

VERSUCHSPROTOKOLL M10
GYROSKOP

JOHANN FÖRSTER 519519
VERSUCHSPARTNER MEIKEL SOBANSKI
MESSPLATZ 2

HUMBOLDT UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1) Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung	3
2.1) Experimentelle Bestimmung des Hauptträgheitsmoments J_x (Methode 1)	3-4
2.2) Experimentelle Bestimmung des Hauptträgheitsmoments J_x (Methode 2)	5-6
2.3) Experimentelle Bestimmung des Hauptträgheitsmoments J_s	6-7
2.4) Rechnerische Bestimmung des Hauptträgheitsmoments J_x	7-8
2.5) Vergleich der theoretischen und experimentellen Resultate.....	8
3) Fehleranalyse und kritische Selbsteinschätzung	8-9
4) Quellenangabe.....	9
Anhang: Messprotokoll.....	10

1) Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Ziel des Versuches war es, die drei Hauptträgheitsmomente eines Gyroskops, welches durch das Modell eines rotierenden starren Körpers beschrieben werden kann, zu bestimmen. Wenn das Gyroskop bei der Rotation um die x-Achse bzw. Figurenachse ein Trägheitsmoment J_x hat, so sind die anderen beiden Hauptträgheitsmomente J_s um die y-Achse und um die z-Achse (die senkrecht zur x-Achse stehen) gleich, da es sich bei verwendetem Gyroskop um ein symmetrisches Kreisel handelte. Diese Hauptträgheitsmomente wurden sowohl experimentell durch Messung der Präzessions- und Nutationsperiodendauer bei bestimmten Kreiseldrehzahlen als auch theoretisch durch Ausmessung der geometrischen Daten gemäß Quelle [1], Seite 51-53 bestimmt.

2.1) Experimentelle Bestimmung des Hauptträgheitsmoments J_x (Methode 1)

Bei einer festen Kreiseldrehzahl von $n = 12s^{-1}$ wurden auf der am Gyroskop vorgesehenen Stelle Massestücke im Bereich von $m=50g$ bis $500g$ aufgesteckt. Dadurch wirkte ein Drehmoment $M = |\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin\varphi$, wobei der Winkel φ zwischen \vec{r} und \vec{F} als näherungsweise 90° angenommen wurde. Die Kraft \vec{F} ist die Gewichtskraft der aufgesteckten Massenstücke, also $|\vec{F}| = mg$ (mit Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$). Der Abstand $|\vec{r}|$ der Präzessionsdrehachse zum Schwerpunkt der Massenstücke ergibt sich durch den Abstand l_1 der Präzessionsdrehachse zur Aufsteckschraube (aus der Skizze des Gyroskops am Messplatz) vermindert um die halbe Höhe der Massstücke $\frac{1}{2}l_2$ (Schwerpunkt der Massenstücke). Alle Längen wurden mittels Messschieber bestimmt, dessen Unsicherheit ein halbes Skalenteil $u_1 = 0,05mm$ und dem Teilungsfehler $u_2 = 0,05mm \pm 10^{-4} * L$ ([2], Seite 17) entspricht. Damit ergibt sich:

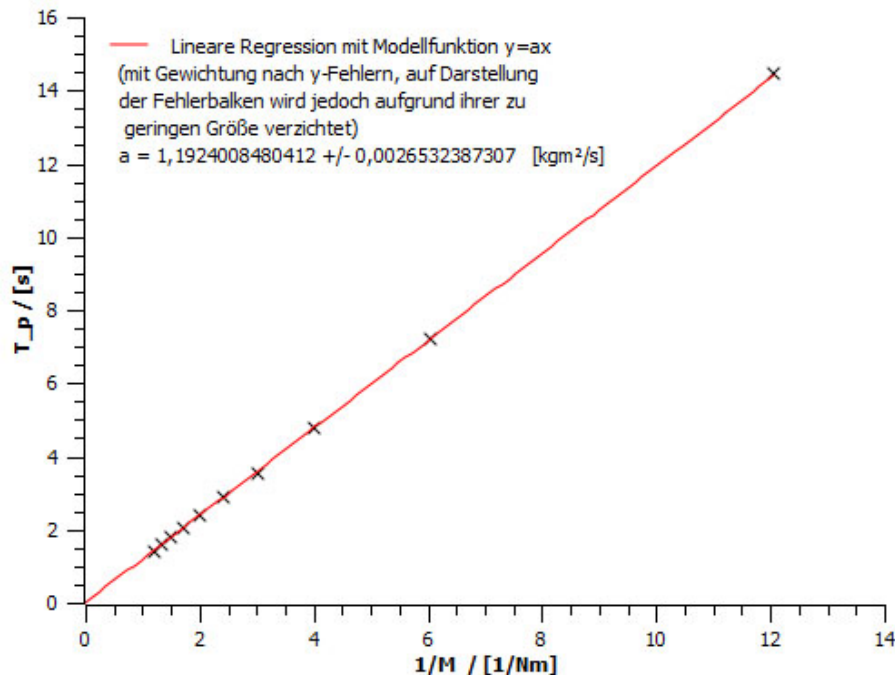
$$l_1 = 181,5mm, u(l_1) = 0,11815mm; l_2 = 25mm, u(l_2) = 0,1025mm$$

