Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen und Durchführung des Versuches

Durch drei verschiedene Messmethoden unterschiedlicher Genauigkeit soll das Volumen eines Zylinders bestimmt werden. Anschließend soll anhand dieser Messungen die Bestimmung der verschiedenen Fehler verdeutlicht werden.

Überlaufmethode:
Der Probekörper wird in ein mit Wasser gefülltes Glasgefäß, das mit einem Überlauf versehen ist, getaucht und das durch den Probenkörper verdrängte Wasser in einem Messzylinder aufgefangen. Dabei sollte in dem Messzylinder schon eine kleine Menge Wasser enthalten sein, das Volumen ergibt sich dann nach: $V_1 = V_{Ende} - V_{Anfang}$

Geometrie des Körpers:
Bei dem Probekörper handelt es sich um einen Zylinder, dessen Volumen sich nach

$V_2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$ berechnet.

Auftriebsmessung:
Der Probekörper wird mit einer Laborwaage mit symmetrischen Balken in Luft und in Wasser gewogen. Das Volumen des Probekörpers errechnet sich dabei nach: $V_3 = \frac{m_1 - m_2}{\rho_w}$

Die detaillierte Durchführung des Versuches kann dem Skript entnommen werden.

Grundlagen der Fehlerrechnung:

- Zufälliger Fehler e_z:
  Hierbei können zwei Fälle unterschieden werden, je nach der Anzahl der Messungen. Wurden mindestens sechs Messungen durchgeführt, so kann der zufällige Fehler e_z berechnet werden: $e_z = \bar{s} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}}$
  Ist die Zahl der Messungen kleiner als sechs, so wird der zufällige Fehler nicht nach oben genannter Formel berechnet, sondern ein Größtfehler aus der Ablese- oder Anzeigegenauigkeit des Messgerätes geschätzt.

- Systematischer Fehler:
  Beim systematischen Fehler ist zwischen korrigierbaren Fehlern und dem systematischen Restfehler e_s zu unterscheiden.
  Ist die Fehlerquelle bekannt, z.B. äußere Einflüsse wie Temperatur oder Luftdruck, so kann das Messergebnis mit dem Wert e_c korrigiert werden. Das Ergebnis ergibt sich dann nach: $x_c = \bar{x} + e_c$
  Der nicht korrigierbare Anteil, der systematische Restfehler e_s, ist in erster Linie durch die Messgeräte selbst bestimmt. Diese werden oftmals von Hersteller des Gerätes angegeben und können hier dem Einführungsskript entnommen werden.

- Messunsicherheit:
  Die ermittelten systematischen und zufälligen Fehler bestimmen die Messunsicherheit u des Endergebnisses. Da der zufällige Fehler e_z und der systematische Fehler e_s voneinander unabhängig sind, addieren sie sich quadratisch zu: $u = \sqrt{e_z^2 + e_s^2}$

- Gewogenes Mittel:
  Eine physikalische Größe wurde nach verschiedenen Methoden gemessen. Aus jeder der Messreihen ergibt sich ein Mittelwert $\bar{x}_j$ mit der Messunsicherheit u_j. Dabei besitzt jede Methode eine unterschiedliche Genauigkeit. Aus diesem Grund wird jeder Messreihe ein Gewicht p_j zugeordnet und das gewogene Mittel x_g bzw. die Messunsicherheit u_g wie folgt berechnet:
  $$x_g = \frac{\sum_j p_j \bar{x}_j}{\sum_j p_j} \qquad u_g \pm \frac{\sqrt{\sum_j (p_j u_j)^2}}{\sum_j p_j}$$
  Die Gewichte p_j gewinnt man nach: $p_j = C/u_j^2$ wobei man für C am besten die größte Messunsicherheit wählt.

Genauere Ausführungen zur Fehlerrechnung können dem Einführungsskript entnommen werden.

2. Auswertung

Die Aufgaben 1 bis 5 aus dem Skript werden bei den einzelnen Messmethoden behandelt. Aufgabe 6 wird unter Punkt 2.2 - Ergebniszusammenfassung und Diskussion behandelt.

