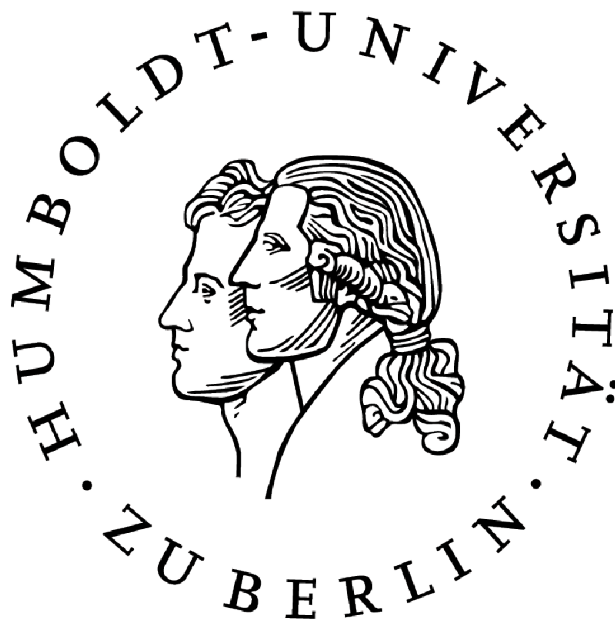


# Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I

Institut für Physik  
Physikalisches Grundpraktikum I:  
Mechanik und Wärmelehre (Modul P4)  
SS 2009



Versuch: M12 Saitenschwingung  
durchgeführt am 06.05.2009  
Messplatz 2 (LCP 2'11)

Verfasser: Richter, Gregor

Mtknr.:

Versuchspartner:

Mtknr.:

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Aufgabenstellung und Versuchsbeschreibung</b>	<b>Seite</b>
1.1. Zielstellung des Versuchs	2
1.2. Versuchsbeschreibung	2
<b>2. Messungenauigkeiten</b>	2
<b>3. Auswertung</b>	
3.1. Physikalische Betrachtung der Saite	3
3.2. Abhängigkeit von Resonanzfrequenz und Schwingungsmode	4
3.3. Abhängigkeit von Resonanzfrequenz und Saitenlänge	5
3.4. Abhängigkeit von Resonanzfrequenz und Zugkraft	6
<b>4. Diskussion und Interpretation</b>	
4.1. Vergleich der ermittelten Werte	7
4.2. Fehleranalyse	8
<b>Anhang</b>	
A1. Fehlerrechnung	9
A2. Ergänzung zur Regression in 3.3	9
<b>Quellenverzeichnis</b>	10
<b>Anlage:</b>	
Messdatenprotokoll	

# 1. Aufgabenstellung und Versuchsbeschreibung

## 1.1. Zielstellung des Versuchs

Ziel des Versuchs ist die experimentelle Bestimmung der linearen Massendichte  $\mu$  einer Saite, sowie die Phasengeschwindigkeit der Transversalwellen auf dieser.

## 1.2. Versuchsbeschreibung

Eine, an beiden Seiten fest eingespannte Saite, wird mittels einer auf einen Weicheisenkern gewickelte Spule magnetisch zu Schwingungen angeregt. Wir ermitteln für die Grundschwingung und die ersten acht Oberschwingungen die Resonanzfrequenzen und die Lage der Schwingungsknoten (es wurde stets der Abstand zwischen dem Einspannpunkt der Saite und dem ersten Schwingungsknoten gemessen), bei fester Saitenlänge ( $l=0.6\text{m}$ ) und fester Zugspannung ( $1,05\text{kg}^1$  in der dritten Kerbe des Lasthebels). Im Anschluss bestimmen wir die Resonanzfrequenzen der Grundschwingung bei Variation der Saitenlängen (5cm Schritte zwischen 20cm und 65cm), wobei die Zugspannung ebenfalls fest ist und den gleichen Betrag wie zuvor hat. Daraufhin ermitteln wir die Resonanzfrequenzen der Grundschwingung bei fester Saitenlänge ( $l=0.6\text{m}$ ) jedoch mit zehn unterschiedlichen Zugspannungen.