$$|\vec{r}| = l_1 - \frac{1}{2}l_2 = 169mm, u(|\vec{r}|) = \sqrt{\left(\frac{\partial|\vec{r}|}{\partial l_1} u(l_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial|\vec{r}|}{\partial l_2} u(l_2)\right)^2} = 0,129mm$$

$\Rightarrow |\vec{r}| = (169,0 \pm 0,1)mm$. Für die Unsicherheit des reziproken des Drehmoments ergibt sich damit $u\left(\frac{1}{M}\right) = \left|\frac{\partial\frac{1}{M}}{\partial|\vec{r}|} u(|\vec{r}|)\right| = \frac{u(|\vec{r}|)}{|\vec{r}|^2 mg}$, wobei m , g und φ als fehlerfrei angenommen werden. Aufgrund des wirkenden Drehmomentes führte das Gyroskop eine Präzessionsbewegung durch, dessen Periodendauer mit einer digitalen Handstoppuhr jeweils zweimal gemessen wurde. Die Unsicherheit der Zeitmessung $u(T)$ ergibt sich aus dem zufälligen Unsicherheit u_z , die als halbe Differenz beider Messwerte abgeschätzt wird und der systematischen Unsicherheit $u_s = 0,02s + 5 * 10^{-4} * T$, die sich aus der Eichfehlergrenze ([2], Seite 18) und der letzten darstellbaren Ziffer ergibt. Für die Unsicherheit der Zeitmessung folgt also $u(T) = \sqrt{(u_z)^2 + (u_s)^2}$. Auf der nächsten Seite befinden sich die Ergebnisse der Zeitmessungen für die Präzessionsperiodendauern.

n_p =Anzahl der gemessenen Perioden (bzw. Umläufe)

m/[g]	$\frac{1}{M}/[\frac{1}{Nm}]$	$u(\frac{1}{M})/[10^{-3}\frac{1}{Nm}]$	T/[s]	n_p	T_P /[s]	$u(T_P) = \frac{u(T)}{n_p}/[10^{-2}s]$
50	12,064	9,193	43,32;43,37	3	14,448	1,16
100	6,032	4,597	21,78;21,59	3	7,228	3,25
150	4,021	3,064	23,87;23,91	5	4,778	0,60
200	3,016	2,298	21,35;21,18	6	3,544	1,46
250	2,413	1,839	28,97;28,56	10	2,877	2,06
300	2,011	1,532	19,09;19,00	8	2,381	0,63
350	1,723	1,313	20,53;20,28	10	2,041	1,27
400	1,508	1,149	17,85;17,68	10	1,777	0,88
450	1,340	1,021	15,68;15,82	10	1,575	0,73
500	1,206	0,919	14,03;13,91	10	1,397	0,64



Präzessionsperiodendauer T_P in Abhängigkeit des reziproken Drehmoments $\frac{1}{M}$ mit QtiPlot