2.1.1 Überlaufmethode

n	V_{Anfang} in ml	V_{Ende} in ml	ΔV in ml
1	15,0	43,7	28,7
2	10,0	38,8	28,8
3	10,0	38,6	28,6
4	10,0	38,6	28,6
5	10,0	38,6	28,6
6	10,0	38,7	28,7
Ø			$28{,}6_{666}$

$V_1 = 28{,}6$ ml

Berechnung des **zufälligen Fehlers e_z**: $e_z = \sqrt{\frac{0{,}03333336}{6\cdot(6-1)}} = 0{,}0333$ ml

Bestimmung des **systematischen Fehlers**:

- korrigierbare Fehler:
  Da die Messtemperatur (23°C) von der Nenntemperatur (20°C) des Messzylinders abweicht, wird das gemessene Volumen korrigiert: $e_c = V\gamma(t_M - t_N)$
  $e_c = 2{,}32 \cdot 10^{-3}$ ml
  $V_c = V_1 + e_c = 28{,}6_{6892}$

  Bedenkt man, dass der Draht, der ins Wasser tauchte, ebenfalls ein gewissen Volumen an Wasser verdrängt, so sieht man einen weiteren systematischen Fehler. Das Volumen eines Tropfens beträgt ca. 0,065 ml. Nimmt man an, dass 2 – 3 Tropfen durch den Draht verdrängt wurden, so würde dies einem Volumen von bis zu 0,195ml entsprechen. Da dies schwerlich exakt bestimmt werden kann, wird der Fehler lediglich erwähnt und nicht in die Rechnung mit einbezogen.

- systematischer **Restfehler e_s**:
  $e_s = \pm 0{,}5$ ml

Bestimmung der **Messunsicherheit u_1**:
$u_1 = \sqrt{0{,}0333^2 + 0{,}5^2} = 0{,}5011$ ml
Endergebnis: $V_1 = (28{,}7 \pm 0{,}5)$ ml

2.1.2 Geometrie des Körpers

n	Höhe h in mm	Durchmesser d in mm
1	62,7	23,80
2	62,7	23,83
3	62,7	23,82
4	62,7	23,79
5	62,8	23,79
6	62,7	23,83
7		23,79
8		23,79
9		23,81
10		23,80
Ø	$62{,}7_{16}$	$23{,}80_5$

Berechnung des **Volumen V_2**: $V_2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h = \frac{\pi}{4} \cdot (2{,}3805cm)^2 \cdot 6{,}2716cm = 27{,}9_{128}$ ml

Berechnung des **zufälligen Fehlers e_z**:

- der Höhe h: $e_z = \sqrt{\frac{0{,}00833336}{6 \cdot (6-1)}} = 0{,}0166$ mm
- des Durchmessers d: $e_z = \sqrt{\frac{0{,}00245}{10 \cdot (10-1)}} = 0{,}0052$ mm

Bestimmung des **systematischen Fehlers**:

- korrigierbarer Fehler:
  Bei dieser Methode konnten wir keinen systematischen Fehler ermitteln, den wir korrigieren könnten.

- systematischer Restfehler e_s:
  - Höhe h: $e_s = \Delta l = \pm (5*10^{-5}\text{ m}+10^{-4}*l) = 5{,}627*10^{-5}$ m $= 0{,}05627$ mm
  - Durchmesser d: $e_s = \Delta l = \pm (5*10^{-6}\text{ m}+10^{-5}*l) = 5{,}238*10^{-6}$ m $= 0{,}005238$ mm

Bestimmung der **Messunsicherheit u_2**:

- Höhe h: $u_h = \sqrt{0{,}0166^2 + 0{,}05627^2} = 0{,}0586$ mm
- Durchmesser d: $u_d = \sqrt{0{,}0052^2 + 0{,}005238^2} = 0{,}00738$ mm

$$u_2 = \left\{ \left| 2\frac{u_d}{\bar{d}} \right| + \left| \frac{u_h}{\bar{h}} \right| \right\} \cdot V_2 = 0{,}0433 \text{ ml}$$

Endergebnis: V_2 = (27,91 ± 0,04) ml

2.1.3 Auftriebsmessung:

n	m_L in g	m_W in g
1	41,100	13,310
2	41,090	13,310
Ø	41,095	13,310

Temperatur: T= 23°C
Dichte des Wassers: ρ(T)=0,99754 g/cm^3

Empfindlichkeit E der Waage: E= Δa/m

	Δa	m in mg	E
Luft	4	30	$0{,}133_{33}$
Wasser	3,5	20	0,175

Berechnung des **Volumens V_3**: $V_3 = \frac{m_L - m_w}{\rho_w} = \frac{41{,}095g - 13{,}310g}{0{,}99754 g/cm^3} = 27{,}853_5$ cm³

Bestimmung des **zufälligen Fehlers e_z**:
Da hier die Anzahl der Messungen kleiner als sechs ist, kann der zufällige Fehler nicht berechnet werden, sondern muss anhand der Empfindlichkeit der Waage abgeschätzt werden.
E (Luft) = 0,133/mg E (Wasser) = 0,175/mg

