

Versuchsprotokoll

zum **Fadenpendel** (F3)
am Arbeitsplatz 3

durchgeführt am **11.03.2009**
mit Versuchspartnerin **Barbara Baumann** (530573)

Protokoll von **Sebastian Milster** (529125)

Gliederung:

- I. Einleitung und Versuchsbeschreibung
- II. Messergebnisse
- III. Fehleranalyse
- IV. Auswertung

I. Einleitung

In diesem Versuch soll die Erdbeschleunigung g mithilfe eines Fadenpendels bestimmt werden. Diese lässt sich aus der Periodendauer T und der Fadenlänge l berechnen. In diesem Protokoll werde ich auf die beim Messen auftretenden Fehler und Genauigkeiten der Methoden eingehen um ein realistisches Ergebnis zu ermitteln. Zunächst werde ich die physikalischen Grundlagen erläutern, die Versuchsanordnung und die Messdurchführungen beschreiben.

Versuchsordnung:

An der Wand wurde eine Anordnung befestigt, die es erlaubt, die Fadenlänge für das Pendel zu ändern. Im Abstand von 2 cm befinden sich Markierungen, die eine relativ genaue Abschätzung der Änderung der Fadenlänge ermöglichen. Am unteren Ende des dünnen Fadens hängt ein Bleizylinder. Das Gewicht der Schnur ist vernachlässigbar klein und die Länge des gesamten Fadens soll ebenso als konstant betrachtet werden. Reibungskräfte sind ebenfalls zu vernachlässigen. Die Auswirkung der Dimensionen des Zylinders und die Auftriebskraft auf das Messergebnis soll im Abschnitt III. diskutiert werden. Wir betrachten unseren Zylinder als Massenpunkt. Die Auslenkung aus der Ruhelage beträgt $x=5\text{ cm}$. Die Messung der Periodendauer erfolgt durch eine digitale Stoppuhr.

Physikalische Grundlagen:

Die einzige Kraft, die für unseren Versuch entscheidend ist, ist die rückwirkende Kraft F_t , die tangential zur Bahnkurve gerichtet ist. Für eine Auslenkung aus der Ruhelage um den Winkel φ und den Abschnitt der Bahnkurve s ergibt sich wie im Skript beschrieben Newtonsche Bewegungsgleichung mit $m \cdot \ddot{s} = -m \cdot g \cdot \sin \varphi$. Für $s = l \cdot \varphi$ und für kleine Auslenkungen ($x \ll l$) $\sin \varphi \approx \varphi$ können wir die Gleichung wie folgt umstellen:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0$$

Daraus ergibt sich $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ und mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ gilt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Für veränderliche Fadenlängen $l = l_o - l_i$ mit l_o als ursprünglicher Fadenlänge und l_i als Verkürzung:

$$T_i = 2\pi \sqrt{\frac{l_o - l_i}{g}} \Leftrightarrow T_i^2 = -\frac{4\pi^2}{g} \cdot l_i + \frac{4\pi^2}{g} \cdot l_o$$

Hieraus ergibt sich die lineare Abhängigkeit $T_i^2 \propto l_i$, was uns die Möglichkeit gibt, die Zusammenhänge zwischen den Größen durch das Verfahren der linearen Regression zu ermitteln. Aus dieser Form ist der Anstieg mit $-\frac{4\pi^2}{g}$

und der Achsenabschnitt $\frac{4\pi^2}{g} \cdot l_o$ ersichtlich. Daraus können g und l_o ermittelt werden.

Methoden:

- M1 Für $l=l_0$ soll zehn mal die Zeit $t=T_{10}$ für zehn Schwingungen am Umkehrpunkt gemessen werden.
- M2 Für $l=l_0$ soll zehn mal die Zeit $t=T_{10}$ für zehn Schwingungen am Nulldurchgang gemessen werden.
- M3 Für $l=l_0$ soll zehn mal die Zeit $t=T_1$ für eine Schwingungen am Nulldurchgang gemessen werden.
- M4 Für $l=l_0-l_i$ soll jeweils zwei mal die Zeit $t=T_{10}$ für zehn Schwingungen am Nulldurchgang gemessen werden.