Zwischen der Präzessionsperiodendauer und dem reziproken Drehmoment besteht nach Gleichung (8), Quelle [1], Seite 51 der Zusammenhang: $T_P = \frac{4\pi^2 n J_{x1}}{M}$, wodurch für den Anstieg a folgt $a = 4\pi^2 J_{x1} n \Leftrightarrow J_{x1} = \frac{a}{4\pi^2 n} = 2,51699 * 10^{-3} kgm^2$. Die Unsicherheit der per Lichtschrankenmessung bestimmten Kreiseldrehzahl wird zu $u(n)=0,1s^{-1}$ abgeschätzt. Damit ergibt sich die Unsicherheit von J_{x1} nach der Fehlerfortpflanzung zu: $u(J_{x1}) = \sqrt{\left(\frac{\partial J_{x1}}{\partial a} u(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{x1}}{\partial n} u(n)\right)^2} = 2,171 * 10^{-5} kgm^2$

Ergebnis: $J_{x1} = (2,52 \pm 0,02) * 10^{-3} kgm^2$

2.2) Experimentelle Bestimmung des Hauptträgheitsmoments J_x (Methode 2)

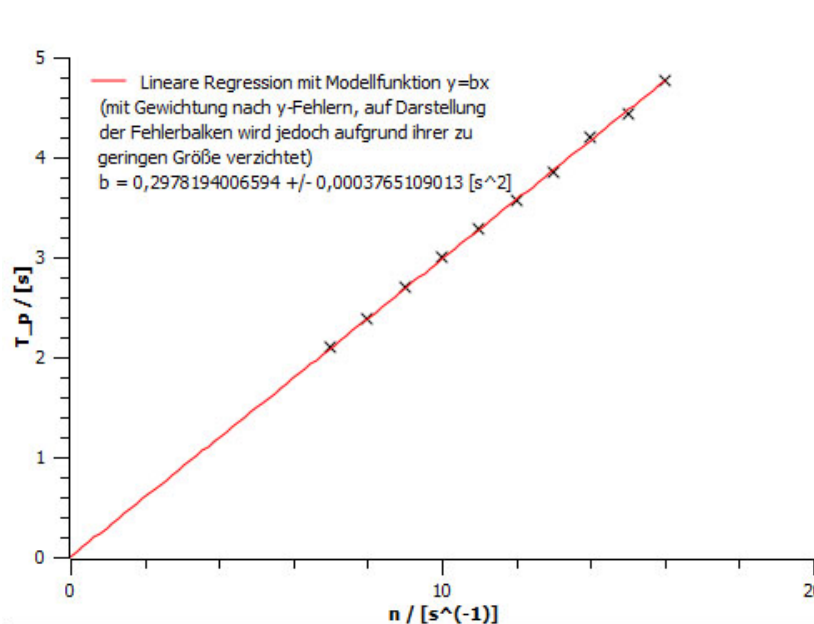
Bei der zweiten Methode wurde das Massenstück $m=200\text{g}$ aufgesteckt und konstant gelassen, während die Kreiseldrehzahlen im Bereich von $n=7\text{s}^{-1}$ bis 16s^{-1} verändert wurden. Für das Drehmoment gilt daher $M = |\vec{r}| |\vec{F}| = mg |\vec{r}|$

$$= 0,331578 \text{ Nm mit der Unsicherheit } u(M) = \frac{\partial M}{\partial |\vec{r}|} u(|\vec{r}|) = 2,53 * 10^{-4} \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow M = (0,3316 \pm 0,0003) \text{ Nm}$$

Die Unsicherheit der Kreiseldrehzahl $u(n)$ wurde bei den Messungen jeweils wieder zu $u(n)=0,1\text{s}^{-1}$ abgeschätzt und die Unsicherheit der Zeitmessungen ergibt sich wie in 2.1). Die Messung der Präzessionsperiodendauern lieferte folgende Ergebnisse (n_p =Anzahl der gemessenen Perioden (bzw. Umläufe)):

$n / [\text{s}^{-1}]$	$T / [\text{s}]$	n_p	$T_P / [\text{s}]$	$u(T_P) = \frac{u(T)}{n_p} / [10^{-2}\text{s}]$
16	38,09;38,16	8	4,766	0,53
15	35,56;35,37	8	4,433	1,22
14	29,32;29,50	7	4,201	1,33
13	26,91;27,09	7	3,857	1,33
12	21,35;21,41	6	3,563	0,62
11	19,78;19,68	6	3,288	0,91
10	18,00;17,91	6	2,993	0,83
9	16,32;16,13	6	2,704	1,62
8	12,06;11,75	5	2,381	3,13
7	10,56;10,41	5	2,097	1,56



