

## INHALTSVERZEICHNIS

1. Versuch und Aufgabenstellung	1
2. Auswertung Aufgabenstellung 1	1
3. Auswertung Aufgabenstellung 2	5
4. Auswertung Aufgabenstellung 3	5
5. Diskussion der Ergebnisse	6
6. Anhang	7

### 1. VERSUCH UND AUFGABENSTELLUNG

Bei dem vorliegenden Versuch sollen Gleichungen verifiziert werden, die teils durch die Annahme einer harmonischen Saitenschwingung hergeleitet wurden<sup>1</sup>. Zudem sollen zwei Materialeigenschaften, die Massendichte und transversale Ausbreitungsgeschwindigkeit, ermittelt werden. Versuchsaufbau und Durchführung sind bereits geschildert<sup>2</sup>, daher wird auf eine Beschreibung des Versuchs verzichtet.

### 2. AUSWERTUNG AUFGABENSTELLUNG 1

Es soll zunächst Gleichung (11) verifiziert werden.

$$f_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F_o}{\mu}} \quad (11)$$

$l$ ,  $F_o$  und  $\mu$  sind konstant. Untersucht wird die Abhängigkeit der Frequenz vom Schwingungszustand der Saite ( $n$ ). Dabei ergibt sich eine lineare Relation der Größen und mithilfe einer linearen Regression kann  $\frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F_o}{\mu}}$  bestimmt werden. Die entsprechenden Werte sind dem Messprotokoll zu entnehmen und wurden mit QtiPlot ausgewertet (siehe Abb 1). Hierbei wurden für die  $f_n$  eine jeweilige Messunsicherheit von  $\pm 2.2Hz$  angenommen. Zum einen der Digitfehler von  $\pm 0.1Hz$  und zum anderen die Unsicherheit beim Einstellen der Resonanzfrequenz von  $\pm 1Hz$ . Da die Erregerfrequenz halb so groß ist, wie die Resonanzfrequenz, ergibt sich für jedes  $f_n$  die Messunsicherheit von  $\pm 2 \cdot 1.1Hz$ . Prinzipiell sollte das Gerät neben dem Digitfehler einen Messfehler aufweisen, der allerdings auf dem Gehäuse nicht auffindbar war. Daher kann bei den folgenden Betrachtungen nur die Messunsicherheit von  $\pm 2.2Hz$  angenommen werden

---

<sup>1</sup>Siehe Physikalisches Grundpraktikum - Mechanik und Thermodynamik 2005 S.54-58

<sup>2</sup>Phys. Grundpraktikum - Mech. u. Therm. 2005 S.59f

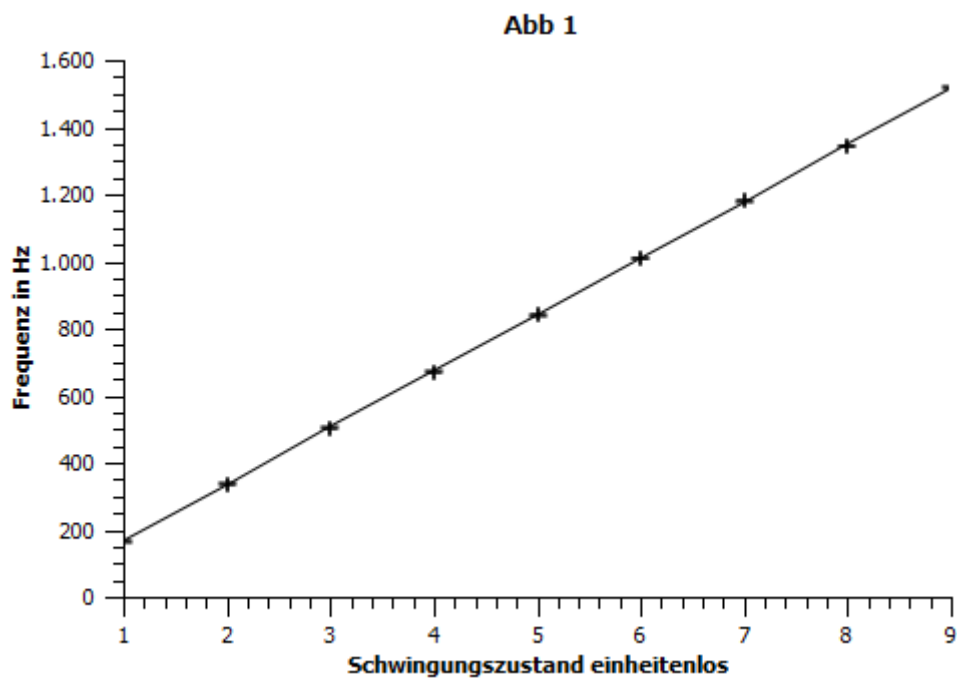


ABBILDUNG 2.1.

