Versuch zum Einführungspraktikum: Bestimmung von Federkonstanten

Tammo Rukat
Mtrknr.: 528345
MB Physik/Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin

23.01.2009

Inhaltsverzeichnis

1 Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Information zum vorliegenden Versuch sind dem Begleitheft zum Grundpraktikum zu entnehmen. An dieser Stelle seien nur die Bewegungsgleichung eines Federschwingers angegeben, sowie eine wichtige aus ihr folgende Beziehung:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

2 Messwerte und Auswertung

2.1 Die Massestücke

Im folgenden betrachten wir den Fehler der durch die Gewichtsschwankung einzelnen Massestücke verursacht wird. Hierzu werden alle acht Massen gewogen.

Masse in g
50,062
50,262
49,984
49,991
50,644
49,979
49,953
49,954

Wir berechnen den Mittelwert

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} x_i = 50,1036g$$

und die Standardabweichung

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = 0,240957g$$

Der Messfehler der Waage kann vernachlässigt werden. Als Massenwert verwenden wir nun:

$$m = 50,1036g \pm 0,240957g$$

2.2 Statische Messung der Federkonstante

Nun messen wir die Auslenkung der Feder unter Belastung mit den verschiedenen Massen mithilfe einer Spiegelskala. Jede Messung erfolgt zwei Mal. Als Messunsicherheit wird die für einen Stahlmaßstab typische von $50\mu m + 10^{-3}L$ gewählt. Für L wählen wir nicht die tatsächlich gemessene Länge, da die Skala fest montiert ist, die Messungenauigkeit also bei größeren Längen L nicht größer wird sondern verwenden $L = 0,07m$ da sich die gemessenen Daten in einem Intervall der ungefähren Größe $0,07m$ befinden.
Ist das für ein bestimmtes gemessenes Gewicht gemessene Wertepaar nicht identisch verwenden wir lediglich den arithmetischen Mittelwert, da die Berechnung einer Standardabweichung für nur zwei Messungen nicht sinnvoll ist. So erhalten wir als Auslenkung:

$$x = \overline{x} \pm 50\mu m + 10^{-3}L = \overline{x} \pm 1,2 \cdot 10^{-4}m$$

$Masseing \pm 0,240957g$	$\overline{x}inmm \pm 0,12mm$
0	188,5
50,1036	178,5
100,2072	169,5
150,3108	160,5
200,4144	151,5
250,518	142,5
300,6216	134
350,7252	125
400,8288	116

In der graphischen Darstellungen der Messergebnisse bestätigt sich die lineare Zuordnung $(F = -kx)$.

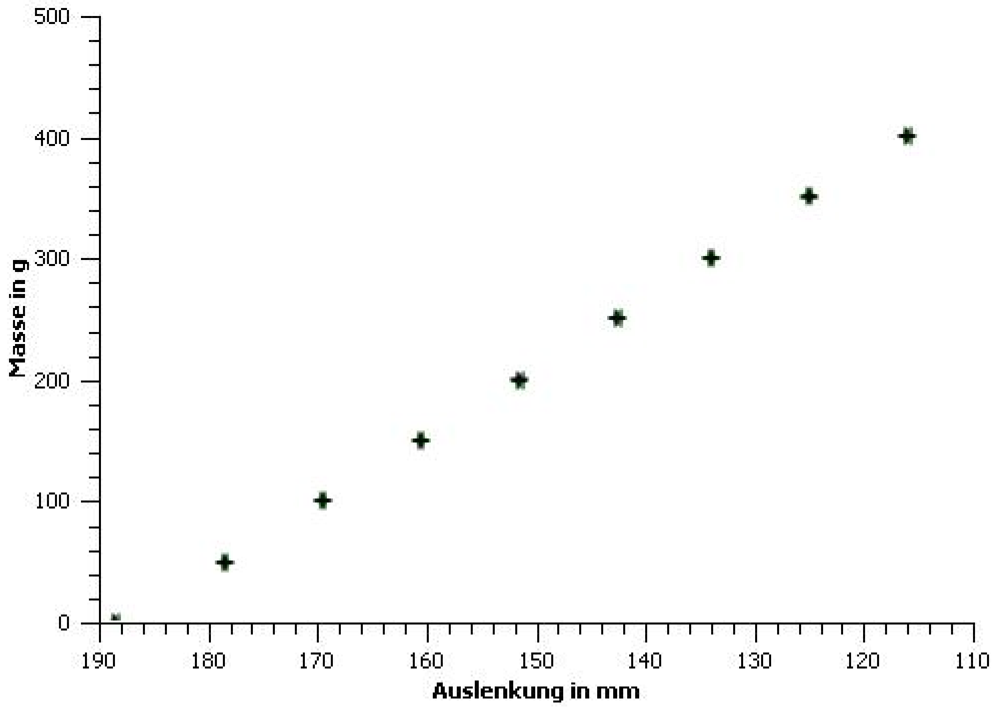

Abbildung 1: Auslenkung der Feder unter Belastung mit verschiedenen Massen

2.2.1 Graphische Abschätzung

Aus der Steigung der Messpunkte ist die Federkonstante zu errechnen. Grobes Abschätzen aus der Graphischen Darstellung mit einem geschätzten Fehler von je einer halben Skaleneinheit führt zu einer Steigung

$$\frac{m}{x} = \frac{g}{k} \approx \frac{400g \pm 10g}{73mm \pm 1mm} = 5,48\frac{kg}{m} \pm 0,21\frac{kg}{m}$$