Präzessionsperiodendauer T_P in Abhängigkeit der Kreiseldrehzahl n mit QtiPlot

Nach Gleichung (8), Quelle [1], Seite 51 gilt zwischen der Präzessionsperiodendauer und der Kreiseldrehzahl der Zusammenhang $T_P = \frac{4\pi^2 n J_{x2}}{M}$, wodurch für den Anstieg b der grafischen Darstellung folgt:
 $b = \frac{4\pi^2 J_{x2}}{M} \Leftrightarrow J_{x2} = \frac{bM}{4\pi^2} = 2,501 * 10^{-3} kgm^2$
 Die Unsicherheit ergibt sich nach der Fehlerfortpflanzung zu:
 $u(J_{x2}) = \sqrt{\left(\frac{\partial J_{x2}}{\partial M} u(M)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{x2}}{\partial b} u(b)\right)^2} = 3,69 * 10^{-6} kgm^2$

Ergebnis: $J_{x2} = (2,501 \pm 0,004) * 10^{-3} kgm^2$

2.3) Experimentelle Bestimmung des Hauptträgheitsmoments J_s

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes J_s wurde das präzessionsfreie Gyroskop ($M=0$) bei Kreiseldrehzahlen von $n=4s^{-1}$ bis $12s^{-1}$ durch einen leichten Stoß auf den Waagebalken aus seiner nutationsfreien Drehachse ausgelenkt und die Nutationsperiodendauer T_N gemessen, wobei sich die Unsicherheit der Zeitmessung wieder wie in 2.1) ergibt. Dabei wurden folgende Ergebnisse erzielt ($n_p =$ Anzahl der gemessenen Perioden (bzw. Umläufe), $u(\frac{1}{n}) = \frac{u(n)}{n^2}$):

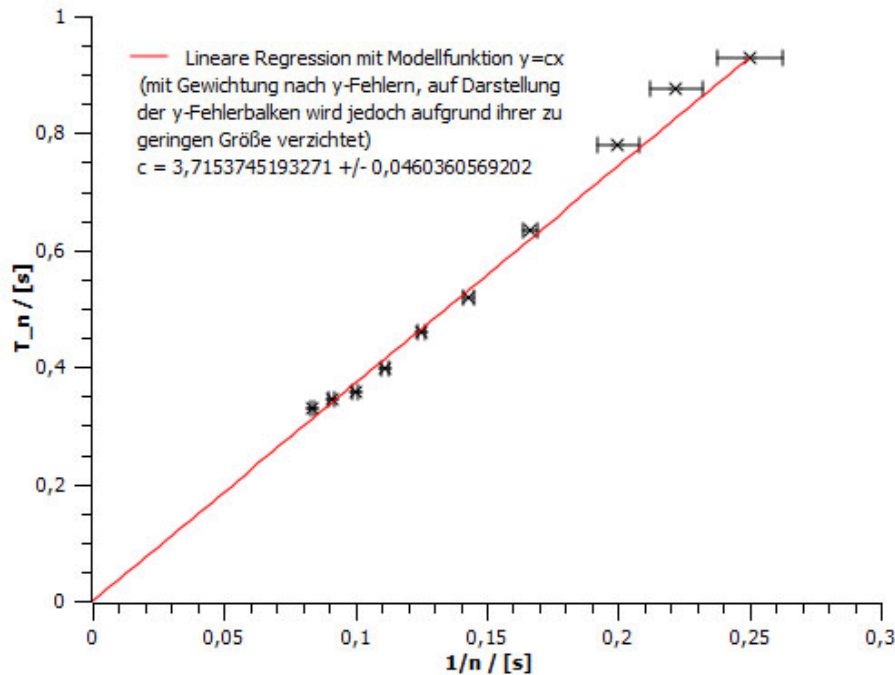
$\frac{1}{n} / [s]$	$u(\frac{1}{n}) / [10^{-2}s]$	T / [s]	n_p	$T_N/[s]$	$u(T_N) = \frac{u(T)}{n_p} / [10^{-2}s]$
0,250	1,250	1,85;1,87	2	0,930	1,13
0,222	0,988	1,75;1,75	2	0,875	1,01
0,200	0,800	2,32;2,35	3	0,778	0,84
0,167	0,278	2,56;2,50	4	0,633	0,90
0,143	0,204	4,18;4,13	8	0,519	0,40
0,125	0,156	3,66;3,68	8	0,459	0,28
0,111	0,123	3,16;3,18	8	0,396	0,28
0,100	0,100	2,87;2,82	8	0,356	0,40
0,091	0,083	2,72;2,78	8	0,344	0,45
0,083	0,069	2,63;2,63	8	0,329	0,25