Die Gewichtung der Messunsicherheiten erfolgte instrumentell, wie es im EDV - Kurs durch Herr Bunk empfohlen wurde.

Es ergibt sich tatsächlich eine lineare Abhängigkeit der Größen  $f_n$  und  $n$ , womit sich als Anstieg ergibt:

$$\frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F_0}{\mu}} = 168.3 \text{ Hz} \pm 0.13 \text{ Hz} = a$$

Auffällig sind dabei die Ausreißer (5 von 9 Datenpunkten), die man auf dieser Abbildung nicht erkennen kann. Eine Diskussion der Ausreißer siehe im letzten Abschnitt.

Für die Ermittlung der Massendichte und der transversalen Ausbreitungsgeschwindigkeit wird noch die Zugkraft benötigt. Diese berechnet sich über die Gleichheit der Drehmomente, die gegenüber dem Punkt P (Drehpunkt des Lastarms) auftreten. Somit muss gelten:

$$l_s \cdot F + l_s \cdot 0.52 \text{ N} = l_3 \cdot Mg + l_3 \cdot \tilde{F} \quad \Leftrightarrow F = \frac{l_3}{l_s} Mg \quad \Rightarrow F_0 = F + 0.52 \text{ N} = \frac{l_3}{l_s} Mg + 0.52 \text{ N}$$

$l_s$  bezeichnet die Länge des Hebels der Saite bezüglich P und  $l_3$  die Länge des Hebels des Gewichts bezüglich P. Es ist außerdem zu beachten, dass sich die Drehmomente, die durch das Gewicht des Lastarms zustande kommen, in der Gleichung verkürzen. Somit ergibt sich für  $F_0$ :

$$F_0 = 22.027 \text{ N} \pm 0.003 \text{ N}$$

Die Unsicherheit von  $F_0$  ergibt sich aus den systematischen Fehlern der gemessenen Längen. Da mit einem Lineal gemessen wurde, wird von einem jeweiligen systematischen Fehler von  $\pm 2 \text{ mm}$  ausgegangen. Dieser ist höher als bei sonstigen Messungen, beruht aber darauf, dass die Lage von P und die Lage der Kerbe erfasst werden mussten. Zudem spielt auch ein Parallaxenfehler rein, da beide Punkte mit dem Auge gleichzeitig erfasst werden mussten und das Lineal teils in der Luft hing. Die Gravitationsbeschleunigung wird mit  $9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  als fehlerfrei angenommen. Genauso wird mit der Masse M verfahren. Somit ergibt sich für den Fehler von  $F_0$ :

$$e_{F_o} = \sqrt{\frac{M^2 g^2}{l^2} e_{l_3}^2 + \frac{l^2 M^2 g^2}{l^4} e_{l_s}^2} \approx 2.7 \cdot 10^{-3} N \text{ (unkorrelierte Größen)}$$

Jetzt kann die Massendichte berechnet werden.

$$\mu = \frac{1}{4l^2} \frac{F_o}{a^2} \approx 0.538 \frac{g}{m} \pm 0.004 \frac{g}{m}$$

Die Unsicherheit ergibt sich, da es sich um unkorrelierte Größen handelt, wie folgt:

$$e_\mu = \sqrt{\left(\frac{1}{2l^3} \frac{F_o}{a^2}\right)^2 e_l^2 + \left(\frac{1}{4l^2} \frac{1}{a^2}\right)^2 e_{F_o}^2 + \left(\frac{1}{2l^2} \frac{F_o}{a^3}\right)^2 e_a^2} \approx 3.3 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{m} = 3.3 \cdot 10^{-3} \frac{g}{m}^3$$

Hierbei ist  $e_l = \sqrt{0.000002m^2} \approx 0.0014m$ . Für die Bestimmung von  $e_l$  wurde berücksichtigt, dass  $l$  die Differenz zweier Messwerte ist, die jeweils einen systematischen Fehler von  $\pm 1mm$  besitzen  $\Rightarrow e_l = \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$ .