Um ein Ergebnis für k zu erhalten müssen wir noch mit der Gravitationskonstante g multiplizieren, die aber wegen Zentrifugalkraft, Erdabplattung und Höhenprofil regional um einige Promille variiert. Wir verwenden hier den international festgelegten Standardwert von $g = 9,80665\frac{m}{s^2}$ und verzichten auf die Angabe einer Messunsicherheit, da ein modernes Gravimeter in der Lage ist den Wert auf ca. $10^{-9}\frac{m}{s^2}$ genau zu bestimmen, wir die Ungenauigkeit also für die prinzipielle Diskussion der Messewerte als vernachlässigbar ansehen können.

$$\Rightarrow k \approx (5,48 \pm 0,21)\frac{kg}{m} \cdot 9,80665\frac{m}{s^2} \approx (53,74 \pm 2,1)\frac{N}{m}$$

2.2.2 Ermittlung mithilfe linearer Regression

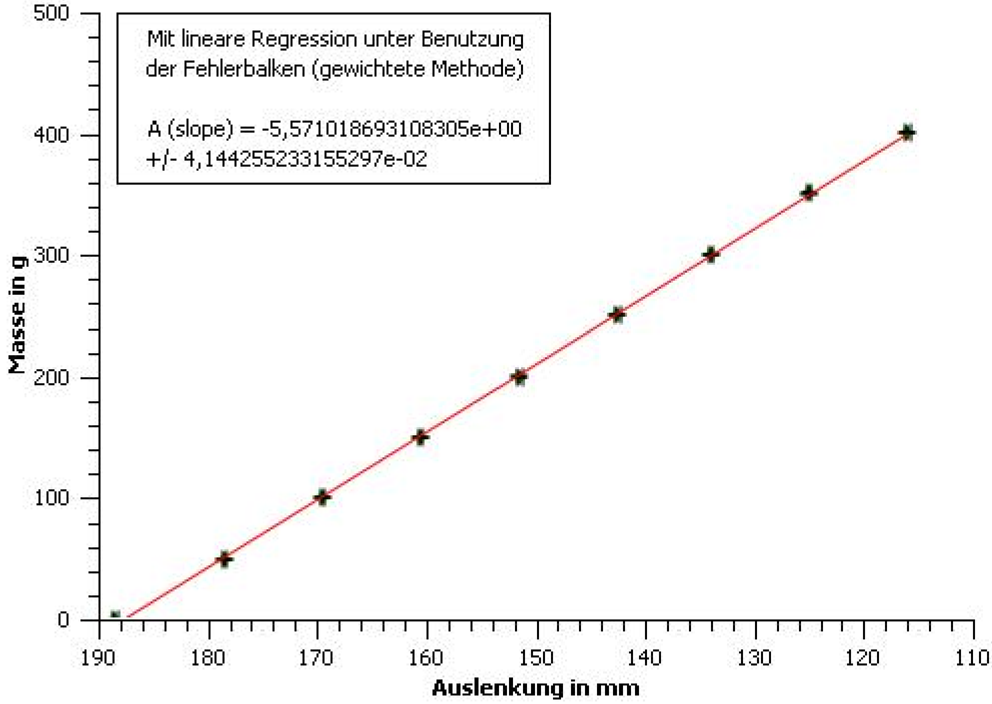

Abbildung 2: Auslenkung der Feder mit linearer Regression

Abbildung 2 zeigt die Messwerte unter Anwendung einer gewichteten linearen Regression (mit Berücksichtung des Fehlers).

Die analytisch ermittelte Steigung beträgt $5,57\frac{kg}{m} \pm 0,04\frac{kg}{m}$. Analog zur obigen Rechnung erhalten wir:

$$k = \frac{m}{x} \cdot g = (5,57 \pm 0,04)\frac{kg}{m} \cdot 9,80665\frac{m}{s^2} \approx (54,63 \pm 0,4)\frac{N}{m}$$

2.3 Dynamische Messung der Federkonstante

Für die Dynamische Ermittlung der Masse nutzen wir die bekannte Beziehung:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Wir messen 10 mal die Zeit für 20 Schwingungen und ermitteln so die Schwingungsdauer aus der wir unter Verwendung der schwingenden Masse m die Federkonstante k erhalten.