Zwischen der Periodendauer T_N und dem reziproken der Kreiseldrehzahl besteht nach Gleichung (9), Quelle [1], Seite 51 der Zusammenhang: $T_N = \frac{J_s}{J_x n}$. Neben dem grafischen Zusammenhang $T_N = f(\frac{1}{n})$ wird also zusätzlich der experimentelle Wert der ersten beiden Methoden für J_x benötigt. Da sich die Ergebnisse innerhalb ihrer Messunsicherheiten überschneiden, wird das gewichtete Mittel für J_x gebildet. Nach [2], Seite 47 ist damit

$$(C:=1;2.1 \rightarrow J_{x1};2.2 \rightarrow J_{x2}): \bar{J}_x = \frac{\frac{J_{x1}}{u(J_{x1})^2} + \frac{J_{x2}}{u(J_{x2})^2}}{\frac{1}{u(J_{x1})^2} + \frac{1}{u(J_{x2})^2}} = 2,502 * 10^{-3} kgm^2$$

$$\text{mit } u(\bar{J}_x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{u(J_{x1})^2} + \frac{1}{u(J_{x2})^2}}}{\frac{1}{u(J_{x1})^2} + \frac{1}{u(J_{x2})^2}} = 3,6 * 10^{-6} kgm^2$$

$$\Rightarrow \bar{J}_x = (2,502 \pm 0,004) * 10^{-3} kgm^2$$



Nutationsperiodendauer T_N in Abhängigkeit der reziproken Kreiseldrehzahl $\frac{1}{n}$ mit QtiPlot

Aus $T_N = \frac{J_s}{J_x n}$ folgt: $c = \frac{J_s}{J_x} \Leftrightarrow J_s = c * J_x = 9,296 * 10^{-3} \text{kgm}^2$

mit $u(J_s) = \sqrt{\left(\frac{\partial J_s}{\partial J_x} u(J_x)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_s}{\partial c} u(c)\right)^2} = 1,16 * 10^{-4} \text{kgm}^2$

Ergebnis: $J_s = (9,3 \pm 0,1) * 10^{-3} \text{kgm}^2$

2.4) Rechnerische Bestimmung des Hauptträgheitsmoments

J_x

Zur rechnerischen Bestimmung des Hauptträgheitsmomentes J_x wird der Kreisel gedanklich in 4 Hohlzylinder zerteilt und die Einzelträgheitsmomente bezüglich der x-Achse aufsummiert. Zusammen mit der als fehlerfrei angenommenen Dichte von Messing $\rho = 8,4 * 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ([1], Seite 53) lässt sich das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders berechnen zu $J_i = \frac{1}{2} \rho \pi h (r_2^4 - r_1^4)$ ([1], Seite 52), wobei h die Höhe, r_1 der Innen- und r_2 der Außenradius des Zylinders ist. Die aus der am Versuchsplatz vorhandenen Skizze des Gyroskops hervorgehenden geometrischen Daten der Hohlzylinder sind [incl. Unsicherheit der Messung mittels Messschiebers $u(L) = 0,1 \text{mm} + 10^{-4} * L$, vgl. 2.1)]:

Zylindernr.	h/[mm]	u(h)/[mm]	r_1 /[mm]	$u(r_1)$ /[mm]	r_2 /[mm]	$u(r_2)$ /[mm]
1	19,7	0,10197	44,850	0,05449	59,55	0,05596
2	5,7	0,14281	6,000	0,05060	44,85	0,05449
3	7	0,14371	6,000	0,05060	21,25	0,05213
4	5,7	0,14281	6,000	0,05060	12,35	0,05124