II. Messergebnisse

M1 - T_{10} , l_0 , Umkehrpunkt

Messwerte:

| i | t_i |
|----|-------|
| | in s |
| 1 | 20,44 |
| 2 | 20,59 |
| 3 | 20,47 |
| 4 | 20,35 |
| 5 | 20,41 |
| 6 | 20,5 |
| 7 | 20,44 |
| 8 | 20,35 |
| 9 | 20,32 |
| 10 | 20,5 |

Mittelwert: $\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = 20,437 s$

Standardabweichung für t :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = 0,0830 s$$

Daraus ergibt sich der zufällige Fehler für t :

$$e_z = t_s \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,0263 s \quad (\text{Student-Faktor } t_s=1 \text{ für } n \geq 6)$$

Für die systematischen Fehler ist uns nur die Messunsicherheit der Stoppuhr mit $e_s=0,01 s$ bekannt. Daraus ergibt sich die Messungenauigkeit für t :

$$u = |e_z| + |e_s| = 0,0363 s$$

Vollständiges Messergebnis:

$$T_{10} = \bar{t} \pm u = (20,437 \pm 0,0363) s$$

Bestimmung von T mit $T = \frac{T_{10}}{10}$:

$$\Rightarrow T = (2,0437 \pm 0,00363) s$$

$$T = (2,044 \pm 0,004) s$$

M2 - T_{10} , l_0 , Nulldurchgang

Messwerte:

| i | t_i |
|------|-------|
| in s | |
| 1 | 20,5 |
| 2 | 20,44 |
| 3 | 20,5 |
| 4 | 20,44 |
| 5 | 20,41 |
| 6 | 20,5 |
| 7 | 20,44 |
| 8 | 20,5 |
| 9 | 20,44 |
| 10 | 20,47 |

| | |
|-----------------------------|---|
| Mittelwert: | $\bar{t} = 20,464 s$ |
| Standardabweichung: | $s = 0,0341$ |
| Zufälliger Fehler: | $e_z = 0,0108 s$ |
| Messungenauigkeit: | $u = 0,0208 s$ |
| Vollständiges Messergebnis: | $T_{10} = (20,464 \pm 0,0208) s$ |
| Für T : | $T = (2,0464 \pm 0,00208) s$ $T = (2,046 \pm 0,002) s$ |

Die Methoden M1 und M2 liefern beinahe gleiche Messergebnisse für die Periodendauer. Allerdings wird deutlich, dass bei der Messung am Nulldurchgang (M2) die Messungenauigkeit nur halb so groß ist wie bei der Messung am Umkehrpunkt (M1). Der Grund dafür ist, dass die Geschwindigkeit am Umkehrpunkt sehr langsam ist und dadurch das Zeitintervall, in dem der Beobachter den Stillstand des Pendels feststellt, größer ist als das Zeitintervall bei der Durchquerung des Nulldurchgangs. Aus diesem Grund werden alle folgenden Messung am Nulldurchgang durchgeführt um den Messfehler zu minimieren.

M3 - T_1 , l_0 , Nulldurchgang

Messwerte:

| i | t_i |
|------|-------|
| in s | |
| 1 | 2,03 |
| 2 | 2,03 |
| 3 | 2,06 |
| 4 | 2,03 |
| 5 | 2,06 |
| 6 | 2,03 |
| 7 | 2,06 |
| 8 | 2,06 |
| 9 | 2,03 |
| 10 | 2,03 |

| | |
|-----------------------------|---------------------------|
| Mittelwert: | $\bar{t} = 2,042 s$ |
| Standardabweichung: | $s = 0,0155$ |
| Zufälliger Fehler: | $e_z = 0,0049 s$ |
| Messungenauigkeit: | $u = 0,0149 s$ |
| Vollständiges Messergebnis: | $T = (2,042 \pm 0,015) s$ |

Der Mittelwert liegt zwar dicht an den Ergebnissen von M1 und M2, doch die Messungenauigkeit ist insbesondere durch die systematischen Fehler deutlich höher. Außerdem trägt der Unterschied zwischen den Reaktionszeiten zu höherem Maße bei, was sich im Betrag des zufälligen Fehlers (pro Periode!) widerspiegelt. Diese Methode ist demzufolge unratsam für eine präzise Messung.