Nun fällt auf, dass  $\mu$  nicht mit der Herstellerangabe übereinstimmt, da der angegebene Wert von  $\mu_H = 0.78 \frac{g}{m}$  nicht innerhalb der Unsicherheit von  $\mu$  liegt.

Als nächstes soll die transversale Ausbreitungsgeschwindigkeit berechnet werden. Dazu ist folgende Gleichung gegeben:

$$c = \sqrt{\frac{F_o}{\mu}} \quad (6) \rightarrow c \approx 202 \frac{m}{s} \pm 0.5 \frac{m}{s}$$

Da es sich um unkorrelierte Größen handelt, berechnet sich die Unsicherheit von  $c$  mit:

$$e_c = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{1}{F_o \mu} e_{F_o}^2 + \frac{1}{4} \frac{F_o}{\mu^3} e_\mu^2} \approx 0.5 \frac{m}{s}$$

Bei der Versuchsdurchführung wurde ebenfalls die Lage der Knotenpunkte gemessen<sup>4</sup>. Nun kann also  $\lambda_n = \frac{2l}{n}$  (13) verifiziert werden.

Die Lage der Knotenpunkte ist nach Gleichung (13) theoretisch fest vorgegeben und die Abstände sollten äquidistant sein. Ein erster Blick auf die Messergebnisse legt die Vermutung nahe, dass es stimmen könnte. Da die Abstände zwischen den Knotenpunkten für  $n = 1$  bis  $n = 4$  äquidistant sind. Nun kann man die Messung dieser Abstände als die ständige Wiederholung eines Messvorgangs an einer fest vorgegebenen Messgröße sehen, die man nicht kennt und bei deren Messung zufällige Fehler auftreten. Es ist allerdings erst für  $m \geq 3$  möglich, eine Aussage über den zufälligen Fehler zu machen. Daher fallen aus dieser Betrachtung zunächst alle Messungen bis  $n = 2$  raus. Anzumerken ist noch, dass Werte die sich zu weit links befanden, aufgrund des Einflusses der Erregerspule nicht gemessen werden konnten.

Der zufällige Fehler berechnet sich wie folgt:

$$e_z = \pm t \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\lambda_i - \bar{\lambda})^2}{m \cdot (m-1)}} \cdot 5$$

Dabei ist  $\bar{\lambda}$  das arithmetische Mittel der Messwerte und  $t$  der Student - Faktor, der für  $m=5$  1.15 und für  $m=6$  1.11 beträgt.

Die systematischen Fehler ergeben sich durch die Differenzmessung zwischen zwei Knotenpunkten. Dabei beträgt der Fehler  $e_s = \sqrt{e_{l_1}^2 + e_{l_2}^2} = \sqrt{0.0014^2 + 0.0014^2} \approx 0.002m$ .

Durch pythagoreische Addition der Fehler ergibt sich die Messunsicherheit von  $\lambda$ :

$$e_\lambda = \sqrt{e_s^2 + e_z^2}$$

<sup>3</sup>Die gesamte hier veranschaulichte Fehlerrechnung wurde in einem Zug mithilfe von Mathematica, mit den hier angegebenen Formeln durchgerechnet, weshalb nicht mit gerundeten Werten weitergerechnet wurde, wie es vielleicht den Anschein haben könnte.

<sup>4</sup>Werte siehe Versuchdaten im Anhang

<sup>5</sup>Physikalisches Grundpraktikum - Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik 2007 S. 29f

Jetzt sollen die bisher außer Acht gelassenen Messwerte mit eingebracht werden. Wie sich bei der Versuchsdurchführung herausstellte, waren die Messungen für die Schwingungszustände bis  $n=6$  besonders einfach durchzuführen. Es war keine Variation des Schiebers der Detektorspule möglich, die über einem Millimeter lag. Daher kann man annehmen, dass der zufällige Fehler eine untergeordnete Rolle gegenüber dem systematischen hat. Tatsächlich lassen sich keine Abweichungen bis  $n=6$  feststellen.

