vor Beginn des Versuches etwas Wasser im Zylinder sein, damit sich die Temperatur des Wasser und des Zylinders anpassen können, nach Möglichkeit an die Raumtemperatur.

Zu Frage 2

Die Messunsicherheiten werden generell quadratisch und nicht linear eingesetzt. Der Grund hierfür ist, dass die Unsicherheiten vom Vorzeichen her unterschiedlich sein können, d.h. sie könnten sich gegenseitig kompensieren oder summieren und somit wäre die Fehleraussage verfälscht. Beim Quadrieren werden die Vorzeichen angepasst, so dass man indirekt mit Fehlern in Form von „Beträgen" rechnet, da sie jetzt alle positiv sind.

Zu Frage 3

Die Korrekturformeln (Gleichung (8) und (9)) aus dem Skript werden auf folgende Weise hergeleitet: Es muss ein Gleichgewicht herrschen, damit man einen Ansatz für diese Gleichung findet. D.h. beide Seiten müssen sich ausgleichen und die Waage befindet sich somit im Gleichgewicht. Ein Ansatz wäre: (der Ansatz wurde handschriftlich zu Ende geführt, auf eine detaillierte Ausführung wird hier aus Zeit- und Lustgründen verzichtet):

Gleichgewicht in der Flüssigkeit:

$$(p_{MN1} \cdot g \cdot V_{MN1}) - (p_L \cdot g \cdot V_{MN1}) = \underline{(p_Z \cdot g \cdot V_Z)} - (p_W \cdot g \cdot V_Z)$$

Luftgleichgewicht:

$$\underline{(p_Z \cdot g \cdot V_Z)} - (p_L \cdot g \cdot V_Z) = (p_{MN2} \cdot g \cdot V_{MN2}) - (p_L \cdot g \cdot V_{MN2})$$

Das Auflösen nach der unterstrichenen Größe und Einsetzen in die äquivalente Gleichung führt dann irgendwann unweigerlich zu den Gleichungen (8) und (9).

Zu Frage 4

Aus Messwerten verschiedener Genauigkeit darf nur dann ein gewogenes Mittel bestimmt werden, wenn sich die Bereiche der Messunsicherheiten überlappen. Wir haben in diesem Experiment trotzdem das gewogene Mittel berechnet, weil wir zeigen wollten, dass wir es können.

IV. Fehlerbetrachtung und kritische Ergebniseinschätzung

Wie spätestens der grafische Darstellung der Volumenmittelwerte aus Aufgabe 4 zu entnehmen war, ist die Ermittlung des gewichteten Mittels für die einfache statistische Sicherheit von 68,3% nicht gerechtfertigt gewesen. Es ist anzunehmen, dass es bei einer der Messungen grobe Fehler oder aber nicht erkannte systematische Fehler gegeben hat. Im Großen und Ganzen war es auch diesmal ein interessanter Versuch, nur ist die Struktur der Fragen etwas verwirrend, da die eine oder andere vom Inhalt her identisch ist.