

**Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I
der Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik – Physikalisches Grundpraktikum**

Versuchsprotokoll

Saitenschwingung (M12)

durchgeführt am **29.04.2009**
mit Versuchspartner **Andreas Koher** (529737)

Protokoll von **Sebastian Milster** (529125)

Gliederung:

- I. Einleitung
Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von
- II. Mode
- III. Saitenlänge
- IV. Zugspannung
- V. Auswertung

I. Einleitung

In diesem Versuch sollen die die für eine Saitenschwingung (stehende Welle) spezifische Größen bzw. Eigenschaften (Knotenpunkte, Phasengeschwindigkeit, lineare Massendichte) ermittelt und mit den theoretischen Werten verglichen werden. Hierzu sollen drei verschiedene Messmethoden dienen: Bestimmung Resonanzfrequenzen für verschiedene Schwingungsmoden (II), verschiedene Saitenlängen (III) und verschiedene Zugspannungen (IV). Die physikalischen Grundlagen, Versuchsaufbau und die Durchführung befinden sich im Skript "Mechanik und Thermodynamik" ab Seite 54.

Bei der Durchführung wurden folgende Messinstrumente benutzt:

Wechselstrom-generator und Oszilloskop	Zur Bestimmung der Resonanzfrequenz wurde das stabile Maximum der der Detektorfrequenz bei doppelter Erregerfrequenz gesucht. Anzeigegenauigkeit am Generator: - für $f < 100\text{Hz}$: $u_f = 0,01\text{ Hz}$ - für $f > 100\text{Hz}$: $u_f = 0,1\text{ Hz}$ Aufgrund der Tatsache, dass die korrekte Einstellung der Erregerfrequenz auf subjektive Beobachtung beruht, werde ich in der Rechnung die Unsicherheiten verdoppeln.
Lineal entlang der Saite	Hier war eine relativ genaue Einstellung und Ablesung am Versuchsaufbau möglich: $u = 0,001\text{ m}$
Massenstücke 50g; 2x 100g; 200g; 500g	Pro Massenstück geht man von einer Ungenauigkeit von $u_m = 1\text{ g}$. Die Anzahl der Massenstücken wurde nicht protokolliert, weshalb ich von ein Größtabweichung von $u_m = 2\text{ g}$ ausgehe, da die Abweichung sowohl nach oben wie auch nach unten möglich ist und statistisch betrachtet eine vollständig einseitige Abweichung unwahrscheinlich ist.

Formeln aus dem Skript:

Frequenz der Longitudinalschwingung:

$$f_n^{trans} = \frac{n}{2 \cdot l} \sqrt{\frac{F_o}{\mu}} \quad (11)$$

Wellenlänge der stehenden Welle:

$$\lambda_n = \frac{2 \cdot l}{n} \quad (13)$$

n – Schwingungsmode ; l – Saitenlänge ; λ – Wellenlänge ; F_o – Zugspannung ; μ – lin. Massendichte