Hieraus ergibt sich folgende Tabelle mit den Wellenlängen und ihren Messunsicherheiten.

Wellenlänge in m	Messunsicherheit in m
1.2	0.004
0.6	0.004
0.4	0.004
0.3	0.004
0.24	0.004
0.2	0.004
0.172	0.0042
0.15	0.0042
0.134	0.004

**Abb 2.2**

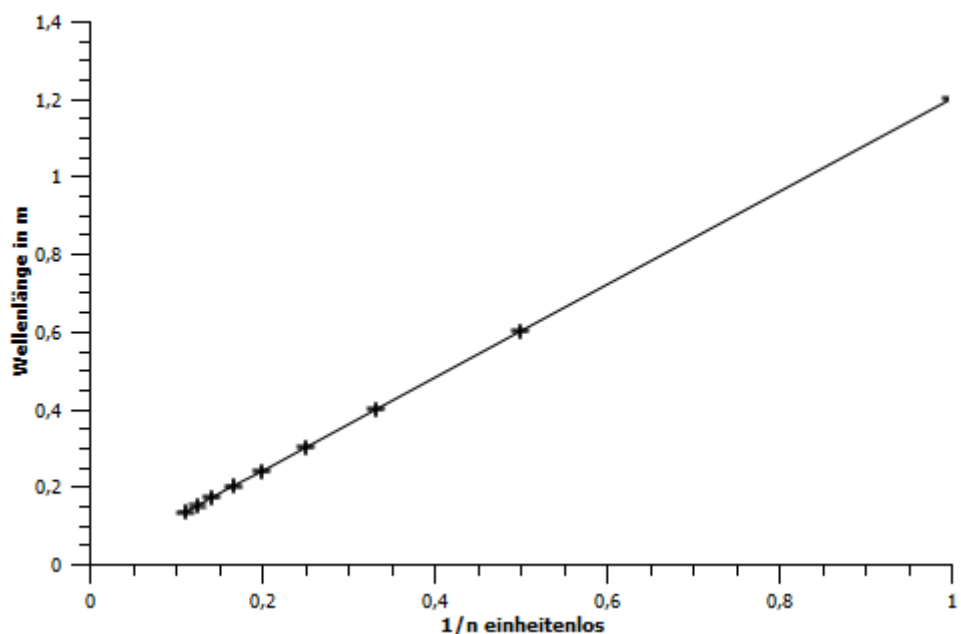


ABBILDUNG 2.2.

Der linearen Regression mit QtiPlot lässt sich der Anstieg  $d \approx 1.2m \pm 0.003m$  entnehmen, woraus  $l \approx 0.6m \pm 0.002m$  folgt, was mit dem für 1 gemessenen Wert übereinstimmt.

Es liegen keine Ausreißer vor und die Analyse der Daten hat den erwarteten Wert für 1 reproduziert. Gleichung (13) kann innerhalb der angenommenen Messunsicherheiten als verifiziert angesehen werden.

## 3. AUSWERTUNG AUFGABENSTELLUNG 2

Es wurde eine Messreihe durchgeführt, bei der nur die Länge der Saite variiert wurde und die Frequenzen der Grundschnungen gemessen wurden. Diese Daten werden nun ausgewertet um damit  $f_1 = \frac{1}{l} \frac{c}{2}$  (aus 17 abgeleitet) zu verifizieren. Durch eine lineare Regression lässt sich hierbei auf die transversale Ausbreitungsgeschwindigkeit schließen, die mit der in Abschnitt 2 berechneten übereinstimmen sollte. Da hierbei eine völlig andere Größe variiert wird, würde eine Übereinstimmung die Vermutung bekräftigen, dass  $\mu$  vom Hersteller falsch angegeben wurde. Denn  $F_o$  bleibt weiterhin konstant, weswegen ein anderes  $c$  Rückschlüsse auf einen völlig anderen Wert von  $\mu$  zur Folge hätten.

Die entsprechenden Messwerte sind wieder dem Anhang zu entnehmen.