Gemessen wird stets die Erregerfrequenz, wenn am Oszilloskop die maximale Amplitude der Saitenschwingung (Resonanz) erkennbar ist. Für die Auswertung ist zu beachten, dass die Saite mit der doppelten Erregerfrequenz schwingt. Die Erregerspule wurde wenige Zentimeter hinter dem ersten Reiter angebracht, damit die elektromagnetische Erregung auch bei hohen Amplituden gewährleistet ist, wobei stets auf den Abstand zwischen Erregerspule und Detektorspule geachtet wurde, um die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen beiden gering zu halten.

## 2. Messungenauigkeiten

Die Einstellung des Frequenzgenerators erfolgte auf 0.1Hz genau, was wir aus der Reproduzierbarkeit der Ergebnisse ableiten. Da die gemessene Frequenz nur die halbe Frequenz der tatsächlichen Schwingung ist, fällt die tatsächliche Messungenauigkeit dementsprechend doppelt so groß aus (Fehlerfortpflanzungsgesetz). Die Abstandsmessungen der Reiter und Schwingungsknoten wurden mit einem Maßstab, dessen systematischer Fehler  $200\mu\text{m} + 10^{-3} \cdot MW$  beträgt, gemessen. Den zufälligen Fehler der Längenmessungen schätzen wir als einen halben Skalenteil mit 0,5mm ab. Da zufälliger und systematischer Fehler der Längenmessungen nicht korreliert sind, erhalten wir die Messungenauigkeit über pythagoreische Addition. Die Messungenauigkeit der Massenangaben schätzen wir mit 1g pro Gewicht ab (letzte signifikante Ziffer).

---

<sup>1</sup> Messungen wurden fälschlicherweise mit 50g zu viel Masse durchgeführt.

### 3. Auswertung

#### 3.1. Physikalische Betrachtung der Saite

Eine Saite ist ein elastischer Körper, der in seiner räumlichen Ausdehnung auf die unmittelbare Umgebung der neutralen Faser reduziert ist und einer Biegung deshalb nahezu keinen Widerstand entgegenbringt. Die Ruhelage der Saite ist erst bestimmt, wenn sie an beiden Enden fest eingespannt ist und eine axiale Zugkraft wirkt. Wird die Saite ausgelenkt, vollzieht sie eine gedämpfte longitudinale und transversale Schwingung in ihre Ruhelage zurück. Durch die transversale Schwingung erzeugt die Saite Schallwellen. Diese nutzt man in der Musik zur Klangbildung.

Bei näherer Betrachtung erhält man für die Bewegungsgleichung der transversalen und longitudinalen Schwingungen Spezialfälle der allgemeinen eindimensionalen Wellengleichung<sup>2</sup> (keine Betrachtung von Dämpfung und Erregung):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Wobei  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist. Die transversale Schwingung der Saite ist also auf stehende Wellen zurückzuführen. Zwei Lösungen für Gl. (1) sind:

$$u_1 = y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t + \omega \frac{x}{c}) \quad \text{und} \quad u_2 = y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - \omega \frac{x}{c}).$$

Diese erfüllen jedoch nicht die Randbedingung, die wir für die Saite fordern ( $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ). Die Wellengleichung stellt eine lineare Differentialgleichung dar, weshalb aufgrund des Superpositionsprinzips für lineare Differentialgleichungen auch jede Linearkombination zweier Lösungen, eine Lösung der Differentialgleichung ist. Demnach ist auch:

$$u(x, t) = u_2 - u_1 = 2 A \cdot \sin(\omega t) \sin(\omega \frac{x}{c})$$

eine Lösung, die die Randbedingungen für

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi \frac{c}{2 \cdot l} n \quad (2)$$

erfüllt ( $\omega$  ist die Kreisfrequenz und  $f_n$  die Frequenz der Schwingung). Die Phasengeschwindigkeit der transversalen Welle lässt sich bei Kenntnis der linearen Massendichte  $\mu$  und der Zugkraft  $F_0$  mit

$$c_{trans} = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}} \quad (3)$$

berechnen.