II. Resonanz in Abhängigkeit von der Mode

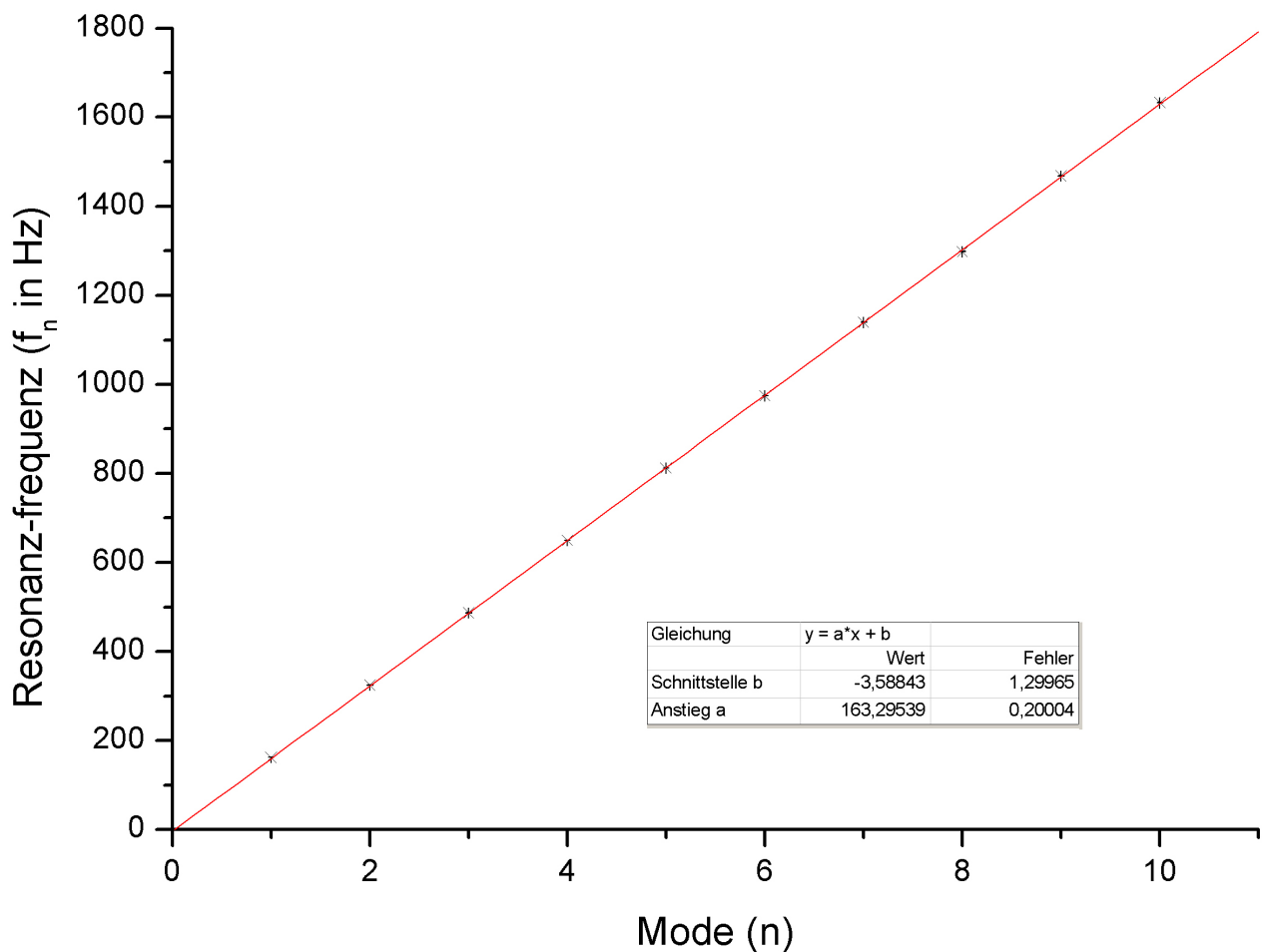
Zunächst soll die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Schwingungsmode erfasst werden. Gewicht $m=1\text{kg}$; 3. Kerbe; Saitenlänge $l=0,6\text{m}$

Messergebnisse und daraus berechnete Größen:

Mode	Erregerfrequenz	Fehler	Resonanzfrequenz	Fehler
n	f_E in Hz	u_{f_E} in Hz	f_n in Hz	u_{f_n} in Hz
1	81,13	0,02	162,26	0,04
2	162,2	0,2	324,4	0,4
3	243,5	0,2	487	0,4
4	324,8	0,2	649,6	0,4
5	406,1	0,2	812,2	0,4
6	487,2	0,2	974,4	0,4
7	569,7	0,2	1139,4	0,4
8	649	0,2	1298	0,4
9	734	0,2	1468	0,4
10	816,2	0,2	1632,4	0,4

Da die Resonanzfrequenz doppelt so groß ist wie die Erregerfrequenz, wurden die Messwerte und Fehler wie in der Tabelle ersichtlich verdoppelt.

Graphische Darstellung $f(n)$:



Es liegt eindeutig eine lineare Abhängigkeit vor. Um zu beweisen, dass es sich bei den Frequenzen wirklich um diejenigen handelt, bei denen es zu der entsprechenden Mode kommt, wurden die Positionen einiger Knoten abgelesen.