Gemessene Dauer für 20 Perioden [s]
10,09
10,72
10,59
10,06
10,66
10,59
10,5
10,28
10,53
10,56

Als Messunsicherheiten sind hier die Varianz der Reaktionszeit beim betätigen der Stoppuhr, die Standardabweichung sowie der systematische Fehler der Uhr zu betrachten.
Letzterer beträgt, wie dem Skript zum physikalischen Grundpraktikum zu entnehmen ist, bei einer Digitaluhr $0,01s + 5 \cdot 10^{-4}s$. Die Varianz beträgt $0,054s$ und die Standardabweichung beträgt $0,23s$. Dies führt bei gemessenen Zeiten von jeweils ca. $10s$ zur Messunsicherheit:

$$\pm u = \pm((0,01 + 0,005) + 0,054 + 0,23)s = \pm 0,3s$$

Als Mittelwert erhalten wir aus der Messreihe

$$20\overline{T} = 10,46s \pm 0,30s \Rightarrow \overline{T} = 0,523s \pm 0,015s$$

Außerdem verwenden wir die bei der statischen Betrachtung bereits ermittelte Masse von $400,83g$ und beachten weiterhin die Eigenmasse der Feder die ca $5g$ beträgt. Diese nimmt jedoch unterschiedlich an der Bewegung teil und wird deshalb nur mit einem Drittel ihrer Masse berücksichtigt wird. Somit ergibt sich als Gesamtmasse:

$$m = 402,5g$$

Mit unsere oben hergeleiteten Formel erhalten wir:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0,4025kg}{(0,523s \pm 0,015s)^2} = (58,09 \pm 3,4)\frac{N}{m}$$

2.4 Berechnung der Federkonstanten aus Geometrie und Materialeigenschaften

Es ist eine Formel bekannt die es unter Angabe des Torsionsmoduls und den geometrischen Daten der Feder ermöglicht die Federkonstante k zu berechnen.
Auf der Feder am Versuchsplatz waren folgende Angaben zu finden:

$$
\begin{aligned}
G &= (8,1 \pm 0,7) \cdot 10^{10} Pa \\
d &= (0,805 \pm 0,003) mm \\
l &= (617 \pm 5) mm \\
r &= (10,0 \pm 0,2) mm
\end{aligned}
$$

Die Formel liefert:

$$k = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{G \cdot d^4}{l \cdot r^2} \approx (54 \pm 4) \frac{N}{m}$$

3 Fehleranalyse und Ergebniseinschätzung

Wir haben nun auf drei verschiedene Weisen Messwerte für die Federkonstante k ermittelt:

- Durch statische Messung:
  $(54,63 \pm 0,4)\frac{N}{m}$ (lineare Regression) $(53,74 \pm 2,1)\frac{N}{m}$ (graphische Abschätzung);
- Durch dynamische Messung:
  $(58,09 \pm 3,4)\frac{N}{m}$
- Durch Betrachtung der Geometrie und der Materialeigenschaften:
  $(54 \pm 4)\frac{N}{m}$

Für die Diskussion dieser Ergebnisse wollen wir zuerst nach systematischen Messfehlern suchen, die besonders in der dynamischen Messung eine Rolle spielen, da die Schwingung nach einiger Zeit stets auch seitliche Schwingungen auszuführen beginnt, die die Periodendauer beinflusst. Dieser Effekt ist schwer zu berücksichtigen, da er mit sehr unterschiedlicher Intensität auftritt. Hier wäre eine Besserung nur durch eine größere Anzahl an Messung unter Berücksichtigung der jeweiligen seitlichen Schwingungen möglich.
Dieses kann eine Erklärung für den vergleichsweise hohen resultierenden Wert der Federkonstante sein, da eine seitliche Schwingung die Periodendauer verlängert und diese invers quadratisch in die Federkonstante eingeht. Diese quadratische Abhängigkeit ist der größte Nachteil der dynamischen Methode, da der fehleranfällige Wert bei der statischen Methode nur in erster Potenz eingeht.
Dieses Faktum, sowie das Verfahren der linearen Regression bedingen die um etwa eine

10er-Potenz kleinere Messunsicherheit bei der statischen Methode und machen dieses Verfahren zum genauesten. Dies gilt jedoch nur unter der Voraussetzung einer genau bestimmten Erdbeschleunigung, da ansonsten ein zweiter unsicherer Faktor in die Rechnung eingeht.
Die dritte Methode sich die Geometrie und die Materialeigenschaften der Feder zunutze zu machen besitzt eine noch größere Messunsicherheit als die dynamische Methode, da hier gleich vier unsicherheitsbehaftete Größen, teilweise quadratisch oder ihn noch höheren Potzenzen, eingehen.

Um zu einem abschließenden Ergebnis zu kommen wollen wir einen gewichteten Mittelwert angeben in den die Größen im reziproken Verhältnis ihrer Messunsicherheit eingehen. Wir erhalten:

$$\frac{(\frac{1}{0{,}4} \cdot 54,63\frac{N}{m}) + (\frac{1}{3{,}4} \cdot 58,09\frac{N}{m}) + (\frac{1}{4} \cdot 54\frac{N}{m})}{\frac{1}{0{,}4} \cdot \frac{1}{3{,}4} \cdot \frac{1}{4}} = (54,92 \pm 1)\frac{N}{m}$$

4 Anlage

Verwendete Software:

- QtiPlot 0.9.6.2
- MikeTex 2.7
- TeXnicCenter 1.0

Weitere Anlage:

- Protokoll der Versuchsdaten