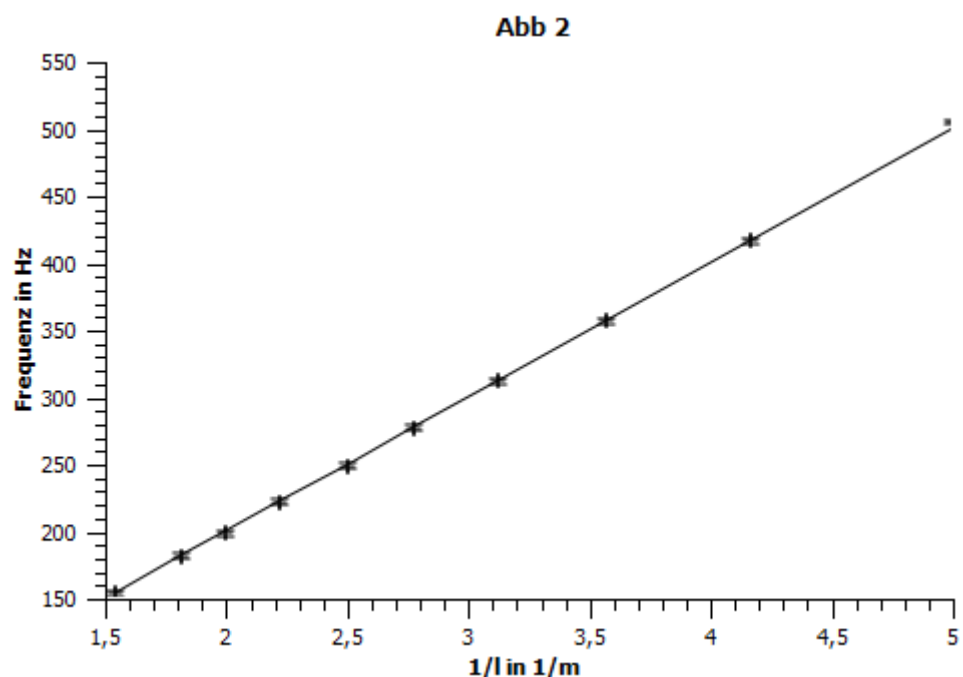


ABBILDUNG 3.1.

Der linearen Regression zufolge, die mit QtiPlot durchgeführt wurde, ist  $\frac{c}{2} = 100.2 \frac{m}{s} \pm 0.23 \frac{m}{s} \Leftrightarrow c \approx 200.4 \frac{m}{s} \pm 0.5 m$ .

Es wurde wieder wie in Abschnitt 2 angenommen, dass die Messgröße  $f$  mit einer Messunsicherheit von  $\pm 2.2 Hz$  behaftet ist. Es fällt allerdings auf, dass der letzte Wert ein Ausreißer ist, dessen unteres Fehlerbalkenende sich 2Hz über dem Grafen befindet.

Der Wert der ermittelten Ausbreitungsgeschwindigkeit zeigt keine Übereinstimmung mit dem in Abschnitt 2 zuvor berechneten im Rahmen der angenommenen Messunsicherheiten.

## 4. AUSWERTUNG AUFGABENSTELLUNG 3

In einer weiteren Messreihe wurde die Zugkraft  $F_o$  variiert und die Frequenz der Grundschnung gemessen. Betrachtet werden soll die Gleichung:

$$f_1 = \frac{1}{2l\sqrt{\mu}} \sqrt{F_o} \quad (\text{abgeleitet aus Gleichung 11})$$

Wie in Abschnitt 2 müssen die Zugkräfte ermittelt werden. Die Betrachtungen sind die gleichen. Somit ergibt sich  $F_o$  als:

$$F_{io} = \frac{l_i}{l_s} Mg + 0.52N$$

$l_i$  bezeichnet die Abstände der  $i$ -ten Kerbe zum Punkt P.