Messergebnisse und daraus berechnete Größen:

Mode	Resonanzfrequenz	Distanz zum Einspannpunkt	durchschnittlicher Abstand zwischen Knoten	Knotenanzahl	theoretischer Abstand
n	f_n in Hz	in cm	in m		in m
1	162,26	0;60	0,6	2	0,6
2	324,4	0;30;60	0,3	3	0,3
3	487	..;20;40;..	0,2	4	0,2
4	649,6	..;14,9;30,1;45,1;..	0,1503	5	0,15
5	812,2	..;12;24;36;..	0,12	6	0,12
6	974,4	..;10;20;30,1;40;..	0,1	7	0,1
7	1139,4	..;8,6;17,4;25,8;..	0,086	8	0,08571
8	1298	..;7,6;15;30;..	0,075	9	0,075
9	1468	..;6,7;13,3;20;..	0,0667	10	0,06667
10	1632,4	..;6;12;18;..	0,06	11	0,06

Der durchschnittliche Abstand zwischen den Knoten wurde mithilfe der Teilabstände der ermittelten Knoten berechnet. Bei $n=8$ ist zwischen 15 und 30 cm der Knoten bei ca. 22,5 cm nicht ermittelt worden. Aus den Abständen konnte die Anzahl der Knoten ermittelt werden (inklusive die Einspannpunkte) und mit ein geringen Messungenauigkeit stimmen sie mit den theoretischen Abständen überein und die Gleichung $\lambda_n = \frac{2 \cdot l}{n}$ trifft zu.

Da es sich um die korrekten Frequenzen handeln muss, können wir nun mithilfe der Zugspannung F_o die lineare Massendichte μ und die Phasengeschwindigkeit c^{trans} ermitteln. Aus der linearen Regression erhalten wir die Grundfrequenz $f_1^{trans} = a = 163,29539 \text{ Hz}$.

Wie im Skript beschrieben, soll die Nummer der verwendeten Kerbe am Zughebel als Multiplikator für die angreifende Gewichtskraft dienen. In dieser Messreihe wurde an der 3. Kerbe eine Masse von $m=1\text{kg}$ angehängen. Der Hebel allein übt in waagerechter Stellung eine Zugspannung von $F_{Hebel}=0,52 \text{ N}$ aus.

$$\begin{aligned}
 F_o &= F_{Hebel} + F_m \\
 F_m &= 3 \cdot mg \quad (3. \text{ Kerbe}) \\
 F_m &= 3 \cdot 1\text{kg} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} \\
 \bar{F}_m &= 29,43 \text{ N} \\
 u_{F_o} &= u_{F_m} = \left(\frac{\partial F_m}{\partial m} \cdot u_m \right) \\
 u_{F_o} &= 3 \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 0,002 \text{ kg} \\
 u_{F_o} &= 0,005886 \text{ N} \\
 \Rightarrow F_o &= ((0,52 + 29,43) \pm 0,01) \text{ N} \\
 F_o &= (29,95 \pm 0,01) \text{ N}
 \end{aligned}$$

Lineare Massendichte:

Aus (11) mit $n=1$ und $f^{trans}=a$ ergibt sich

$$\mu = \frac{F_o}{(2 \cdot l \cdot a)^2};$$

$$\bar{\mu} = 7,800 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m} = 0,7800 \text{ g/m}$$

$$u_\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial F_o} \cdot u_{F_o}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial l} \cdot u_l\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial a} \cdot u_a\right)^2}$$

$$u_\mu = \sqrt{\left(\frac{1}{(2 \cdot l \cdot a)^2} \cdot u_{F_o}\right)^2 + \left(\frac{-4 \cdot F_o \cdot a}{(2 \cdot l \cdot a)^3} \cdot u_l\right)^2 + \left(\frac{-4 \cdot F_o \cdot l}{(2 \cdot l \cdot a)^3} \cdot u_a\right)^2}$$

$$u_\mu = 3,2372 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}$$

$$\Rightarrow \mu = (0,780 \pm 0,003) \text{ g/m}$$

Der ermittelte Wert für die lineare Massendichte stimmt sehr genau mit den Herstellerangaben ($\mu=0,78 \text{ g/m}$) überein.