Für die Wellenlänge  $\lambda$  gilt wegen  $c = f_n \cdot \lambda_n$ , nach Gl. (2) der Zusammenhang:

$$\lambda_n = \frac{2 \cdot l}{n}. \quad (4)$$

---

2 Vergleich siehe Skript (Quelle 1) S.55

### 3.2. Abhängigkeit von Resonanzfrequenz und Schwingungsmode

Wir wollen als erstes das Verhalten der transversalen Welle für die Grundschiwingung und die ersten acht Oberschwingungen untersuchen. Wir halten für diese Untersuchung die Zugkraft in der Saite und die Saitenlänge ( $l = (0.600 \pm 0.001) \text{ m}$ ) konstant.

Aus Gl. (2) und Gl. (3) erhalten wir:

$$f_n = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}} \frac{n}{2 \cdot l} = \frac{c_{trans}}{2 \cdot l} n = a_1 \cdot n \quad (5)$$

$$\mu = \frac{F_0}{4 \cdot a_1^2 \cdot l^2} \quad (6)$$

Für die Kraft  $F_0$  gilt:

$$F_0 = m \cdot g \cdot k + 0.52 \text{ N}$$

Wobei  $m$  die Masse des Gewichtes,  $g$  die Fallbeschleunigung und  $k$  das Übersetzungsverhältnis des Hebelarms ist. Der zweite Summand ( $0.52 \text{ N}$ ) ist die zusätzliche Zugkraft, die durch das Eigengewicht des Hebels wirkt. Wir erhalten in unserem Fall  $F_0 = (31.4 \pm 0.2) \text{ N}$ .

Wir betrachten die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz  $f_n$  von der Mode  $n$ . Nach Gl. (5) vermuten wir einen linearen Zusammenhang. Diesen wollen wir nun bestätigt haben, weshalb wir mit den Messwerten eine lineare Regression durchführen<sup>3</sup>.

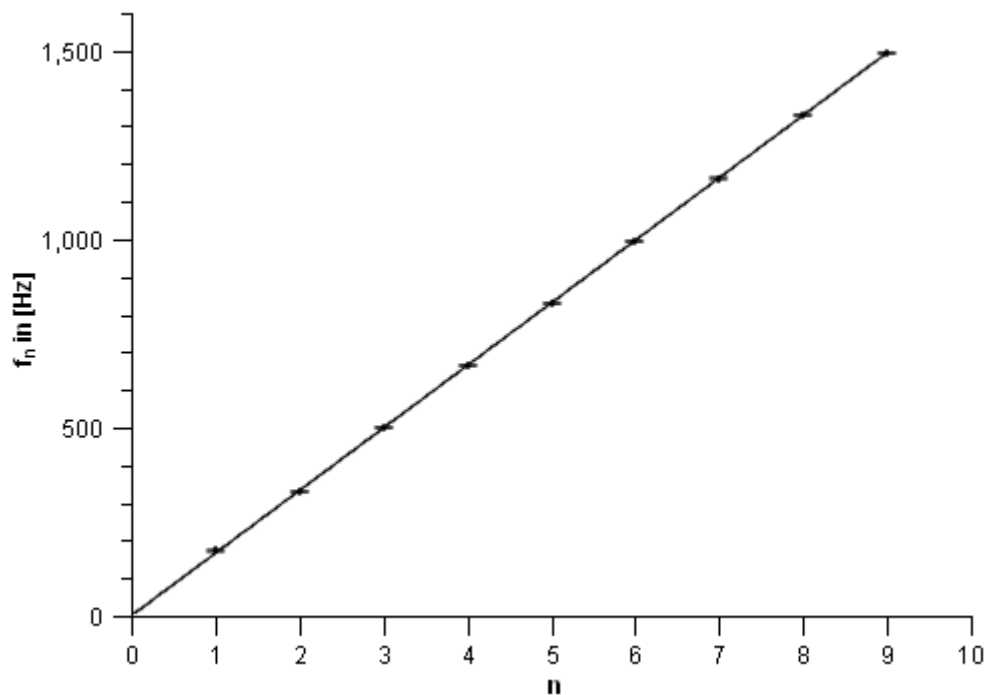


Abb. 1: grafische Darstellung von  $f_n = f(n)$

Der geforderte lineare Zusammenhang zwischen Schwingungsmode und Resonanzfrequenz wird durch die lineare Regression bestätigt. Aus der Regression erhalten wir für den Koeffizienten

