Martin Heyne, 530577

# 1. Einleitung

Ziel dieses Versuches soll es sein, die Hauptträgheitsmomente eines Gyroskops zu bestimmen, indem dessen Präzessions- und Nutationsperiodendauer gemessen wird. Zusätzlich wird das Trägheitsmoment entlang der Figurenachse rechnerisch bestimmt.

Detaillierte Durchführung, Skizzen, Hinweise und Herleitungen sind dem Skript "Physikalisches Grundpraktikum – Mechanik und Thermodynamik 2005" zum Versuch M10 auf den Seiten 48 – 53 entnehmbar.

# 2. Physikalische Grundlagen

## 2.1. Präzession

Wirkt auf das Gyroskop ein äußeres Drehmoment, so kommt es durch den Drehimpulserhaltungssatz zu einer Präzessionsrotation senkrecht zur Drehimpulsachse und der Drehmomentachse.
Die Periodendauer $T_P$ dieser Präzessionsbewegung berechnet sich durch:

$$T_P = 4\pi^2 J_x \cdot \frac{n}{M} \qquad (1)$$

Hierbei ist das Drehmoment M gleich:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = r\,m\,g \qquad (2)$$

## 2.2. Nutation

Bei einem kräftefreien Kreisel, auf den also kein Drehmoment wirkt, ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße. Wird das Gyroskop nun an der üblichen Rotation um die Figurenachse gestört, kommt es zur Nutation.
Dabei rotiert der Kreisel nicht nur um seine Figurenachse, sondern auch mit seiner Figurenachse um die raumfeste Drehimpulsachse.
Die Nutationsperiodendauer, die Zeit in der die Figurenachse eine Kreisbewegung vollendet ist:

$$T_N = \frac{J_s}{J_x} \cdot \frac{1}{n} \qquad (3)$$

## 2.3. Berechnung des Trägheitsmomentes

Bei der Berechnung des Trägheitsmomentes wird der Kreisel des Gyroskops in Hohlzylinder aufgeteilt, dessen einzelne Trägheitsmomente sich leichter berechnen lassen. Anschließend werden dann alle Teilträgheitsmomente aufsummiert, sodass $J_x$ schließlich diese Form hat:

$$J_x = \sum_i \frac{1}{2} \pi \rho_i h_i (R_i^4 - r_i^4) \qquad (4)$$

# 3. Messwerte und Fehlerberechnung

## 3.1. Erste Messung

Den Fehler der Messung der Periodendauer nehme ich mit 0.5 s an.
Die Ungenauigkeit des Drehmoments schätze ich mit 0.05 Nm ein und die der Kreiseldrehzahl mit 0.1 Hz.

Bei der ersten Messung wurde die Drehzahl n konstant bei 12 Hz gehalten, während das Drehmoment diskret in 50g-Schritten erhöht wurde.
Nach Formel (1) und (2) ist eine antiproportionale Abhängigkeit zu erwarten.

Es ergaben sich folgende Messwerte:

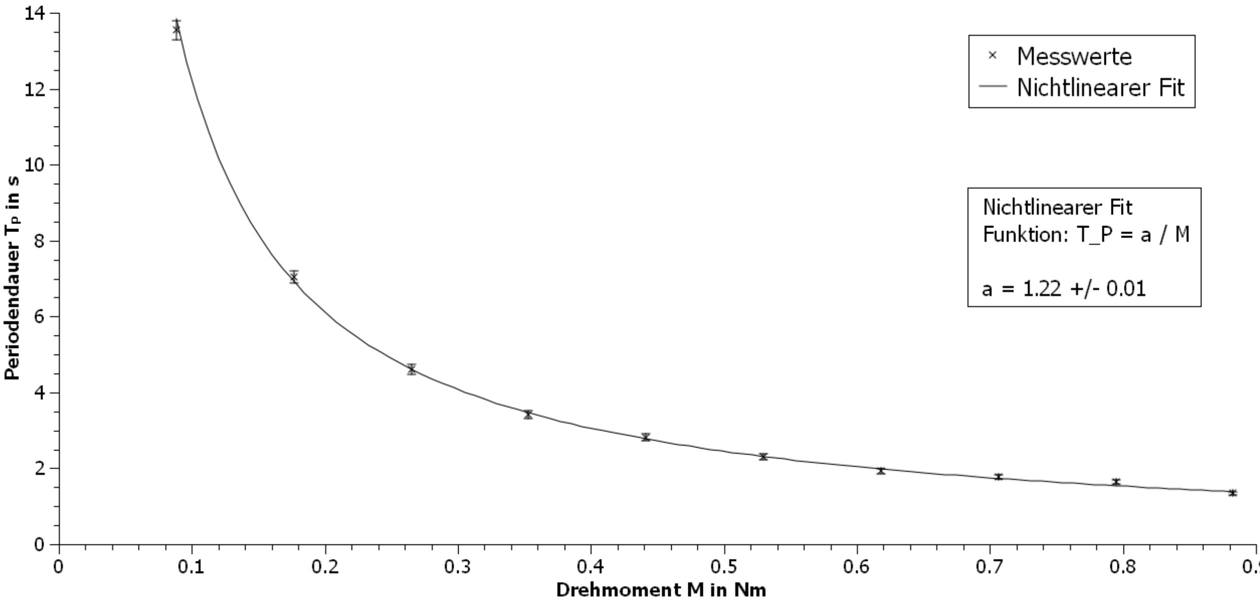


Diagramm 1: Aufgabe 1 - $T_P = f(1/M)$

Die Regressionsrechnung wurde mittels der Software qtiPlot durchgeführt und lieferte den Proportionalitätsfaktor a, welcher sich in Gleichung (1) einsetzen lässt:

$$a = (1.22 \pm 0.01) \frac{kg\, m^2}{s} = 4\pi^2 J_x n \quad \text{bzw.} \quad J_x = \frac{a}{4\pi^2 n}$$

Die Fehlerfortpflanzung liefert für $J_x$ folgenden Fehler:

$$\Delta J_x = \sqrt{\left(\frac{\partial J_x}{\partial a} \cdot \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial J_x}{\partial M} \cdot \Delta M\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi^2 n} \cdot 0.01\right)^2 + \left(\frac{1.22}{4\pi^2 n^2} \cdot 0.1\right)^2} \simeq 3 \cdot 10^{-5}$$

Sodass sich für $J_x$ der Wert ergibt:

$$J_x \simeq (2.58 \pm 0.03) \cdot 10^{-3}\, kg\, m^2$$

## 3.2. Zweite Messung

In der zweiten Messung wurde die Kreiseldrehzahl variiert und das Drehmoment (m=200g) konstant gehalten.
Nach Formel (1) ist ein linearer Zusammenhang zu erwarten.

Das wirkende Drehmoment berechnet sich nach Formel (2) zu:

$$M = 0.18\,m \cdot 0.2\,kg \cdot 9.81\,\frac{m}{s^2} \simeq (0.35 \pm 0.05)\,Nm$$

Es ergaben sich folgende Messwerte:

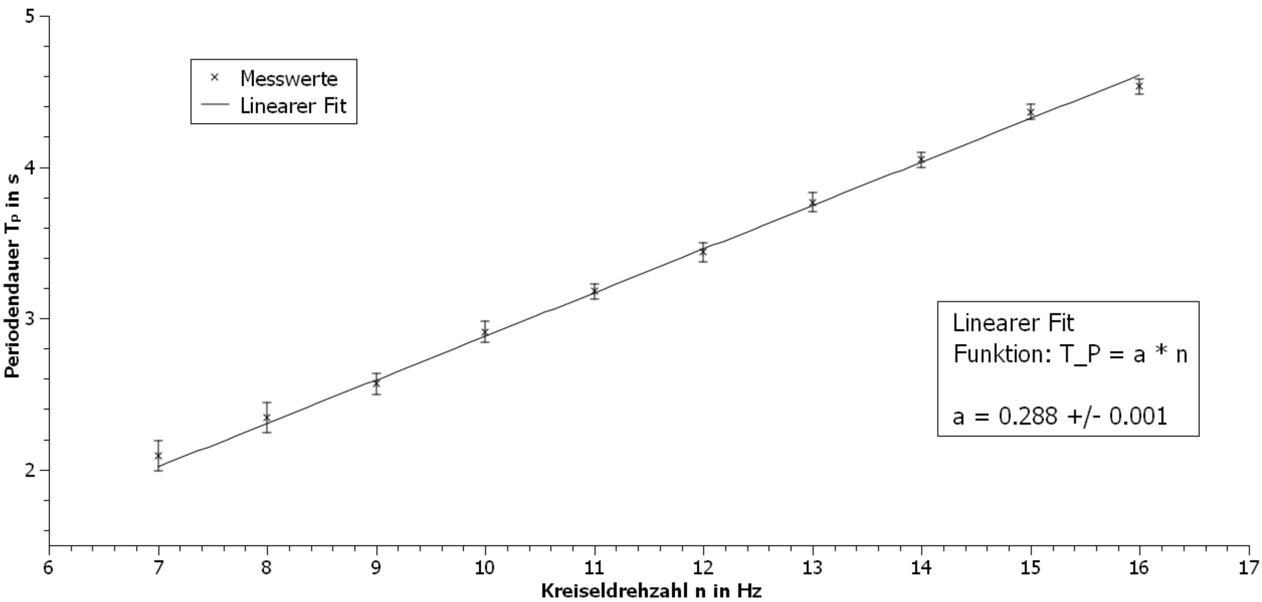


Diagramm 2: Aufgabe 2 - $T_P = f(n)$

Die lineare Regressionrechnung (qtiPlot) gibt den Proportionalitätsfaktor a an mit:

$$a = (0.288 \pm 0.001)\,s^2 = \frac{4\pi^2 J_x}{M} \quad \text{bzw.} \quad J_x = \frac{a\,M}{4\pi^2}$$

Für $J_x$ berechnet sich folgender Fehler:

$$\Delta J_x = \sqrt{\left(\frac{\partial J_x}{\partial a} \cdot \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial J_x}{\partial n} \cdot \Delta n\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.35}{4\pi^2} \cdot 0.001\right)^2 + \left(\frac{0.288}{4\pi^2} \cdot 0.05\right)^2} \simeq 4 \cdot 10^{-4}$$

Somit ergibt sich für $J_x$ der Wert:

$$J_x \simeq (2.6 \pm 0.4) \cdot 10^{-3}\,kg\,m^2$$

## 3.3. Dritte Messung

In der dritten Messung haben wir nun die Nutationsperiodendauer, bei wechselnder Kreiseldrehzahl gemessen um darüber das Trägheitsmoment entlang der Aufhängungsachse zu bestimmen.

Nach Formel (3) ist zwischen Nutationsperiode und Drehzahl ein antiproportionaler Zusammenhang zu erwarten.

Wir haben folgende Messwerte aufgenommen:

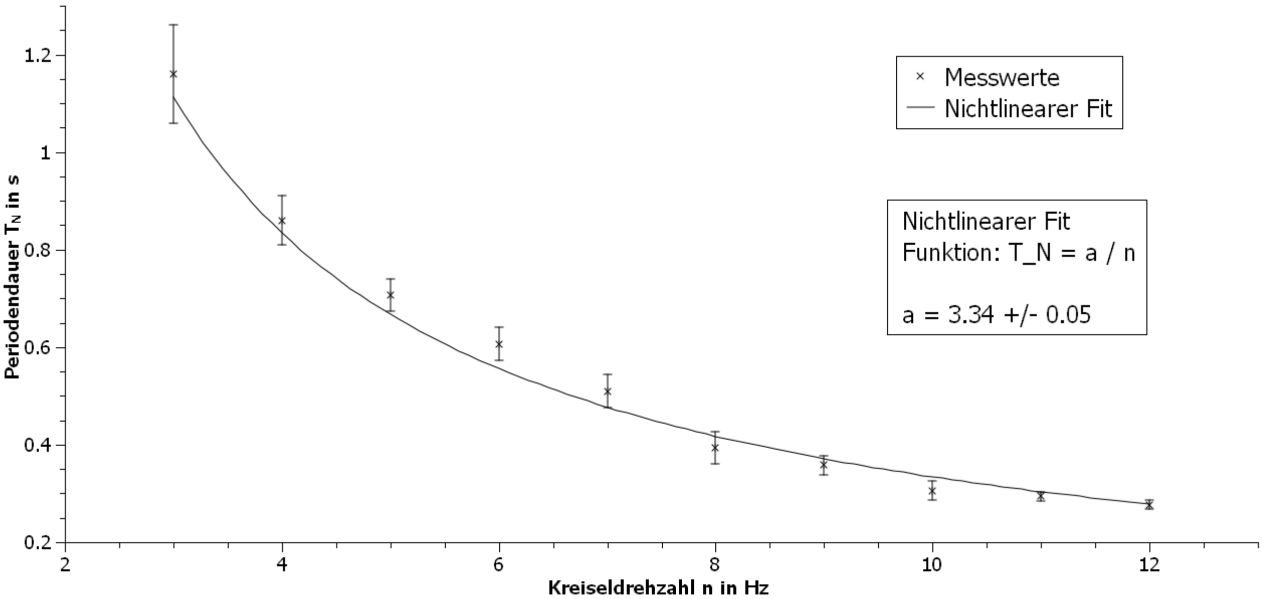


Diagramm 3: Aufgabe 3 - $T_N = f(1/n)$

qtiPlot lieferte für diese Regression den Proportionalitätsfaktor a mit:

$$a = (3.34 \pm 0.05) = \frac{J_s}{J_x} \quad \text{bzw.} \quad J_s = a \cdot J_x$$

Für die Berechnung von$J_s$ benutze ich den genaueren Wert für $J_x$ aus der ersten Messung.

Es ergibt sich folgender Fehler für $J_s$:

$$\Delta J_s = \sqrt{\left(\frac{\partial J_s}{\partial a} \cdot \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial J_s}{\partial J_x} \cdot \Delta J_x\right)^2} = \sqrt{\left(2.58 \cdot 10^{-3} \cdot 0.05\right)^2 + \left(3.34 \cdot 3 \cdot 10^{-5}\right)^2} \simeq 2 \cdot 10^{-4}$$

Und der Wert für $J_s$ berechnet sich zu:

$$J_s \simeq (8.6 \pm 0.2) \cdot 10^{-3}\, kg\, m^2$$

## 3.4. Berechnung des Trägheitsmomentes

Hierzu zerlege ich den Kreisel des Gyroskops gedanklich in 4 Teilhohlzylinder.
Die Fehler berechne ich jeweils über die Fehlerfortpflanzung mit einem Messfehler von 0.1mm bei allen Werten.

$$J_1 = \frac{1}{2}\pi\rho_M \cdot 20\text{mm} \cdot ((59.25\text{mm})^4 - (44.9\text{mm})^4) \simeq (2.2 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}\, kg\, m^2$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\pi\rho_M \cdot 6\text{mm} \cdot ((44.9\text{mm})^4 - (21.2\text{mm})^4) \simeq (3.1 \pm 0.6) \cdot 10^{-4}\, kg\, m^2$$

$$J_3 = \frac{1}{2}\pi\rho_M \cdot 13\text{mm} \cdot ((21.2\text{mm})^4 - (12.5\text{mm})^4) \simeq (3.0 \pm 0.7) \cdot 10^{-5}\, kg\, m^2$$

$$J_4 = \frac{1}{2}\pi\rho_M \cdot 20\text{mm} \cdot ((12.5\text{mm})^4 - (6\text{mm})^4) \simeq (6 \pm 2) \cdot 10^{-6}\, kg\, m^2$$

Anschließend werden die Teilträgheitsmomente nach Formel (4) aufaddiert:

$$J_x = \sum_{i=1}^{4} J_i \simeq (2.5 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}\, kg\, m^2$$

# 4. Diskussion

Da sich die Toleranzbereiche, sowohl der Messungen, als auch der des berechneten Wertes für $J_x$ überschneiden und sie auch relativ nahe beieinander liegen halte ich diesen Versuchsaufbau für sehr geeignet um das Trägheitsmoment eines Kreisels entlang seiner Figurenachse zu bestimmen.
Die Tatsache, dass alle gemessenen Werte innerhalb des Fehlers des berechneten Wertes liegt, spricht für den Versuch.
Einflüsse wie Reibung oder weitere äußere Einwirkungen scheinen nur gering aufgetreten zu sein und das Ergebnis nicht zu beeinflussen.

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes $J_s$ war anscheinend weniger präzise, da der ermittelte Wert nur sehr knapp im Toleranzbereich des Sollwertes liegt.
Nichtsdestotrotz zeigt jedoch auch diese Messung, die Möglichkeit der Bestimmung des Trägheitsmomentes.
Hierzu ist jedoch zu sagen, dass die Messung der Nutationsperiode bedeutend schwieriger war im Vergleich zur Präzessionsperiode, da sie sehr kurz ist und zusätzlich auch sehr schnell wieder abklingt. Es war aber dennoch möglich brauchbare Ergebnisse zu bekommen.

Überraschend ist, dass der relative Fehler bei der ersten und dritten Messung sehr niedrig bei 1% - 2% liegt, während er bei der zweiten Messung und bei der Berechnung eher hoch bei 12% - 15% liegt.