Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I
der Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik – Physikalisches Grundpraktikum

Versuchsprotokoll

zur **Bestimmung der Federkonstante** (F4)
am Arbeitsplatz 2

durchgeführt am **14.01.2009**
mit Versuchspartnerin **Barbara Baumann** (530573)

Protokoll von **Sebastian Milster** (529125)

Gliederung:

<u>I. Einleitung</u>

Die Federkonstante *k* einer Feder soll mittels drei verschiedener Methoden ermittelt werden. Dabei werde ich auf die Messunsicherheiten der einzelnen Methoden eingehen und in die Teilergebnisse einfließen lassen. Am Ende erfolgt eine Abschätzung der Federkonstante aus den drei ermittelten Werten.
Zunächst werde ich den Versuchsaufbau und anschließen die drei Methoden beschreiben.

Der Versuchsaufbau:

Eine Schraubenfeder ist an ihrem oberen Ende an einem Stativ aufgehängt. Am unteren Ende der Feder befindet sich ein kleines rechteckiges Metallblättchen, dessen Ober- und Unterkante parallel zur der am Stativ fest montierten Spiegelskala ist. Diese Anordnung ermöglicht eine relativ genaue Ablesung mit dem Auge. Unter diesem Metallblättchen ist ein Haken, an dem Massenstücke angehängt werden können.

Die Methoden:

1. Statische Messung (II.)

Die Auslenkung *x* einer Feder weist ein lineares statisches Verhalten in Abhängigkeit zur belastenden Zugkraft, hier die Gewichtskraft der angehängten Masse F_G, auf. In der der Ruhelage gilt die rechts dargestellte Beziehung.

$$F_K = F_G$$
$$k \cdot x = m \cdot g$$
$$k = \frac{m}{x} \cdot g$$

Es stehen acht verschiedene Massenstücke mit jeweils *m = 50g* zur Verfügung. Die Auslenkung *x* soll in Abhängigkeit zur angehängten Masse ermittelt und grafisch aufgetragen werden. Anschließend wird der Anstieg durch ein Steigungsdreieck und eine numerische Methode festgestellt werden. Aus der Formel ist zu entnehmen, dass mithilfe des Anstiegs und der Erdbeschleunigung die Federkonstante ermittelt werden kann.

2. Dynamische Messung (III.)

Bei einem harmonischen Oszillator besteht, wie rechts dargestellt, ein Zusammenhang zwischen der Kreisfrequenz *ω*, der Masse *m* und der Federkonstante *k*. Außerdem ist die Periodendauer *T* mit der Kreisfrequenz eng verknüpft.

Eine bekannte Masse m_M = *400g* wird an die Feder gehangen und leicht nach unten ausgelenkt. Bei dieser Methode muss die Masse der Feder m_F = *5g* berücksichtigt werden, da sie mitschwingt. Da jedoch nicht alle Bereiche der Feder gleichermaßen an der Schwingung beteiligt sind, kann die zusätzliche Masse mit m_F / 3 genähert werden. Beim Loslassen kommt es zu einer vertikalen Schwingung. Dabei soll das 20-fache der Periodendauer T_{20} mithilfe einer digitalen Stoppuhr gemessen werden. Aus der Formel ersichtlich, erhält man aus diesen gegeben Werten unsere Federkonstante.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$
$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$k = 4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \frac{1}{T^2}$$
$$m = m_M + \frac{m_F}{3}; \quad T = \frac{T_{20}}{20}$$
$$k = 1600 \cdot \pi^2 \cdot \left(m_M + \frac{m_F}{3}\right) \cdot \frac{1}{T_{20}^2}$$

3. Berechnung aus der Geometrie und den Materialeigenschaften (IV.)

Die Geometrie (Drahtdurchmesser *d*, Drahtlänge *l*, Federradius *r*) und die Materialeigenschaft (Torsionsmodul G) der Feder sind uns gegeben und können in die nebenstehende Gleichung eingesetzt werden. Dieser Wert dient als Vergleichsgröße.

$$k = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{G \cdot d^4}{l \cdot r^2}$$

II. Statische Messung

Mithilfe unseres Ableseblättchen haben wir die Ruhelage auf der Skala mit d_0 = *19,7 cm* ermittelt. Die Skala nimmt nach unten hin ab und somit ergibt sich unsere Auslenkung mit $x_i = d_0 - d_i$. Es wurden insgesamt zwei Messreihen durchgeführt. Wir erhielten identische Werte, weshalb sie in der Tabelle keine Berücksichtigung finden.