$a_1 = (166.04 \pm 0.01) \text{ Hz}$ . Mit Gl. (6) erhalten wir für die lineare Massendichte

$\mu_1 = (7.91 \pm 0.05) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ . Wir können nun mit Hilfe von Gl. (3) die Phasengeschwindigkeit der transversalen Welle zu  $c_{transl} = (199.3 \pm 0.4) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  bestimmen. Die Messungenauigkeiten folgen aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz<sup>4</sup>.

Wir wollen noch den Abstand zwischen den Schwingungsknoten betrachten. Der Abstand zwischen

<sup>3</sup> Regression erstellt mit qti-plot Modellfkt.:  $y = a \cdot x$  mit instrumenteller Wichtung der Ordinatenfehler

<sup>4</sup> Siehe Anhang A1

zwei Schwingungsknoten ist die halbe Wellenlänge weshalb wir aus Gl. (4)

$$d = \frac{l}{n}$$

erhalten. Die Messunsicherheiten folgen aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Mode n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Abstand d zwischen den Knoten in [cm]	60.00 ± 0.09	30.00 ± 0.04	20.10 ± 0.03	15.00 ± 0.02	12.00 ± 0.02	10.00 ± 0.01	8.40 ± 0.01	7.40 ± 0.01	6.70 ± 0.01
Theoretischer Wert für d= l/n	60.000 ±0.085	30.000 ±0.021	20.000 ±0.009	15.000 ±0.005	12.000 ±0.003	10.000 ±0.002	8.500 ±0.002	7.500 ±0.001	6.667 ±0.001

Tabelle 1: Abstand zwischen den Schwingungsknoten in Abhängigkeit von der Mode

### 3.3. Abhängigkeit von Resonanzfrequenz und Saitenlänge

Im Folgenden wollen wir uns mit dem Verhalten der transversalen Schwingung bei einer Variation der Seitenlänge befassen. Wir wählen für unsere Betrachtung stets die Grundschwingung. Da laut Gl. (3) die Phasengeschwindigkeit der Saite nur von der Zugkraft  $F_0$  und der linearen Massendichte  $\mu$  abhängt, erwarten wir, dass wir die in 3.2. ermittelte Phasengeschwindigkeit mit dieser Methode reproduzieren können. Für die Frequenz der Grundschwingung ( $n=1$ ) gilt laut Gl. (2):

$$f_1 = \frac{c_{trans}}{2} \cdot \frac{1}{l} = a_2 \frac{1}{l} \quad (7)$$

Wir nehmen nun eine grafische Darstellung  $f_1 = f(1/l)$ , mittels linearer Regression, vor<sup>5</sup>, die eine Ursprungsgerade sein müsste.