M4 - T_{10} , $l_0 - l_i$, Nulldurchgang

Messwerte und daraus berechnete Größen:

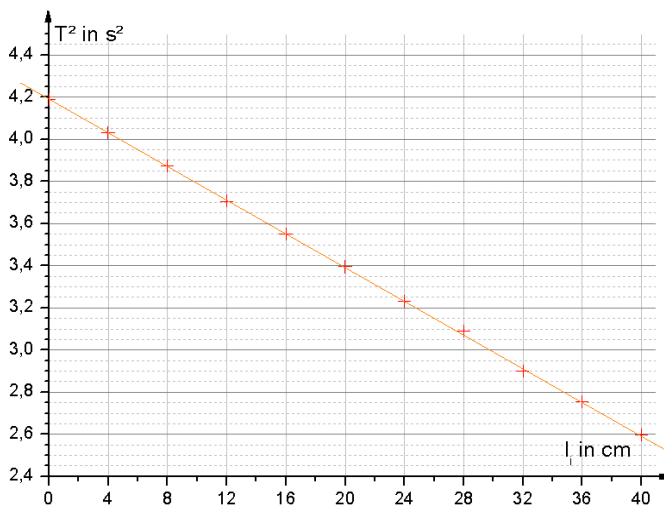
| i | l_i | u_{l_i} | t_i | | | | | \bar{T}_i | \bar{T}_i^2 | $u_{T_i^2}$ |
|----|-------|-----------|-------|-------|--------|---------|---------|-------------|-------------------|-------------|
| | in cm | | in s | | | | | in s | in s ² | |
| 0 | 0 | 0 | -- | -- | 20,464 | 0,0108 | 0,0208 | 2,0464 | 4,18775 | 8,51302E-4 |
| 1 | 4 | 0,1 | 20,06 | 20,09 | 20,075 | 0,02121 | 0,03121 | 2,0075 | 4,03006 | 0,00125 |
| 2 | 8 | 0,1 | 19,68 | 19,68 | 19,68 | 0 | 0,01 | 1,968 | 3,87302 | 3,936E-4 |
| 3 | 12 | 0,1 | 19,22 | 19,28 | 19,25 | 0,04243 | 0,05243 | 1,925 | 3,70562 | 0,00202 |
| 4 | 16 | 0,1 | 18,91 | 18,78 | 18,845 | 0,09192 | 0,10192 | 1,8845 | 3,55134 | 0,00384 |
| 5 | 20 | 0,1 | 18,44 | 18,41 | 18,425 | 0,02121 | 0,03121 | 1,8425 | 3,39481 | 0,00115 |
| 6 | 24 | 0,1 | 18 | 17,94 | 17,97 | 0,04243 | 0,05243 | 1,797 | 3,22921 | 0,00188 |
| 7 | 28 | 0,1 | 17,59 | 17,56 | 17,575 | 0,02121 | 0,03121 | 1,7575 | 3,08881 | 0,0011 |
| 8 | 32 | 0,1 | 17,06 | 17 | 17,03 | 0,04243 | 0,05243 | 1,703 | 2,90021 | 0,00179 |
| 9 | 36 | 0,1 | 16,63 | 16,56 | 16,595 | 0,0495 | 0,0595 | 1,6595 | 2,75394 | 0,00197 |
| 10 | 40 | 0,1 | 16,09 | 16,13 | 16,11 | 0,02828 | 0,03828 | 1,611 | 2,59532 | 0,00123 |

u_{l_i} wurde mit 1 mm abgeschätzt, da die Ringmarken gut zum Einstellen gedient haben.