Messwerte:

i	Masse m_i in g	Skalawerte d_i in cm	Auslenkung x_i in cm
0	0	19,7	0
1	50	18,6	1,1
2	100	17,5	2,2
3	150	16,5	3,2
4	200	15,5	4,2
5	250	14,5	5,2
6	300	13,6	6,1
7	350	12,6	7,1
8	400	11,6	8,1

Die Abweichung der Massen beträgt in etwa 1% und bei der Ablesung der Skala beträgt die Ungenauigkeit in etwa 0,05cm, da man sich für einen der beiden Millimeterstriche entscheiden Muss. Diese Ungenauigkeit gilt auch beim Ablesen des Ruhepunkts, weshalb eine maximale Ungenauigkeit von 0,1cm zustande kommt. Die Fehlerkreuze wurden im folgenden Diagramm aufgetragen.

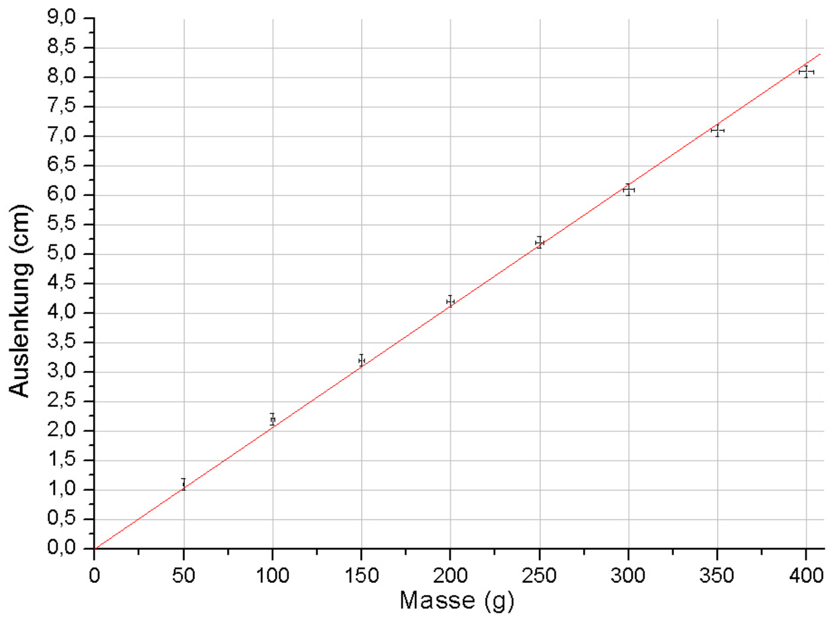
Steigungsdreieck:

Ich habe in diesem Diagramm eine Ausgleichsgerade durch den Ursprung gezogen und den folgenden Anstieg ermittelt:

$$\frac{x}{m} = 0{,}02055 \frac{cm}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{x} = 48{,}670 \frac{g}{cm}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{x} = 4{,}8670 \frac{kg}{m}$$



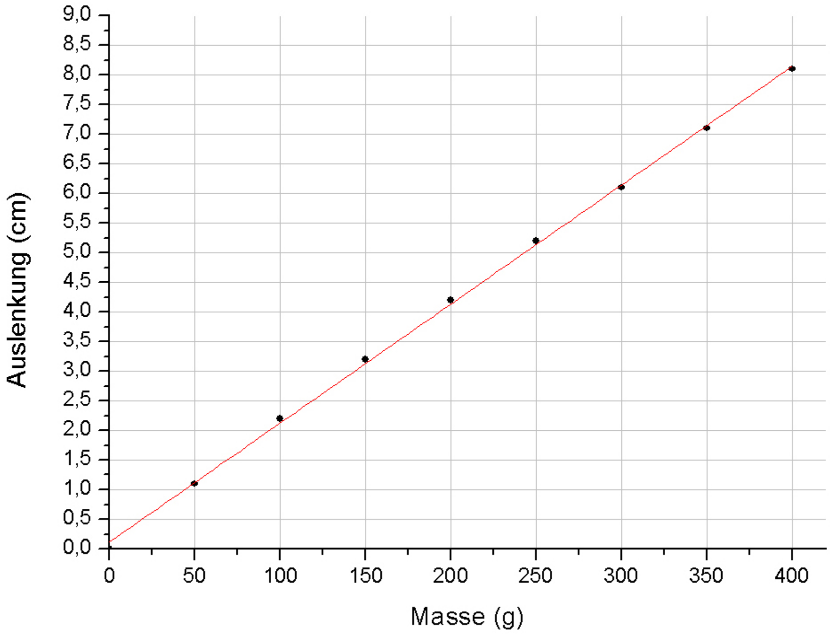
Numerisch:

Beim numerischen Verfahren entstand eine Regressionsgerade mit dem folgenden Anstieg:

$$\frac{x}{m} = 0{,}02007 \frac{cm}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{x} = 49{,}826 \frac{g}{cm}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{x} = 4{,}9826 \frac{kg}{m}$$



Um die Federkonstante $\bar{k} = \frac{m}{x} \cdot g$ (zunächst ohne Fehlerbetrachtung) zu bestimmen benutzen wir die bekannte Formel, wobei $g = 9{,}8130\, m \cdot s^{-2}$.

Steigungsdreieck	*Numerisch*
$\bar{k} = 4{,}867 \frac{kg}{m} \cdot 9{,}8130 \frac{m}{s^2}$ $\bar{k} = 47{,}76 \frac{kg}{s^2}$	$\bar{k} = 4{,}9826 \frac{kg}{m} \cdot 9{,}8130 \frac{m}{s^2}$ $\bar{k} = 48{,}89 \frac{kg}{s^2}$

Fehleranalyse:

Hier verwende ich nur systematische Fehler, da die zufälligen Fehler bereits durch die Bestimmungsverfahren des Geradenanstiegs „korrigiert" . Beim numerischen Verfahren wurde ein vernachlässigbar kleiner Fehler ermittelt. Die Ungenauigkeit der Erdbeschleunigung ist ebenfalls vernachlässigbar klein.

$$\Delta g = 0{,}0001 \frac{m}{s^{-2}}$$

Relevante Fehlergrößen:

$$\Delta m = 0{,}004\, kg\, (Ungenauigkeit\ für\ die\ maximale\ Masse\ m = 400\, g)$$
$$\Delta x = 0{,}001\, m\, (Ungenauigkeit\ beim\ Ablesen\, ,\ durchschnittlich\ 5/100\ zur\ Auslenkung)$$

$$\Delta k = \bar{k} \cdot (\frac{\Delta m}{\bar{m}} + \frac{5}{100}) = \bar{k} \cdot \frac{6}{100} = 2{,}9 \frac{kg}{s^2} \qquad für\ beide\ Werte$$

Endergebnisse für die statische Messung:

Steigungsdreieck:

$$k = 47{,}8 \frac{kg}{s^2} \pm 2{,}9 \frac{kg}{s^2}$$

Numerisch:

$$k = 48{,}9 \frac{kg}{s^2} \pm 2{,}9 \frac{kg}{s^2}$$

III. Dynamische Messung

Messwerte:

T_{20} *in s*	11,16	11,16	11,25	11,22	11,18	11,28	11,16	11,25	11,13	11,18

Mittelwert: $\overline{T}_{20}=11,20\,s$

Mithilfe der oben erklärten Formel ermitteln wir zunächst den Mittelwert für unsere Federkonstante:

$$\overline{k}=1600\cdot\pi^2\cdot(m_M+\frac{m_F}{3})\cdot\frac{1}{\overline{T}_{20}^2}$$

$$\overline{k}=1600\cdot\pi^2\cdot(0,4\,kg+0,005\frac{kg}{3})\cdot\frac{1}{(11,2\,s)^2}$$

$$\overline{k}=50,56\frac{kg}{s^2}$$

Fehleranalyse:

Standardabweichung: $s=0,050\,s$

Die Standardabweichung beschreibt die zufälligen Messungenauigkeiten, die auf die Reaktionsvarianz der messenden Person zurückzuführen ist. Die Tatsache, dass 20 Perioden gemessen wurden, verringert die Ungenauigkeit für eine einzelne Periode. Hinzukommen kommen nun der Messungenauigkeit von 0,01s für 20s und der Laufzeitabweichung von 1s/Tag der Stoppuhr. Die Laufzeitabweichung innerhalb unseres Messintervalls von in etwa zehn Sekunden beläuft sich auf weniger als 0,0002s. Die Unsicherheit bezüglich der Masse ist wieder mit 4g anzunehmen.