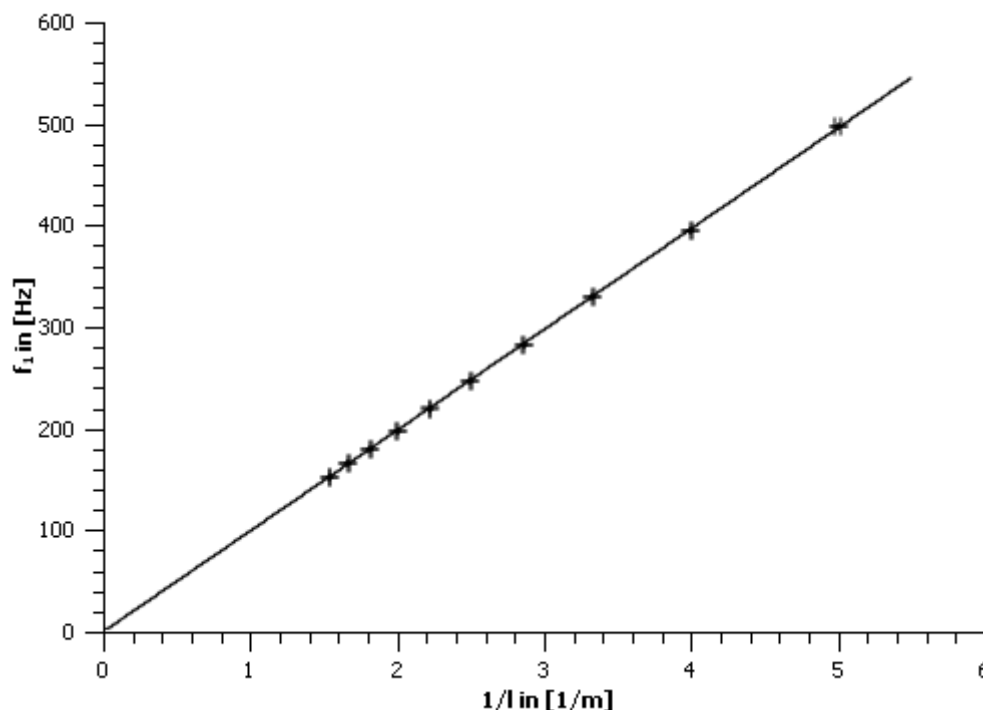


Abb.2: grafische Darstellung  $f_1 = f(1/l)$

Die per Regression erstellte Funktion ist tatsächlich eine Ursprungsgerade. Wir erhalten für den Koeffizienten der Regressionsgeraden  $a_2 = (99.15 \pm 0.04) m \cdot s^{-1}$ . Wir erhalten nach Gl. (7) die Phasengeschwindigkeit  $c_{trans2} = 2 \cdot a_2 = (198.3 \pm 0.1) m \cdot s^{-1}$ , wobei die Messungenauigkeit aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz folgt.

<sup>5</sup> Siehe Anhang A2

### 3.4. Abhängigkeit von Resonanzfrequenz und Zugkraft

Anschließend an die vorherigen Beobachtungen wollen wir uns mit dem Verhalten der transversalen Schwingung bei einer Variation der axialen Zugkraft in der Saite befassen. Für die Betrachtung wählen wir die Grundschiwingung und eine feste Saitenlänge ( $l = (0.600 \pm 0.001) \text{ m}$ ). Laut Gl. (5) erwarten wir, dass die Resonanzfrequenz proportional zur Wurzel der Zugkraft ist.

$$f_1 = \sqrt{\frac{F_0}{\mu} \frac{1}{2 \cdot l}} = \frac{1}{2 \cdot l \cdot \sqrt{\mu}} \sqrt{F_0} = a_3 \sqrt{F_0} \quad (8)$$

Zur Überprüfung stellen wir  $f_1 = f(\sqrt{F_0})$  grafisch dar. Wir führen dazu eine lineare Regression<sup>6</sup> mit den Messwerten durch.