Der zufällige Fehler wird großzügig auf eine Skaleneinheit bezogen und ist demzufolge der Kehrwert der Empfindlichkeit.
e_z(Luft) = 7,518797mg e_z(Wasser) = 5,7142857mg

Bestimmung des **systematischen Fehlers**:

- korrigierbarer Fehler:
  Bei der Wägung in Luft wird der Auftrieb des Probekörpers und des Gewichtes berücksichtigt: $V_3' = \frac{m_L - m_w}{\rho_w} \cdot \frac{1 - \rho_L / \rho_N}{1 - \rho_L / \rho_w} = 0{,}02788306$ m^3 = $27{,}883_{06}$ cm^3
  Das Volumen V_D des Aufhängedrahtes könnte man hier auch noch berücksichtigen, wird aber auf Grund des zu erwartenden sehr geringen Wertes vernachlässigt. Das Gesamtvolumen würde sich dann nach $V''_3 = V'_3 - V_D$ ergeben.

- systematischer Restfehler e_s:
  Der systematische Restfehler der Waage wurde dem Einführungs-Skript entnommen:
  e_s(Luft) = $2 \cdot 10^{-5}$ *m= $1{,}0273 \cdot 10^{-3}$ g
  e_s(Wasser) = $2 \cdot 10^{-5}$ *m= $2{,}662 \cdot 10^{-4}$ g
  Des Weiteren ist hier noch der systematische Restfehler des Thermometers, das zur Temperaturmessung des verwendeten Wasser benutzt wurde, zu nennen. Dieser wird aber nicht weiter berücksichtigt. Der Fehler in der Dichte wird ebenfalls

vernachlässigt.

Bestimmung der **Messunsicherheit u_3**:

- Masse in Luft m_L: $u_L = = \sqrt{(0{,}0075188g)^2 + (0{,}0010273g)^2} = 0{,}007_5$ g
- Masse in Wasser m_W: $u_W == \sqrt{(0{,}0057143g)^2 + (0{,}0002662g)^2} = 0{,}005_7$ g

$u_3 = \{|uL| + |uw|\} *$ cm³/g= $0{,}01_3$ cm³

Endergebnis: V_3 = (27,95 ± 0,01) ml

Überprüfung auf Überlappung:

	Methode 1	Methode 2	Methode 3
V	**28,7 ml**	**27,91 ml**	**27,95 ml**
u	**0,5 ml**	**0,04 ml**	**0,01 ml**
Ergebnisbereich	**(28,2 – 29,2)ml**	**(27,87 – 27,95)ml**	**(27,94 – 27,96)ml**
Überlappung	**nein**	**ja**	**ja**

2.2 Ergebniszusammenfassung und Diskussion

Die drei Methoden zeigen unterschiedliche Genauigkeiten auf. Am ungenausten ist die Methode eins. Am genausten hingegen ist die Methode Nummer drei.
Bei der Überlauf-Methode ergab sich der größte Wert für das Volumen des Zylinders von 28,7 ± 05ml. Die durchgeführte Korrektur kann man eigentlich vernachlässigen, da sich das Messergebnis dadurch nur minimal verändert und im Endergebnis auf Grund des kleinen Wertes keine Rolle spielt. Bei dieser Methode bestand eine Schwierigkeit darin, dass Skalenteile auf dem Messzylinder abgeschätzt werden sollten. Diese Abschätzungen sind natürlich auch wieder fehlerbehaftet und könnten zu einem geringfügig höheren Wert geführt haben. Würde man also einen höheren zufälligen Fehler annehmen, so wäre auch die Messunsicherheit größer. Der unberücksichtige systematische Fehler von schätzungsweise +0,15ml macht sich hier auch bemerkbar. Dies ist später noch einmal von Bedeutung für die Bestimmung des gewogenen Mittels.
Bei der zweiten Methode, bei der das Volumen des Zylinders über dessen Geometrie berechnet wurde, ergab sich ein Volumen con 27, 91 ± 0,04ml. Hier wurde keine Korrektur durchgeführt, da uns kein systematischer Fehler bekannt ist, den wir hätten berücksichtigen können. Durch den sehr niedrigen zufälligen Fehler und dem noch geringeren systematischen Fehler ist auch die Messunsicherheit ebenfalls sehr gering. Dies kommt durch die sehr geringe Streuung der Messergebnisse, lediglich beim Durchmesser gibt es eine leichte Streuung.
Bei der Auftriebsmessung ergab sich ein Volumen von 27,9 ± 0,3ml. Hier wurde ebenfalls eine Korrektur vorgenommen, die aber wiederum nur zu einem sehr geringfügig anderen Wert führte und im Endergebnis keine Rolle spielt. Die Berücksichtigung des Aufhängedrahtes wurde vernachlässigt, da dessen Volumen auch so gering gewesen wäre, dass es im Endergebnis zu keiner Veränderung geführt hätte und sowieso durch Differenzrechnung beseitigt wurde.