$$\Delta k=\overline{k}\cdot(\frac{\Delta m}{\overline{m}}+2\cdot\frac{\Delta T}{\overline{T}})$$

$$\Delta k=50,56\frac{kg}{s^2}\cdot(\frac{0,004\,kg}{0,4\,kg}+2\cdot\frac{0,0602\,s}{11,2\,s})$$

$$\Delta k=1,05\frac{kg}{s^2}$$

Endergebnis für die dynamische Messung:

$$k=50,6\frac{kg}{s^2}\pm1,1\frac{kg}{s^2}$$

IV. Berechnung aus der Geometrie und den Materialeigenschaften

Für die Feder sind folgende Werte gegeben:

$$G=(8{,}1\pm 0{,}7)\cdot 10^{10}\,Pa$$
$$d=(0{,}805\pm 0{,}003)\cdot 10^{-3}\,m$$
$$l=(685\pm 5)\cdot 10^{-3}\,m$$
$$r=(10{,}0\pm 0{,}2)\cdot 10^{-3}\,m$$

Einsetzen in die Formel:

$$\overline{k}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{G\cdot d^4}{l\cdot r^2}$$

$$\overline{k}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{8{,}1\cdot 10^{10}\cdot(0{,}805\cdot 10^{-3})^4}{685\cdot 10^{-3}\cdot(10\cdot 10^{-3})^2}\cdot\frac{kg}{s^2}$$

$$\overline{k}=49{,}657\,\frac{kg}{s^2}$$

Fehleranalyse:

Hier kann nur eine einfache Fehlerrechnung in Betracht gezogen werden:

$$\Delta k=\overline{k}\cdot\left(\frac{\Delta G}{\overline{G}}+4\cdot\frac{\Delta d}{\overline{d}}+\frac{\Delta l}{\overline{l}}+2\cdot\frac{\Delta r}{\overline{r}}\right)$$
$$\Delta k=49{,}657\,\frac{kg}{s^2}\cdot\left(\frac{0{,}7}{8{,}1}+4\cdot\frac{0{,}003}{0{,}805}+\frac{5}{685}+2\cdot\frac{0{,}2}{10}\right)$$
$$\Delta k=7{,}38$$

Endergebnis für die Berechnung:

$$k=50\,\frac{kg}{s^2}\pm 7{,}0\,\frac{kg}{s^2}$$

V. Auswertung

Die Ergebnisse liegen alle in der selben Größenordnung und der tatsächliche Wert der Federkonstante scheint irgendwo um den Wert $k=50\,kg\cdot s^{-2}$ zu liegen. Festzustellen ist, dass je mehr Größen zu Ermittlung verwendet werden, desto ungenauer die Abschätzung wird. Die Vermutung liegt nahe, dass das dynamische Messverfahren eine deutlich genauere Angabe über den tatsächlichen Wert machen kann als die anderen beiden Methoden, da nur eine einzige Messgröße benötigt wird. Leider ist die Tatsache, dass mit der Hand gestoppt wurde, zu bemängeln, da teilweise erhebliche Ungenauigkeiten Auftreten könnten. Eine Zeitmessung von wesentlich mehr als 20 Perioden könnte diese Methode sogar noch Verbessern. Auffällig ist, dass die statische Messmethode einen etwas geringeren Wert liefert, was möglicherweise auf unbeachtete (altersbedingte?) innere Reibungskräfte zurückzuführen ist, die der Zugkraft entgegenwirken. Solche Kräfte dämpfen beim dynamischen Verfahren nur die Amplitude ohne erhebliche Veränderung auf die Periodendauer und sind irrelevant für Geometrie und Materialkonstante.

Da beim Vergleich der Teilergebnisse keine gravierenden Unterschiede zu entdecken waren, können wir im Nachhinein grobe Messfehler ausschließen und dem Messergebnis von $k=50\,kg\cdot s^{-2}$ mit einer persönlichen Abschätzung von ± 5 Prozent Glauben schenken.