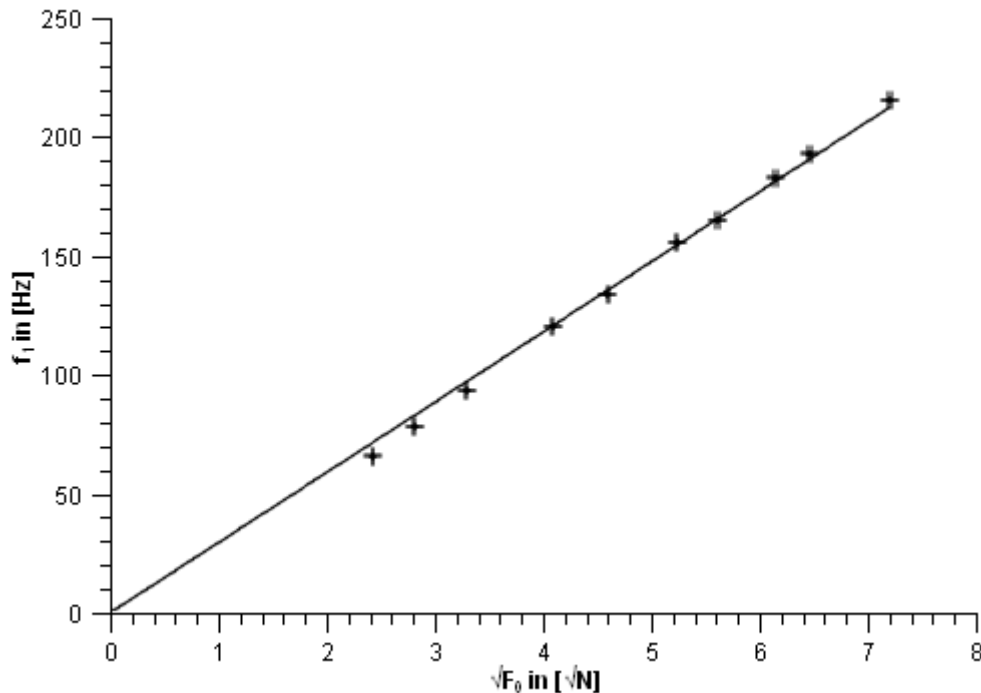


Abb.3: grafische Darstellung  $f_1 = f(\sqrt{F_0})$

Wir erhalten für den Koeffizient  $a_3 = (29.51 \pm 0.01) 1/\sqrt{\text{kg} \cdot \text{m}}$ . Nun gilt laut Gl. (8):

$$\mu = \left( \frac{1}{2 \cdot a_3 \cdot l} \right)^2$$

womit wir  $\mu_2 = (7.98 \pm 0.04) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$  erhalten. Die Messunsicherheit folgt aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz.

<sup>6</sup> Regression erstellt mit qti-plot Modellfkt.:  $y = a \cdot x$  mit instrumenteller Wichtung der Ordinatenfehler

## 4. Diskussion und Interpretation

### 4.1. Vergleich der ermittelten Werte

Wir erhalten also für die lineare Massendichte der Saite  $\mu_1 = (7.91 \pm 0.05) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$  und  $\mu_2 = (7.98 \pm 0.04) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ . Die Messunsicherheitsintervalle, die auf unterschiedliche Weise ermittelten linearen Massendichten, überschneiden sich offensichtlich, die Ergebnisse sind also kohärent. Die Messunsicherheit von  $\mu_1$  ist höher als die von  $\mu_2$ . Für beide Bestimmungsmethoden sind die Messunsicherheiten gering. Die höhere Messunsicherheit von  $\mu_1$  ist dadurch zu erklären, dass zusätzlich noch  $F_0$  in die Rechnung eingeht, dessen Fehler vergleichsweise groß ist (die Zehnerpotenz von  $u_F$  ist im Größenbereich  $10^{-1}$ , während  $u_a$ , in 3.2. und 3.3., mit  $10^{-2}$  und  $u_l$ , in 3.2. und 3.3., mit  $10^{-3}$  wesentlich kleiner sind). Demnach sind die Gründe für etwaige Diskrepanzen (wie bei  $\mu_H$  und  $\mu_2$ ) wohl nicht der Versuchsanordnung inhärent, wobei wir mögliche Ursachen noch diskutieren wollen<sup>7</sup>.

Die Herstellerangabe für die Saite beträgt  $\mu_H = 7.8 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ . Dieser Wert liegt nicht in den experimentell bestimmten Messunsicherheitsintervallen. Da wir die Unsicherheit der Herstellerangabe nicht kennen, vermuten wir für die Herstellerangabe eine maximale Abweichung von  $u_\mu = \pm 0.1 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$  (letzte signifikante Ziffer). In diesem Fall überschneiden sich die Messunsicherheitsintervalle von  $\mu_1$  und  $\mu_H$ , nicht jedoch von  $\mu_H$  und  $\mu_2$ , was wir später diskutieren wollen<sup>7</sup>. Eine generelle Kohärenz der experimentell ermittelten Ergebnisse und der Herstellerangabe liegt vor.

Die in 3.2. vorgenommene Betrachtung der Schwingungsknoten<sup>8</sup> weist eine Kohärenz der experimentell ermittelten Werte und der theoretischen Werte auf. Für kleinere Wellenlängen überschneiden sich die Messunsicherheitsintervalle jedoch nicht. Dies könnte an einer zu gering abgeschätzten Messunsicherheit liegen.