Auf die Bestimmung des gewogenen Mittels wurde hier verzichtet, da es nur sinnvoll ist dieses zu bilden, wenn sich die einzelnen Messergebnisse im Bereich ihrer Messunsicherheiten überlappen. Dies ist hier nicht der Fall. Der bei der Überlauf-Methode ermittelte Wert überlappt nicht mit den anderen beiden Werten. Dies kann die schon weiter oben genannten Gründe haben. Berücksichtigt man nun aber den systematischen Fehler, der durch den Draht entstanden ist, welcher mit 0,195ml (3 Tropfen zu viel) angenommen wird, so lässt sich der erhöhte Wert teilweise erklären. Würde man nun noch aufgrund unserer (schlechten) Abschätzung der Skalenteile in Kombination mit dem Meniskus, was evt. einen weiteren systematischen Fehler darstellt, eine höhere Messunsicherheit von (± 0,6 ml) annehmen, so wäre es möglich ein gewogenes Mittel zu bilden. Es liegt dann nämlich Überlappung der Ergebnisräume vor. In diesem Fall würde man die Messunsicherheit der ersten Methode ($u_1 = \pm 0{,}6$ ml) bei der Gewichtung für C einsetzen. Man erhält dann für $\bar{x}_g$

$$= \frac{\sum_j p_j \bar{x}_j}{\sum_j p_j} = 27{,}94_6 \text{ ml} \quad \text{und für } u_g = \pm \frac{\sqrt{\sum_j (p_j u_j)^2}}{\sum_j p_j} = 0{,}01_7 \text{ ml}$$

Es ergibt sich also für das gewogene Mittel ein Wert von (27,95 ± 0,02) ml.

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass bei der ersten Methode „Fehlerschätzungen" dazu geführt haben das gewogene Mittel zu bestimmen. Es ist natürlich fragwürdig wie sehr man sich das somit erste bestimmte Volumen verlassen kann. Es ist jedoch sehr klar zu sehen, dass diese Methode sich negativ von den anderen in der Genauigkeit abhebt. Man sollte sich daher auf die anderen beiden Ergebnisse verlassen. Vergleicht man das gewogene Mittel mit den Messergebnissen, so sieht man, dass es denen der Methoden 2 und 3 gleich kommt. Durch den großen Fehlerbereich der ersten Volumenbestimmung fällt dieser nun auch nicht so stark ins Gewicht und beeinflusst nur sehr geringfügig das gewogene Mittel. So sieht man also, dass bei der fragwürdigen Anwendung bei der Methode des gewogenen Mittels die Korrekturen bzw. die Abweichungen des ersten Volumens sich so gut wie gar nicht auf das Ergebnis im gewogenen Mittel auswirken. Lediglich die Unsicherheit im gewogenen Mittel müsste dadurch etwas erhöht wurden sein.
Das Ergebnis, was hierbei mit Hilfe des gewogenen Mittels bestimmt wurde, beläuft sich auf (27,95 ± 0,02) ml.

3. Fragen

3.1 *Warum soll bei Methode 1 bereits zu Beginn des Versuches etwas Wasser im Zylinder sein?*

Um einen Fehler durch Benetzung des Zylinders bei der Bestimmung der verdrängten Wassermenge zu minimieren, wird vor der Messung eine kleine Wassermenge in den Messzylinder gefüllt und das Volumen durch Differenzmessung ermittelt.

3.2 *Die Gewichtsfaktoren p für das gewogene Mittel werden umgekehrt proportional zum Quadrat der Messunsicherheit festgelegt. Wie begründet man, dass die Messunsicherheiten quadratisch und nicht linear eingesetzt werden?*

Da man positive und negative Abweichungen haben kann, würde sich diese bei der Summenbildung im linearen aufheben. Durch das Quadrieren wird diese Aufhebung verhindert, da die Quadrate immer positiv sind und sich somit nicht aufheben.

3.3 *Man leite die Korrekturformeln (Gl. (8) und(9)) ab.*

3.4 *Unter welcher Vorraussetzung darf aus Messwerten verschiedener Genauigkeit ein gewogenes Mittel bestimmt werden?*

Man darf ein gewogenes Mittel bestimmen, wenn die Messwerte keine großen Abweichungen voneinander aufweisen, sie müssen sich im Bereich der Messunsicherheit überschneiden.

4. Anhang

4.1 Messprotokoll