Phasengeschwindigkeit:

$$c^{trans} = \sqrt{\frac{F_o}{\mu}} = 2 \cdot l \cdot a$$

$$\bar{c}^{trans} = 2 * 0,6 \text{ m} \cdot 163,29539 \text{ Hz}$$

$$\bar{c}^{trans} = 195,95 \text{ m/s}$$

$$u_c = \sqrt{\left(\frac{\partial c^{trans}}{\partial l} \cdot u_l\right)^2 + \left(\frac{\partial c^{trans}}{\partial a} \cdot u_a\right)^2}$$

$$u_c = \sqrt{(2 \cdot a \cdot u_l)^2 + (2 \cdot l \cdot u_a)^2}$$

$$u_c = 0,4053 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow c^{trans} = (196,0 \pm 0,4) \text{ m/s}$$

III. Resonanz in Abhängigkeit von Saitenlänge

Bei dieser Methode wird die Resonanzfrequenz der Grundmode f_1 in Abhängigkeit von der inversen Saitenlänge $\frac{1}{l}$ überprüft.

Gewicht $m=1\text{kg}$, 3. Kerbe $\Rightarrow F_o=29,95\text{ N}$

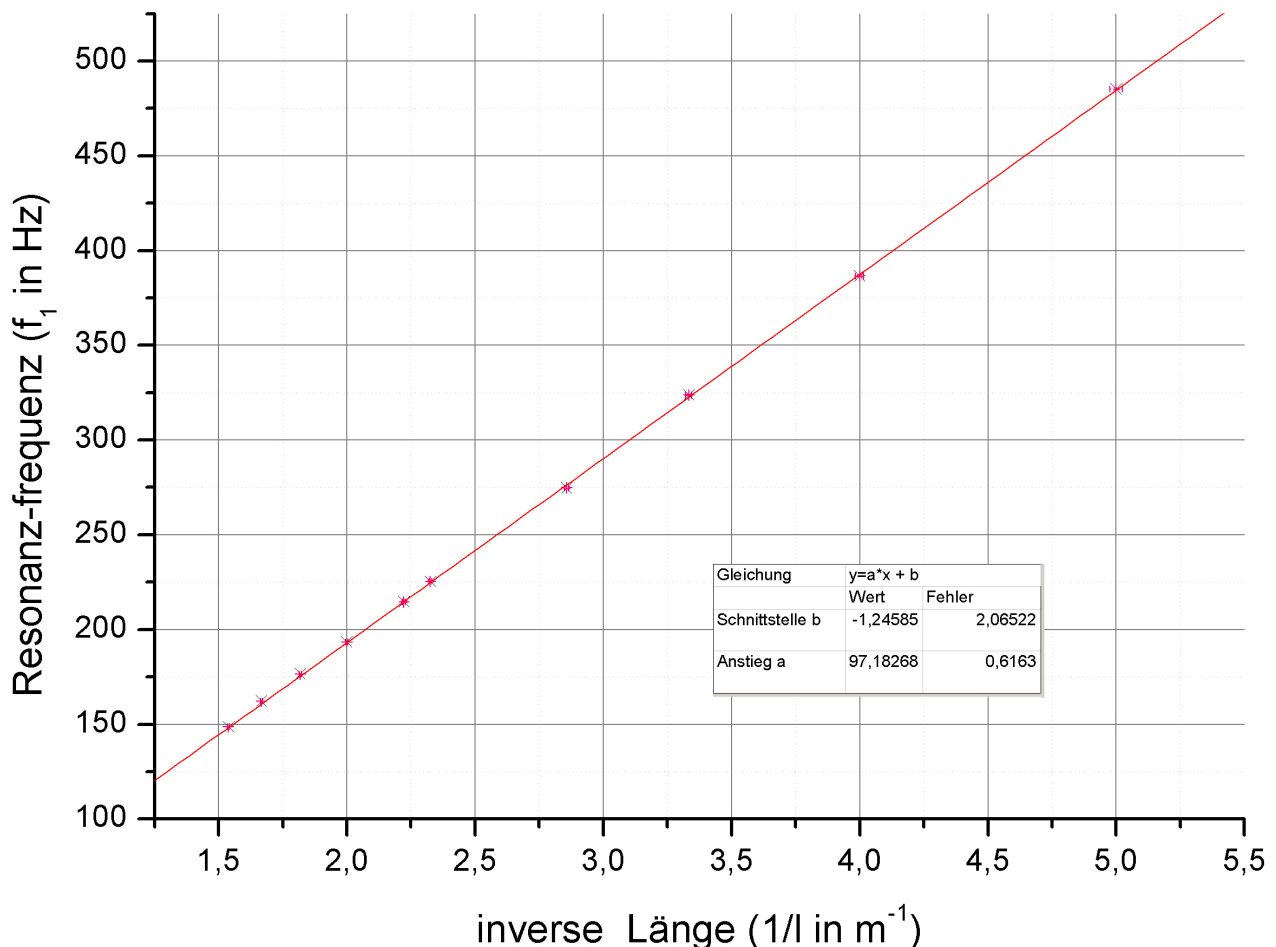
Messergebnisse und daraus berechnete Größen:

Länge	Fehler	inverse Länge	Fehler	Erregerfrequenz	Resonanzfrequenz	Fehler
l in m	u_l in 10^{-3} m	$1/l$ in m^{-1}	$u_{1/l}$ in m^{-1}	f_E in Hz	f_1 in Hz	u_{f_1} in Hz
0,65	1	1,53846	0,00237	74,38	148,76	0,04
0,6	1	1,66667	0,00278	81,13	162,26	0,04
0,55	1	1,81818	0,00331	88,27	176,54	0,04
0,5	1	2	0,004	96,72	193,44	0,04
0,45	1	2,22222	0,00494	107,3	214,6	0,4
0,43	1	2,32558	0,00541	112,7	225,4	0,4
0,35	1	2,85714	0,00818	137,4	274,8	0,4
0,3	1	3,33333	0,01111	161,9	323,8	0,4
0,25	1	4	0,016	193,3	386,6	0,4
0,2	1	5	0,025	242,6	485,2	0,4

Der Fehler für $1/l$ wurde wie folgt berechnet:

$$u_{\frac{1}{l}} = \frac{1}{l^2} \cdot u_l$$

Graphische Darstellung $f_1(\frac{1}{l})$:



Der lineare Zusammenhang ist eindeutig und der Anstieg hat den Wert $a = f_1 \cdot l = (97,18266 \pm 0,6163) \text{ m/s}$. Da $c^{\text{trans}} = f_1 \cdot \lambda_1$ und für die Grundmode $\lambda_1 = 2 \cdot l$ gilt, erhält man den Zusammenhang: $c^{\text{trans}} = 2 \cdot a$

$$\bar{c}^{\text{trans}} = 2 \cdot 97,18266 \text{ m/s}$$

$$\bar{c}^{\text{trans}} = 194,36532 \text{ m/s}$$

$$u_c = 2 \cdot u_a = 1,2326 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow c^{\text{trans}} = (194 \pm 1) \text{ m/s}$$

Verglichen mit der Phasengeschwindigkeit aus II. erhielten wir bei dieser Messmethode einen etwas geringeren Wert mit einer leicht höheren Ungenauigkeit. Das Ergebnis ist auf alle Fälle in der erwarteten Größenordnung. $c_{II}^{\text{trans}} \approx c_{III}^{\text{trans}}$

IV. Resonanz in Abhängigkeit von Zugspannung

Bei dieser Methode wird die Resonanzfrequenz der Grundmode f_1 in Abhängigkeit von der Zugspannung F_o (bzw. angehängten Massenstücken) überprüft.