Für die Phasengeschwindigkeiten erhielten wir  $c_{trans1} = (199.3 \pm 0.4) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  und  $c_{trans2} = (198.3 \pm 0.1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , wobei sich die Messunsicherheitsintervalle nicht überschneiden. Den wirklichen Wert vermuten wir näher an  $c_{trans2}$ , wegen der geringeren Messunsicherheit. Mit beiden Methoden gelang eine genaue Bestimmung der Phasengeschwindigkeiten (geringe Messungenauigkeit). Bei der zweiten Bestimmungsmethode fällt die Messunsicherheit jedoch 4-mal kleiner aus. Die geringere Messunsicherheit bei  $c_{trans2}$  liegt darin begründet, dass wir aus nur zwei Messgrößen ( $f_1$  und  $l$ ) die Geschwindigkeit (mithilfe der Regression) ermitteln, während bei  $c_{trans1}$  noch zusätzlich  $F_0$  und dessen Fehler, der im Vergleich zu den anderen Messfehlern dominierend groß ist (wie zuvor schon erwähnt), eingeht und die anderen Größen ( $a$  aus der Regression, und  $l$ ) quadratisch ins Ergebnis eingehen.

Die Werte sind in der gleichen Größenordnung, weshalb wir hier eine generelle Kohärenz der beiden bestimmten Werte postulieren wollen. Mögliche Gründe für die Abweichung wollen wir später diskutieren<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup> Siehe 4.2.

<sup>8</sup> Siehe S.5 Tabelle 1



## 4.2. Fehleranalyse

Es ist auffällig, dass bei der linearen Regression in 3.4. (Abb.3) die ersten drei Messwerte nicht auf der Regressionsgeraden liegen, weshalb man eine ungenaue Bestimmung dieser vermuten könnte. Bei der Messung musste die Zugkraft variiert werden, wobei der Hebel perpendicular zur Einspannstelle der Saite ausgerichtet werden muss. Beträgt der Winkel  $\xi$  nicht  $90^\circ$  müssen wir die wirkende Kraft in ihre Kraftkomponenten aufteilen (wir betrachten den Hebel mit den angehängten Gewichten zweckmäßigerweise im homogenen Gravitationsfeld der Erde) wobei lediglich die Kraftkomponente, die perpendicular zum Hebel wirkt, die Zugkraft verursacht<sup>9</sup>. Es gilt also für die Zugkraft:

$$F_0 = F_g \cdot k \cdot \cos(90^\circ - \xi) .$$

Ein nicht genau eingestellter Hebel hätte also eine Kraftdifferenz von

$$\Delta F_0 = F_g \cdot k \cdot (1 - \sin(\xi))$$

zur Folge (mit  $0^\circ \leq \xi \leq 180^\circ$ ). Diese Ungenauigkeiten sind für geringe Winkeldifferenzen sehr gering und können die Diskrepanz zwischen  $\mu_H$  und  $\mu_2$  nur unzureichend erklären.

Weiterhin ist darauf zu verweisen, dass das Einstellen der Erregerfrequenz für die Grund- und Oberschwingungen subjektiv geschah. Dieser Fehler ist jedoch vor allem bei den höheren Frequenzen gering einzuschätzen, da die Resonanz sehr scharf ist. Die scharfe Resonanz war auch für schwankende Amplituden auf dem Oszilloskop verantwortlich, die die genaue Bestimmung der Erregerfrequenz erschwerten. Ein nicht erfassbarer Fehler ist die Beeinflussung der Schwingung durch Erschütterungen am Messplatz (z.B. Fingerklopfen auf dem Tisch). Ebenfalls nicht zu erfassen war die Beeinflussung durch den Luftstrom (offenes Fenster und offene Tür). Die Dämpfung ist vernachlässigbar, da die Welle durch eine harmonische Erregung erzeugt wird. Weiterhin kann man vermuten, dass die Zugkraft durch die Reiter beeinflusst wird, was Diskrepanzen für die ermittelten Phasengeschwindigkeiten erklären könnte (vor allem in 3.3. Variation der Reiterabstände).

Das Experiment genügt der Zielstellung und liefert genaue, im allgemeinen kohärente, Ergebnisse.