Die Unsicherheit für T_i^2 berechnen sich wie folgt:

$$u_{T_i^2} = \left(\frac{2}{10} \cdot \frac{u_{l_i}}{\bar{T}_i} \right) \cdot \bar{T}_i^2$$

Es wurden nur l_i und t_i ermittelt, die restlichen Größen wurden berechnet. Die Werte für $i=0$ wurden aus M2 entnommen, da die Messmethode identisch mit M4 ist und nur die Anzahl der Messungen größer ist. Wie in der Einleitung besprochen können wir nun die Werte für T^2 gegen l_i auftragen.

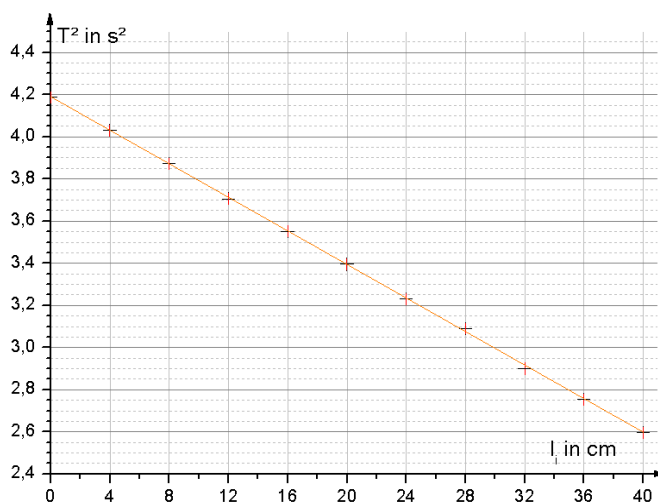


Ausgleichsgerade:

$$y = a \cdot x + b$$

$$y = -0,04003 \cdot x + 4,1904$$

Mit der Geraden wurde versucht die Fehler auszugleichen, dabei wurde am Computer sehr genau der Anstieg und Achsenabschnitt bestimmt. Die Unsicherheiten sind also unklar, deshalb sind die Werte aus diesem Verfahren nur als Vergleichsgrößen anzusehen.



Numerisches Verfahren:

$$y = a \cdot x + b$$

$$y = -0,03981 \cdot x + 4,1906$$

Unsicherheiten:

$$u_a = 1,45488 \cdot 10^{-4}; \quad u_b = 0,00242$$

$$y=T^2; \quad x=l_i;$$

$$a=-\frac{4\pi^2}{g}; \quad b=\frac{4\pi^2}{g}\cdot l_0$$

Aus den diesen Beziehungen können wir nun l_0 und g bestimmen: $g=\frac{-4\pi^2}{a}; \quad l_0=\frac{b\cdot g}{4\pi^2}=-\frac{b}{a}$

| | Ausgleichsgerade | Numerisches Verfahren |
|-------------|------------------------|------------------------|
| \bar{g} | $9,8622 \frac{m}{s^2}$ | $9,9167 \frac{m}{s^2}$ |
| \bar{l}_0 | $1,0468 m$ | $1,0527 m$ |

Unsicherheiten für g und l_0 aus dem numerischen Verfahren:

$$u_g = \left| \frac{u_a}{a} \right| \cdot \bar{g} = 0,0362 \frac{m}{s^2}; \quad u_{l_0} = \left(\left| \frac{u_a}{a} \right| + \left| \frac{u_b}{b} \right| \right) \cdot \bar{l}_0 = 0,0044$$

Endergebnisse:

$$g = (9,9167 \pm 0,0362) m/s^2 \quad l_0 = (1,0527 \pm 0,0044) m$$

$$g = (9,92 \pm 0,04) m/s^2 \quad l_0 = (1,053 \pm 0,04) m$$

Daraus können wir zum Vergleich die Periodendauer für l_0 bestimmen:

$$\bar{T} = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{l}_0}{\bar{g}}} = 2,047 s; \quad u_T = \frac{1}{2} \cdot \bar{T} \cdot \left(\left| \frac{u_g}{\bar{g}} \right| + \left| \frac{u_{l_0}}{\bar{l}_0} \right| \right) = 0,008 s$$

$$T = (2,047 \pm 0,008) s$$

Verglichen mit den Werten aus M1 und M2 bekräftigt dieses Ergebnis den errechneten Wert für die Erdbeschleunigung.