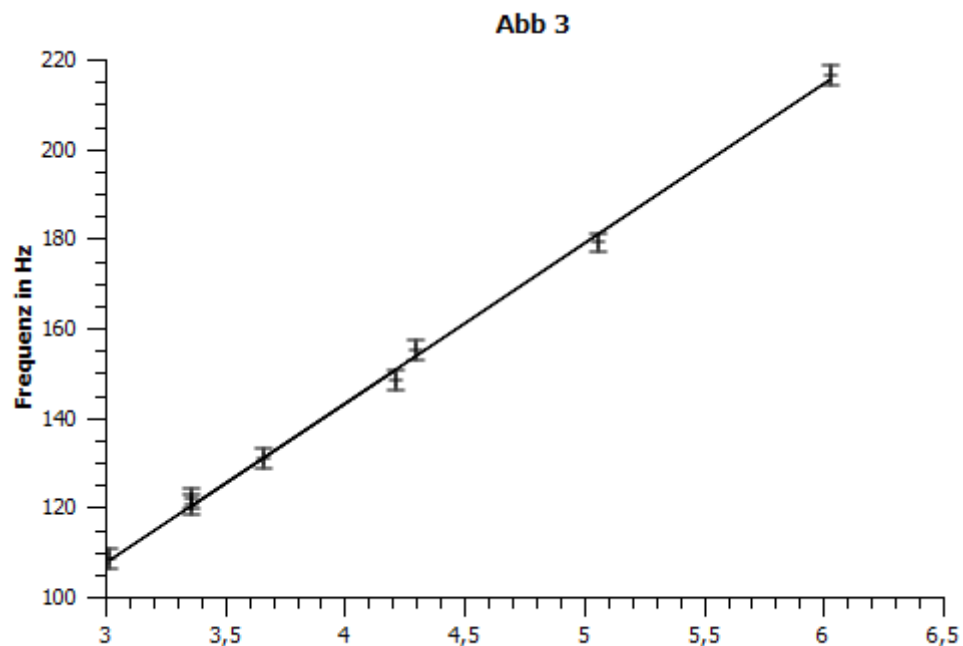


ABBILDUNG 4.1.

Der linearen Regression, die mit QtiPlot durchgeführt wurde, ist zu entnehmen, dass:

$$b = \frac{1}{2l\sqrt{\mu}} = 35.7 \frac{1}{\sqrt{kgm}} \pm 0.18 \frac{1}{\sqrt{kgm}}$$

Daraus folgt die Massendichte mit:

$$\mu = \frac{1}{4l^2 b^2} = 0.545 \frac{g}{m} \pm 6 \cdot 10^{-3} \frac{g}{m}$$

Dabei erfolgte die Fehlerrechnung nach der Gleichung (unkorrelierte Größen):

$$e_{\mu} = \sqrt{\left(\frac{1}{2l^3 b^2}\right)^2 e_l^2 + \left(\frac{1}{2l^2 b^3}\right)^2 e_b^2} \approx 6 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{m} = 6 \cdot 10^{-3} \frac{g}{m}$$

Der Vergleich mit dem in Abschnitt 2 berechneten Wert für die Massendichte fällt positiv aus. Die Fehlerbalken überschneiden sich, weshalb die Ergebnisse im Rahmen der angesetzten Messunsicherheiten miteinander vereinbar sind. Damit wird wiederum der Verdacht bekräftigt, dass die Herstellerangabe falsch ist.

## 5. DISKUSSION DER ERGEBNISSE

Bei der Diskussion der Ergebnisse soll zunächst versucht werden, die Ausreißer in Abschnitt 2 Abb 1 zu erklären. Es liegen 5 Datenpunkte vor, deren Fehlerbalken nicht den Grafen schneiden. Dem gegenüber stehen nur 4 verträgliche Datenpunkte. Weiterhin ist anzumerken, dass bei einem Fit mit der Funktion  $g(x) = ax + b$  der zusätzliche Summand nicht verschwindet. Nimmt man also einen Messfehler von  $\pm 2.2Hz$  an, so liefert QtiPlot folgende Werte:

$$a = 168.7Hz \pm 0.3Hz \quad b = -2.6Hz \pm 1.6Hz$$

Es gibt nun grundsätzlich 2 Möglichkeiten. Entweder sind sämtliche Messwerte systematisch um ca. -2.6Hz verschoben, was den Anstieg, also den eigentlich interessanten Wert nicht beeinflusst oder es treten zusätzliche Fehler auf, die bisher nicht berücksichtigt wurden. Gegen ersteres spricht, dass auch für diesen Plot Ausreißer vorliegen, wobei sich natürlich beide Effekte überlagern könnten. Für die zweite Möglichkeit spricht, dass für elektrische Geräte meistens ein größerer Fehler anzunehmen ist, als nur der Ablesefehler, bzw. der Fehler, der beim Einstellen zustande kommt. Dabei kann es sich auch um relative Fehler handeln. Nimmt man z.B. an, dass das Messgerät tatsächlich so genau misst, dass dieser Fehler gegenüber der letzten Ziffer zu vernachlässigen ist, so würden für die hier gemessenen Werte Genauigkeiten in Größenordnungen bis  $10^{-4}$  erreicht werden können.