Verschiedene Massen an 5. Kerbe $\Rightarrow F_o = 5 \cdot mg$, $l = 0,6 \text{ m}$

Messergebnisse und daraus berechnete Größen:

Gewicht	Fehler	Zugkraft	Fehler	gewurzelte Zugkraft	Fehler	Erregerfrequenz	Resonanzfrequenz	Fehler
m in kg	u_m in kg	F_o in N	u_{F_o} in N	$F_o^{0,5}$ in $\text{m}^{0,5}$	$u_{F_o^{0,5}}$ in $\text{m}^{0,5}$	f_E in Hz	f_1 in Hz	u_{f_1} in Hz
0,25	0,002	12,7825	0,0981	3,57526	0,01372	52,58	105,12	0,04
0,3	0,002	15,235	0,0981	3,9032	0,01257	58,89	113,78	0,04
0,35	0,002	17,6875	0,0981	4,20565	0,01166	61,45	122,9	0,04
0,4	0,002	20,14	0,0981	4,48776	0,01093	65,38	130,76	0,04
0,45	0,002	22,5925	0,0981	4,75316	0,01032	70,64	141,28	0,04
0,5	0,002	25,045	0,0981	5,0045	0,0098	73,24	146,48	0,04
0,55	0,002	27,4975	0,0981	5,24381	0,00935	77,26	154,52	0,04
0,6	0,002	29,95	0,0981	5,47266	0,00896	80,25	160,5	0,04
0,65	0,002	32,4025	0,0981	5,69232	0,00862	84,1	168,2	0,04
0,85	0,002	42,2125	0,0981	6,49711	0,00755	95,31	190,62	0,04

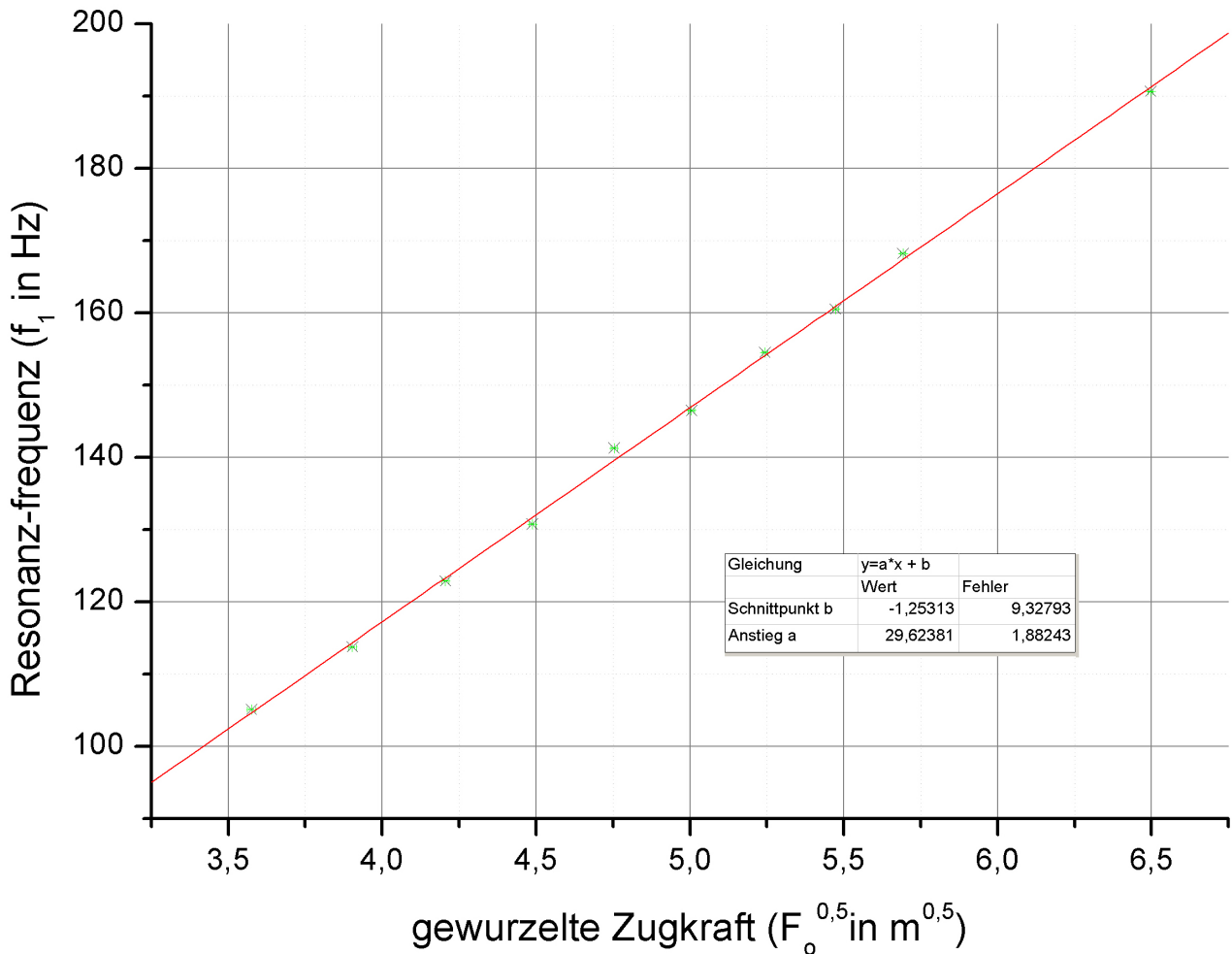
Die Fehler habe ich wie folgt berechnet:

$$u_{F_o} = \frac{u_m}{m} \cdot (F_o - F_H)$$

$$u_{\sqrt{F_o}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{F_o}}{F_o} \cdot \sqrt{F_o}$$

Die Zugkraft des Hebels F_H beeinflusst den Fehler nicht!

Graphische Darstellung $f_1(\sqrt{F_o})$:



Der Graph bestätigt den erwarteten linearen Zusammenhang. Mithilfe des Anstiegs lässt sich nun die lineare Massendichte erneut berechnen:

$$a = \frac{f_1}{\sqrt{F_o}} = (29,62381 \pm 1,88243) \text{ HzN}^{-\frac{1}{2}}$$

Aus (11) erhalten wir:

$$\frac{\sqrt{F_o}}{f_1} = 2 \cdot l \cdot \sqrt{\mu}$$

$$\Rightarrow \mu = (0,8 \pm 0,1) \text{ g/m}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{(2 \cdot a \cdot l)^2}$$

$$\bar{\mu} = 7,913 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}$$

Aufgrund der großen Ungenauigkeit ist dieses Ergebnis nicht besonders Aussagekräftig, zumindest überlappt das Unsicherheitsintervall mit dem in II. berechneten Wert.

$$u_\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial a} \cdot u_a\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial l} \cdot u_l\right)^2}$$

$$u_\mu = \sqrt{\left(\frac{-4 \cdot l}{(2 \cdot l \cdot a)^3} \cdot u_a\right)^2 + \left(\frac{-4 \cdot a}{(2 \cdot l \cdot a)^3} \cdot u_l\right)^2}$$

$$u_\mu = 1,006 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}$$

Anscheinend ist diese Messmethode ungeeignet für eine genaue Bestimmung der linearen Massendichte.

V. Auswertung

Mithilfe dieses Versuches ist es uns gelungen die Phasengeschwindigkeit und die lineare Massendichte unserer schwingende Saite zu bestimmen. Dabei hat die Methode aus II. anscheinend das beste Ergebnis für die lineare Massendichte geliefert. Die Methode aus IV. hingegen lieferte ein sehr ungenaues Ergebnis für μ , was möglicherweise durch die variierende Masse zurückzuführen ist. Jedes mal musste der Hebel in die subjektiv waagerechte Lage gebracht werden. Die idealisierte Regel für die angreifende Zugkraft ist natürlich nicht wie angenommen fehlerfrei und exakt, weshalb eine größere und ungenauere lineare Massendichte nicht verwunderlich ist. Auch bei der Methode aus III. stellt das Verändern der Saitenlänge einen Fehler dar, der in II. nicht vorkommt, weshalb die Ergebnisse aus II. am glaubwürdigsten erscheinen, was auch durch die Messunsicherheiten bestätigt wird.

Obwohl die Bestimmung der richtigen Frequenz ebenfalls auf subjektive Beurteilung beruht, scheint wie in der Graphik(II.) ersichtlich eine relativ genaue Messung möglich zu sein, da auch die Knotenpunkte leicht zu finden waren.

Die größten Fehlerquellen sind wahrscheinlich bei der Konstruktion des Hebels zu suchen, da gerade bei Methode IV. die größten Messunsicherheiten entstanden sind.

Insgesamt hat der Versuchsaufbau ausgereicht um den Zielstellungen gerecht zu werden.