Damit folgt für J_{x3} : $J_x = \sum_{i=1}^4 J_i = 2,54 * 10^{-3} kgm^2$

mit der Unsicherheit $u(J_{x3}) = \sqrt{\sum_{i=1}^4 u(J_i)}$

und $u(J_i) = \frac{1}{2} \rho \pi \sqrt{\left(\frac{\partial J_i}{\partial h} u(h)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_i}{\partial r_1} u(r_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial J_i}{\partial r_2} u(r_2)\right)^2}$

$\Rightarrow u(J_{x3}) = 1,757 * 10^{-5} kgm^2$

Ergebnis: $J_{x3} = (2,54 \pm 0,02) * 10^{-3} kgm^2$

2.5) Vergleich der theoretischen und experimentellen Resultate

Vergleich der ermittelten Trägheitsmomente J_x :

Entgegen den Erwartungen, dass theoretischer und experimenteller Wert ungefähr gleich sind, ist das theoretisch ermittelte Trägheitsmoment

$J_{x3} = (2,54 \pm 0,02) * 10^{-3} kgm^2$ etwas größer als das experimentell bestimmte

$J_{x1} = (2,52 \pm 0,02) * 10^{-3} kgm^2$ aus 2.1) und $J_{x2} = (2,501 \pm 0,004) * 10^{-3} kgm^2$

aus 2.2), allerdings überschneiden sich zumindest J_{x3} und J_{x1} innerhalb ihrer

Unsicherheiten. Wie bereits in 2.3) erwähnt überschneiden sich außerdem auch

die experimentellen Resultate J_{x1} und J_{x2} .

Vergleich der ermittelten Trägheitsmomente J_s :

Entsprechend den Erwartungen ist der Mittelwert des experimentell ermittelten

$J_s = (9,3 \pm 0,1) * 10^{-3} kgm^2$ etwas größer als der Mittelwert des theoretisch

ermittelten $J_{s,theoretisch} = (8,7 \pm 0,5) * 10^{-3} kgm^2$ ([1], Seite 51), was damit zu

begründen ist, dass beim theoretischen Wert das Trägheitsmoment des

Elektromotors und der Halterung sowie kleineren Teilen nicht berücksichtigt

wurde. Unabhängig davon überschneiden sich J_s und $J_{s,theoretisch}$ trotzdem

knapp innerhalb ihrer Messunsicherheiten.

3) Fehleranalyse und kritische Selbsteinschätzung

Die erzielten Resultate entsprechen im Großen und Ganzen den theoretischen

Erwartungen, auch wenn sie insbesondere bei der Bestimmung von J_x nicht

vollständig erfüllt wurden. Allerdings haben nicht berücksichtigte,

mathematisch nicht oder nur schwer erfassbare Messunsicherheiten das Ergebnis

beeinflusst. Bei den Zeitmessungen wurde die Reaktionszeit beim Betätigen der

Digitalstoppuhr vernachlässigt und auch die Unsicherheit der Kreiseldrehzahl

konnte nur grob abgeschätzt werden, da die Anzeige der Lichtschranke sich oft

änderte und insbesondere bei der Messung mit konstanter Kreiseldrehzahl die

Drehzahl häufig nachreguliert werden musste. Weiterhin wurden auch die

Erdbeschleunigung g , die Masse m der Massenstücke und bei den theoretischen

Werten auch die Dichte ρ von Messing als fehlerfrei angenommen. Außerdem

wurden Unsicherheiten aufgrund nicht perfekter Austarierung des Gyroskops

mittels Libelle und Tariergewicht vernachlässigt sowie Reibungseffekte, die dazu geführt haben, dass der Winkel φ zwischen \vec{r} und \vec{F} nicht exakt 90° betrug und sich während der Messungen ständig leicht änderte, was zu einem betragsmäßig etwas kleinerem Drehmoment $|\vec{M}|$ führt. Auch Fehler seitens der Experimentatoren wie verzählen bei den Präzessions- und vor allem bei den Nutationsperioden sind nicht auszuschließen.

4) Quellenangabe

[1] Skript “Phys. Grundpraktikum I: Mechanik und Thermodynamik“, 2005, online verfügbar unter <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/GPRI.html> (Stand: 01.06.2008)

[2] Skript “Phys. Grundpraktikum: Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik“, 2007, online verfügbar unter <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Einfuehrung/PDF-Datei/Einfuehrung.pdf> (Stand: 01.06.2008)