III. Fehleranalyse

In diesem Abschnitt soll die Vernachlässigung folgender Einflussgrößen begründet werden:

1. Dimensionen des Zylinders
2. Luftauftrieb
3. Näherung $\sin \varphi = \varphi$

1. Dimensionen des Zylinders Radius: $R \approx 23 \text{ mm}$; Höhe: $h \approx 23 \text{ mm}$;

Mit der Formel aus dem Skript für ein physikalische Pendel, welche diese Größen mit in Betracht zieht, können wir eine prozentuale Abweichung für unsere Periodendauer berechnen:

$$T_s = T \cdot \sqrt{1 + \frac{3 \cdot R^2 + h^2}{12 \cdot l^2}}$$

Die Korrigierte Periodendauer ist also:

$$T_s = T \cdot 1,00008$$

2. Luftauftrieb

Die Luftauftriebskraft ist der Gewichtskraft entgegen gerichtet und könnte das Ergebnis beeinflussen. Ausschlaggebend für die Auftriebskraft und die Gewichtskraft sind hier die Massendichten $\rho_l = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ für Luft und $\rho_k = 11340 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ für Blei, da die Auftriebskraft betragsgleich mit der Gewichtskraft der verdrängten Luft ist. Die prozentuale Abweichung errechnet sich wie folgt:

$$T_A = T \cdot \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_k - \rho_l}}$$

Die korrigierte Größe Periode: $T_A = T \cdot 1,0000529$

3. Näherung $\sin \varphi = \varphi$

Für diese Vereinfachung möchte ich bezogen auf unser Experiment lediglich eine Höchstfehlerabschätzung machen. Hierzu möchte ich für φ die größtmögliche Abweichung von $\sin \varphi$ ermitteln. Bei einer Fadenlänge von 1 m und einer maximalen Auslenkung von $0,05 \text{ m}$ errechnet sich der Winkel mit $\varphi = \arcsin 0,05 \approx 0,050021$ und natürlicherweise ist der Sinus des Winkels $\sin \varphi = 0,05$. Bei der maximalen Auslenkung errechnet sich folgende Prozentuale Abweichung:

$$\frac{\varphi}{\sin \varphi} = \frac{0,050021}{0,05} = 1,0004$$

Bei abnehmenden Winkel wird diese Abweichung sogar noch kleiner. Der Fehler geht linear in die Abweichung der Tangentialkomponente der Gewichtskraft ein und nach $\omega = \sqrt{g \cdot l^{-1}}$ ist der Einfluss auf die Winkelgeschwindigkeit und somit auf die Periodendauer sogar noch geringer.

Unsere Näherungen waren gerechtfertigt, da die Abweichungen viel kleiner als unsere Messunsicherheiten sind und somit einen vernachlässigbar kleinen Einfluss darstellen.

IV. Auswertung

Die Ergebnisse unseres Experiments veranschaulichten, dass Messunsicherheiten stark von der Methode abhängig sind. Eine Messung am Nulldurchgang und die Messung der Zeit für mehrere Schwingungen ergaben geringere Messunsicherheiten als Messungen am Umkehrpunkt bzw. für einzelne Schwingungen. Zusätzlich ist durch die indirekte Messung der Fadenlänge eine ungenaue Ermittlung durch ein Lineal eliminiert worden. Trotz der Optimierung unseres Messverfahrens scheinen wir einige Einflussgrößen außer Acht gelassen zu haben, denn der ermittelte Wert der Erdbeschleunigung $g = (9,92 \pm 0,04) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ überlappt mit seiner Messunsicherheit leider nicht den erwarteten Wert für Berlin von $g \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Dennoch konnte durch unsere einfache Anordnung und Methode ein relativ genaues Ergebnis ermittelt werden.