---

<sup>9</sup> <http://de.wikipedia.org/wiki/Hebelgesetz>

# Anhang

## A1. Fehlerrechnung

Die Messungenauigkeiten der Ergebnisse und Zwischenergebnisse wurden mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für nicht korrelierte Größen

$$u_F = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial x} \cdot u_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial y} \cdot u_y\right)^2 + \dots}$$

berechnet.

## A2. Ergänzung zur Regression in 3.3.

Wir wollen hier eine Wichtung der Abszissenfehler durchführen, da der Ordinatenfehler für alle Messdaten gleich groß ist, der Abszissenfehler jedoch variiert. Somit würde ein Wichtung nach Ordinatenfehler jede Messung mit gleicher Wichtung in die Regression einfließen, was als nicht sachgerecht angesehen werden kann.

Aufgrund von Problemen mit der Plot Software (Wichtung nur von Ordinatenfehlern möglich) wurde  $a_2$  bestimmt, indem man Abszissenachse und Ordinatenachse vertauscht (somit auch Abszissen- und Ordinatenfehler) und mit der Modellfkt.  $y=x/a$  (anstatt  $y=a \cdot x$ ) die Regression durchführt.

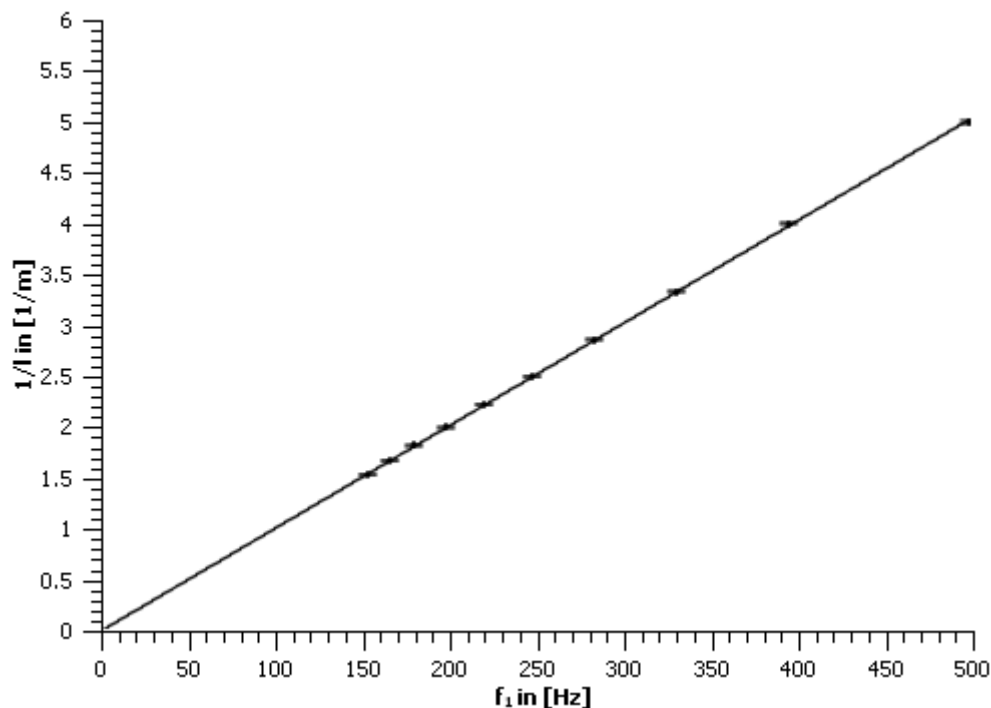


Abb.4: grafische Darstellung  $1/l = f(f_1)$

## Quellenverzeichnis

1. Skript: „Physikalisches Grundpraktikum: Mechanik und Thermodynamik 2005“, Humboldt Universität zu Berlin
2. Skript: „Physikalisches Grundpraktikum: Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik“, Humboldt Universität zu Berlin
3. Wolfgang Demtröder: „Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme“ 5. Auflage (Springer, Berlin, Heidelberg 1994)
4. <http://de.wikipedia.org/wiki/Hebelgesetz>
5. [http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrale\\_Faser](http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrale_Faser)