Nach ein wenig probieren mit einem zusätzlichen relativen systematischen Fehler, stellte sich heraus, dass  $e_r = 3 \cdot 10^{-3} \cdot f_n$  die beste Wahl ist. Hier ist  $a = 168.7Hz \pm 0.6Hz$  und  $b = -2.34Hz \pm 2.45Hz$ . Ohne eine zusätzliche Konstante ist  $a = 168.2Hz \pm 0.33Hz$ . Somit wäre der Fehler von b groß genug, um gleich null zu sein (was ja der Fall sein muss), die Werte für a sind auch miteinander verträglich und es liegen keine Ausreißer mehr vor.

Man könnte auch den Fehler für alle  $f_n$  um 2 Hz erhöhen. Die Ergebnisse wären sogar präziser. Nun ist das allerdings spekulativ.

Fest steht, dass ich diese Fehler nicht vernünftig begründen könnte, um sie dazuzurechnen. Bereits bei der Messunsicherheit für  $f_n$  von  $\pm 2.2Hz$  habe ich gefühlsmäßig recht groß abgeschätzt. Alles andere ist meiner Meinung nach nur mit systematischen Fehlern auf Seiten des Generators zu erklären, dessen technische Details ich leider nicht kenne.

Man könnte über einen Fehler aufgrund der Dämpfung nachdenken. Tatsächlich berechnen sich die Resonanzfrequenzen bei erzwungenen Schwingungen mit  $\sqrt{\omega_0^2 - 2 \cdot \beta^2}$ <sup>7</sup> ( $\omega_0$  ist Resonanzfrequenz ohne Dämpfung), weshalb kleinere Resonanzfrequenzen eine größere relative Verschiebung nach unten erfahren würden als große, was die lineare Regression sicherlich erschweren würde. Nun spricht aber dagegen, dass die Resonanzen sehr ausgeprägt waren, wenn der richtige Wert erstmal getroffen wurde (öfters konnten wir diese Stelle nicht genau ausfindig machen). Daher wird dieser zusätzliche systematische Fehler gegenüber den Messunsicherheiten beim Einstellen der Resonanzfrequenz zu vernachlässigen sein.

Ein Ziel dieses Versuchs bestand darin, die transversale Ausbreitungsgeschwindigkeit zu bestimmen und durch Variation verschiedener Größen zu bestätigen. Nun wurden allerdings im Rahmen der von mir angesetzten Messunsicherheiten keine miteinander zu vereinbarenden Ergebnisse in Abschnitt 2 und 3 erzielt. Die Fehlerbalken sind auch zu weit voneinander entfernt, als das man an einen Zufall glauben kann. Also ist entweder ein Fehler bei der Rechnung aufgetreten oder die Unsicherheiten wurden insgesamt zu gering angesetzt, bzw. es wurden Fehlerquellen übersehen. Beide Größen sind empfindlich von dem Ergebnis der linearen Regression abhängig:  $c = 2la$  (Abschnitt 2) und  $c = 2 \cdot \text{Anstieg}$  (Abschnitt 3). Daher kann man davon ausgehen, dass die Unstimmigkeiten an dieser Stelle aufgetreten sind. Quantifizieren kann ich diese allerdings nicht.

Es lässt sich als Schluss ziehen, dass die Beobachtung der auftretenden Fehler während des Versuchs sorgfältiger erfolgen muss. Tatsächlich variierte z.B. die Schwierigkeit die Frequenzen einzustellen mit dem Schwingungszustand/der Höhe der gemessenen Werte. Aber das wurde nicht hinreichend genau dokumentiert.

## 6. ANHANG

<sup>6</sup>letzte Ziffer 0.1Hz und größter Wert 1500Hz  $\rightarrow \frac{1}{15000} \approx 7 \cdot 10^{-4}$

<sup>7</sup>Nolting - Theor. Phys. 1 8. Auflage S.165